Modèle de croissance

3

Il arrive assez souvent, qu'on ait à analyser des comportements à partir de mesures ou de relevés pris à intervalles réguliers. Il est généralement possible de traduire ces comportements à l'aide de modèles mathématiques. On utilise habituellement les *suites* pour ce genre d'analyse.

3.1 Suites

définition 3.1.1
suite

Une *suite* de nombres réels

$$a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ \ldots \ , a_n , \ldots$$

est une fonction qui associe à chaque nombre entier positif n un nombre réel a_n .

n^e terme d'une suite

Le terme a_n est appelé le *n^e terme de la suite* ou le *terme général de la suite*. Il est souvent utile de représenter une suite par la formule de son n^e terme. Si a_n désigne le n^e terme d'une suite, $\{ a_n \}$ désignera la suite correspondante.

exemple 3.1.1

Suite	Suite en extension
$\{ n^2 + 1 \}$	$2, 5, 10, 17, 26, \ \ldots \ , n^2 + 1, \ \ldots$
$\left\{ \dfrac{1 + (-1)^n}{n} \right\}$	
$\left\{ \dfrac{1}{n!} \right\}$	

exemple 3.1.2

Suite	n^e terme
$\dfrac{3}{2} , \dfrac{5}{4} , \dfrac{7}{6} , \dfrac{9}{8} , \dfrac{11}{10} , \ \ldots$	$a_n = \dfrac{2n + 1}{2n}$
$1 , \dfrac{3}{2} , \dfrac{7}{4} , \dfrac{15}{8} , \dfrac{31}{16} , \ \ldots$	
$4, 7, 10, 13, 16, \ldots$	
$3, -6, 12, -24, 48, \ldots$	

On peut désigner une suite de plusieurs façons différentes.
Par exemple la suite

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \frac{1}{16}\ ,\ \frac{1}{32}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{1}{2^n}\ ,\ \ldots$$

peut être définie de l'une ou l'autre des façons suivantes:

- la suite $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$
- la suite $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ \ldots \ , \frac{1}{2^n}, \ \ldots \right\}$
- la suite dont le terme général est $a_n = \frac{1}{2^n}$

suite définie par récurrence

Une autre façon de définir une suite consiste à indiquer le premier terme de la suite ainsi qu'une formule permettant de calculer tout autre terme (sauf le premier) à partir d'un ou plusieurs termes précédents. Une formule de ce type s'appelle une *formule de récurrence* et elle définit ce qu'on appelle une *équation aux différences finies*.

exemple 3.1.3

Décrire en extension la suite $\{ a_n \}$ telle que $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n \\ a_1 = 2 \end{cases}$

On a $a_1 = 2$; le premier terme de la suite est donc 2.

Puisque $a_{n+1} = 3a_n$, on conclut que tout terme de la suite est toujours égal à 3 fois le terme précédent.

Ainsi,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 3a_1 = 3(2) = 6 \\ a_3 &= 3a_2 = 3(6) = 18 \\ a_4 &= 3a_3 = 3(18) = 54 \\ a_5 &= 3a_4 = 3(54) = 162 \end{aligned}$$

La suite en extension est 2, 6, 18, 54, 162, ...

solution d'un système de récurrence

Une fonction satisfaisant une équation de récurrence ainsi que sa condition initiale (système de récurrence) pour toute valeur de son domaine est appelée la solution du système.

On pourrait montrer en utilisant l'induction mathématique que le terme général de la suite obtenue à l'exemple précédent est

$$a_n = 2(3)^{n-1}$$

En effet,

$$a_1 = 2(3)^0 = 2$$
$$a_2 = 2(3)^1 = 6$$
$$a_3 = 2(3)^2 = 18$$
$$a_4 = 2(3)^3 = 54$$
$$a_5 = 2(3)^4 = 162$$

La solution du système $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n \\ a_1 = 2 \end{cases}$ est donc $a_n = 2(3)^{n-1}$

exemple 3.1.4

Soit la suite $\{ a_n \}$ telle que

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Décrire la suite en extension puis trouver la solution du système de récurrence.

rép: 1, 1, 1, 1, 1, ... ; $a_n = 1$

exemple 3.1.5

Soit la suite $\{ a_n \}$ telle que

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

Décrire la suite en extension puis trouver la solution du système de récurrence.

---

rép: 3, 5 ,7, 9, 11, ... ; $a_n = 3 + 2(n - 1) = 1 + 2n$

exemple 3.1.6

Soit la suite $\{ a_n \}$ telle que

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Décrire la suite en extension puis essayer ensuite de trouver la solution du système de récurrence.

---

rép: 1, 5, 13, 29, 61, ... ; $a_n = 2^{n+1} - 3$

Une formule de récurrence peut porter sur plusieurs termes à la fois.

exemple 3.1.7

suite de Fibonacci

Soit la suite $\{ a_n \}$ telle que

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

Décrire la suite en extension.

Cette célèbre suite est la suite de Fibonacci, en l'honneur du grand mathématicien italien Leonardo Fibonacci aussi appelé Léonard de Pise. Elle est apparue en 1202 dans le « liber Abaci » sous forme d'énigme. Le problème de Fibonacci contient déjà les ingrédients qu'utiliseront les démographes de XX^e siècle. Le problème est simple: un couple de lapins arrive seul sur une île qu'il va peupler de sa progéniture. Chaque saison, nous dit Fibonacci, le couple reproduit un nouveau couple. On admet que la grossesse dure une saison et que la maturité sexuelle est atteinte au bout d'une autre saison. Pour simplifier encore, on suppose que ces heureux lapins ne meurent jamais ni ne deviennent stériles. Question du Pisan: quelle sera la population lapine au bout de n périodes?

rép: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

exemple 3.1.8

Trouver une équation de récurrence ainsi que la condition initiale associée à la suite

$$5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \ldots$$

Le premier terme de la suite est 5, $a_1 = 5$. Il est évident que chacun des termes de la suite correspond au terme précédent soustrait de 1. On conclut que l'équation de récurrence sera

$$a_{n+1} = a_n - 1 \quad \text{pour tout } n > 1.$$

et le système de récurrence associé à la suite est

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 1 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

exemple 3.1.9

Trouver une équation de récurrence ainsi que la condition initiale associée à la suite

$$1,\ 1/2,\ 1/4,\ 1/8,\ 1/16,\ \ldots$$

rép: $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} \\ a_1 = 1 \end{cases}$

Exercices 3.1

1. Donner les 5 premiers termes de chacune des suites ci-dessous.

a) $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$

b) $\{3n - 4\}$

c) $\{43(0,1)^n\}$

d) $\{5\}$

e) $\left\{(-1)^{n-1}\dfrac{2}{n!}\right\}$

f) $\{2(-1)^n + 7\}$

2. Trouver le terme général de chacune des suites.

a) $3, 9, 27, 81, 243, \ldots$

b) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

c) $-3, 3, -3, 3, -3, \ldots$

d) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{8}{9}, \dfrac{16}{17}, \dfrac{32}{33}, \ldots$

e) $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, -\dfrac{7}{8}, \dfrac{9}{10}, \ldots$

f) $-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{10}, -\dfrac{5}{15}, \dfrac{6}{20}, -\dfrac{7}{25}, \ldots$

g) $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$

h) $2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{27}, \dfrac{2}{81}, \ldots$

i) $\dfrac{3}{1}, \dfrac{4}{1\text{x}2}, \dfrac{5}{1\text{x}2\text{x}3}, \dfrac{6}{1\text{x}2\text{x}3\text{x}4}, \ldots$

j) $0, 2, 0, 2, 0, \ldots$

3. Trouver les 5 premiers termes des suites définies par les systèmes de récurrence suivants et ensuite trouver la solution de chacun de ces systèmes.

a) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_{n+1} = (n+1)a_n \\ a_1 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_{n+1} = -a_n \\ a_1 = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

4. Trouver les 5 premiers termes des suites définies par le système de récurrence suivant.

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2(a_{n+1}) + a_n \\ a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 2 \end{cases}$$

5. Trouver une équation de récurrence ainsi que la condition initiale associée à chacune des suites ci-dessous.

a) 2, 4, 6, 8, 10, ...

b) 3, 6, 12, 24, 48, ...

c) 8, -4, 2, -1, 1/2, -1/4, ...

d) 2, 3, 5, 9, 17, ...

Réponses aux exercices 3.1

1. a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, ...$
   b) $-1, 2, 5, 8, 11, ...$
   c) $4.3, 0{,}43, 0{,}043, 0{,}0043, ...$
   d) $5, 5, 5, 5, 5, ...$
   e) $2, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{60}, ...$
   f) $5, 9, 5, 9, 5, ...$

2. a) $\{3^n\}$
   b) $\{n^2\}$
   c) $\{(-1)^n 3\}$
   d) $\left\{\frac{2^n}{2^n + 1}\right\}$
   e) $\left\{(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2n}\right\}$
   f) $\left\{(-1)^n \frac{n+2}{5n}\right\}$
   g) $\{2 + 3(n-1)\}$ ou $\{3n - 1\}$
   h) $\left\{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$
   i) $\left\{\frac{n+2}{n!}\right\}$
   j) $\{(-1)^n + 1\}$

3. a) 1, 2, 4, 8, 16 ; $a_n = 2^{n-1}$
   b) 2, 5, 8, 11, 14 ; $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$
   c) 1, 2, 6, 24, 120 ; $a_n = n!$
   d) -1, 1, -1, 1, -1 ; $a_n = (-1)^n$
   e) 1, 3, 7, 15, 31 ; $a_n = 2^n - 1$

4. 1, 2, 5, 12, 29

5. a) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} a_{n+1} = (-1/2)a_n \\ a_1 = 8 \end{cases}$
   d) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 1 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

3.2 Suite arithmétique

définition 3.2.1
suite arithmétique

Une suite définie par récurrence à partir du système

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + d \\ a_1 = a \end{cases} \quad \text{où} \quad n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\} \quad \text{et} \quad a, d \in \mathbf{R}$$

est une suite arithmétique aussi appelée une *progression arithmétique (PA).* La suite en extension est

$$a\ ,\ a + d\ ,\ a + 2d\ ,\ a + 3d\ ,\ a + 4d\ ,\ \dots$$

la raison de la PA

« a » est le premier terme de la PA.
« d » correspond à la différence entre un terme et le précédent et s'appelle *la raison* de la PA.

On pourrait démontrer par induction mathématique que la solution du système de récurrence (n^e terme de la PA) correspond à $a_n = a + (n - 1)d$.

n^e terme d'une PA de premier terme a et de raison d

$$a_n = a + (n - 1)d$$

exemple 3.2.1

Soit la suite arithmétique 1, 6, 11, 16, 21, ...

a) Trouver 3 termes supplémentaires de la PA.
b) Trouver le 20^e terme de la PA.
c) 201 est-il un terme de la PA ?

rép: a) 26, 31, 36 ; b) 96 ; c) oui, le 41^e terme

exemple 3.2.2

Soit $\{ a_n \}$ une suite arithmétique. Trouver a_{13} sachant que $a_4 = 14$ et $a_9 = 34$.

rép: 50

exemple 3.2.3

Insérer 5 moyens arithmétiques entre 4 et 22.

dans une PA les termes entre deux valeurs données sont appelés MOYENS ARITHMÉTIQUES entre les deux valeurs

rép: 7, 10, 13, 16, 19

Soit s_n la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme a et de raison d.

$$a \, , \, a + d \, , \, a + 2d \, , \, a + 3d \, , \, a + 4d \, , \quad \ldots$$

$$s_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots + (a + (n - 1)d)$$

En inversant l'ordre des termes de cette somme, on obtient

$$s_n = (a + (n - 1)d) + (a + (n - 2)d) + (a + (n - 3)d) + \ldots + a$$

Puis en additionnant terme à terme les 2 équations précédentes on obtient

$$\begin{array}{rcccccccccc} s_n & = & a & + & (a + d) & + & (a + 2d) & + \ldots + & (a + (n-1)d) \\ + \; s_n & = & (a + (n-1)d) & + & (a + (n-2)d) & + & (a + (n-3)d) & + \ldots + & a \\ \hline 2(s_n) & = & (2a + (n-1)d) & + & (2a + (n-1)d) & + & (2a + (n-1)d) & + \ldots + & (2a + (n-1)d) \end{array}$$

$$\Rightarrow \qquad 2(s_n) = n(2a + (n-1)d)$$

somme des n premiers termes d'une PA de premier terme a et de raison d

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n - 1)d\right)}$$

exemple 3.2.4

Trouver la somme des 100 premiers nombres entiers positifs impairs.

rép: 10 000

exemple 3.2.5

a) Combien y a-t-il de termes divisibles par 7 entre 40 et 632?
b) Trouver la somme des termes divisibles par 7 entre 40 et 632?

rép: a) 85 ; b) 28 560

Exercices 3.2

1. Ajouter 2 termes à chacune des suites ci-dessous de façon à ce que les 5 termes forment une PA.

   a) -2, 1, 4, ...
   b) 6, -2, -10, ...
   c) 7, 3/2, -4, ...
   d) 3a - 2b , 4a - b , 5a , ...

2. Pour chacune des PA ci-dessous, calculer le terme demandé.

   a) 9, 3, -3, ... ; 12^e terme
   b) $\frac{3}{4}, \frac{13}{12}, \frac{17}{12}$, ... ; 10^e terme
   c) $3\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, ... ; 7^e terme

3. Combien existe-t-il de nombres divisibles par 6 entre 70 et 363?

4. Trouver la somme.

   a) 26 + 28 + 30 + 32 + 34 + ... + 112
   b) 0,688 + 0,681 + 0,674 + 0,667 + ... + 0,135
   c) 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + ... + 4n

5. Soit { a_n } une suite arithmétique, trouver

   a) a_{13} si $a_4 = 14$ et $a_9 = 34$
   b) n si $a_1 = 6$, $d = 4$ et $s_n = 286$
   c) s_7 si $a_2 = -3$ et $a_6 = 13$
   d) d si $a_1 = 2$, $s_n = 572$ et $a_n = 86$

6. Trouver la valeur de k pour que la suite soit arithmétique.

   a) k - 1 , k + 3 , 3k - 1 , ...
   b) $3k^2 + k + 1$, $2k^2 + k$, $4k^2 - 6k + 1$, ...

7. Insérer 5 moyens arithmétiques entre

   a) 4 et 22
   b) -2 et $6\sqrt{3} + 4$

8. Un corps tombe en chute libre dans le vide. Il parcourt 16 mètres durant la première seconde, 48 mètres durant la deuxième seconde, 80 mètres durant la troisième seconde, etc. Si la distance parcourue à chaque seconde est en progression arithmétique,
   a) calculer le nombre de mètres que le corps aura parcouru pendant la 15^e seconde,
   b) calculer la distance totale que le corps aura parcouru après la 20^e seconde,
   c) combien de temps sera nécessaire pour que le corps parcourt une distance totale de 2304 mètres?

9. Un homme doit acquitter une dette en 17 versements. Les versements sont en progression arithmétique. Sachant que le 3^e versement est de 18 $ et le 7^e est de 30 $, trouver la valeur de la dette.

10. On empile 200 billes de bois de la façon suivante: 20 billes sur la rangée du bas, 19 billes sur la rangée suivante, 18 sur la troisième rangée du bas, etc. Combien y a-t-il de rangées et combien y a-t-il de billes sur la rangée supérieure?

Réponses aux exercices 3.2

1. a) $d = 3$; $7, 10$
   b) $d = -8$; $-18, -26$
   c) $d = -\frac{11}{2}$; $-\frac{19}{2}$, -15
   d) $d = a + b$; $6a + b$, $7a + 2b$

2. a) -57
   b) $\frac{15}{4}$
   c) $-9\sqrt{2}$

3. 49

4. a) 3036
   b) 32,92
   c) $2n(n + 1)$

5. a) 50
   b) 11
   c) 35
   d) 7

6. a) $k = 4$
   b) $k = 2$ ou $k = \frac{1}{3}$

7. a) 7, 10, 13, 16, 19
   b) $\sqrt{3} - 1$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3} + 1$, $4\sqrt{3} + 2$, $5\sqrt{3} + 3$

8. a) 464 m
   b) 6400 m
   c) 12 s

9. 612 $

10. 16 rangées ; 5 billes

3.3 Suite géométrique

définition 3.3.1
suite géométrique

Une suite définie par récurrence à partir du système

$$\begin{cases} a_{n+1} = r a_n \\ a_1 = a \end{cases} \qquad \text{où} \quad n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \quad \text{et} \quad a, r \in \mathbf{R} \ (a \neq 0)$$

est une suite géométrique aussi appelée une *progression géométrique (PG)*. La suite en extension est

$$a\ ,\ ar\ ,\ ar^2\ ,\ ar^3\ ,\ ar^4\ ,\ \ldots$$

la raison de la PG

« a » est le premier terme de la PG.
« r » correspond au quotient d'un terme avec le précédent et s'appelle *la raison* de la PG.

On pourrait démontrer par induction mathématique que la solution du système de récurrence (n^e terme de la PG) correspond à $a_n = ar^{n-1}$.

n^e terme d'une PG de premier terme a et de raison r

$$a_n = ar^{n-1}$$

exemple 3.3.1

Soit la suite géométrique 96, 48, 24, ...

a) Trouver le 20^e terme de la PG.
b) $\frac{3}{64}$ est-il un terme de la PG ?

rép: a) $\frac{3}{16\ 384} = 0{,}0001831$; oui, le 12^e terme

exemple 3.3.2

Soit $\{ a_n \}$ une suite géométrique. Trouver a et r sachant que $a_4 = 1$ et $a_8 = \frac{1}{256}$.

rép: $a = 64$ et $r = \frac{1}{4}$ ou $a = -64$ et $r = -\frac{1}{4}$

Soit s_n la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme a et de raison r

$$a\ , ar\ , ar^2\ , ar^3\ , ar^4\ , \ \ldots$$

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ \ldots\ + ar^{n-1}$$

En multipliant chaque membre de l'équation par r, on obtient

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ \ldots\ + ar^n$$

Puis en soustrayant terme à terme les 2 équations précédentes, on obtient

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ \ldots\ + ar^{n-1} \\ -\ rs_n & = & \qquad ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \ \ldots\ + ar^n \\ \hline s_n - rs_n & = & a - ar^n \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad (1 - r)\, s_n = a - ar^n$$

somme des n premiers termes d'une PG de premier terme a et de raison r

$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

exemple 3.3.3

Un jeune garçon propose à son père de lui cirer les souliers pour la modique somme d'un sou le premier jour. Les jours suivants, il demande de recevoir le double du montant reçu la journée précédente. Quel montant aura-t-il gagné le premier mois?

(on considère que le mois a 30 jours)

rép: 10 737 418 $

exemple 3.3.4

Trouver les sommes suivantes si elles existent.

a) $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots$ b) $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \ldots$

rép: a) $\frac{8}{3}$; b) n'existe pas (∞)

exemple 3.3.5

Pierre, Michel et Denis lancent un dé à tour de rôle (dans cet ordre) jusqu'à ce que l'un des trois obtienne un 6. Quelle est la probabilité que

a) Pierre gagne? b) Michel gagne? c) Denis gagne?

rép: a) $\frac{36}{91}$; b) $\frac{30}{91}$; c) $\frac{25}{91}$

Exercices 3.3

1. Ajouter 2 termes à chacune des suites ci-dessous de façon à ce que les 5 termes forment une PG.

   a) 16, 12, 9, ...

   b) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \ldots$

   c) $2h, -\frac{1}{h}, \frac{1}{2h^3}, \ldots$

   d) $\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{4}{9}, \ldots$

2. Pour chacune des PG ci-dessous, calculer le terme demandé.

   a) -4, 2, -1, ... ; 10^e terme

   b) $\frac{4}{5}, -\frac{8}{15}, \frac{16}{45}, \ldots$; 8^e terme

3. Soit la suite géométrique 18, 12, 8, ... Sachant que $\frac{512}{729}$ est un terme de la suite, quel est son rang?

4. Trouver la somme.

   a) $27 + 18 + 12 + 8 + \ldots + \frac{64}{27}$

   b) $3 - 6 + 12 - 24 + \ldots - 1536$

5. Trouver les 3 premiers termes d'une PG dont le troisième terme est $\frac{25}{4}$ et le septième terme est $\frac{4}{25}$.

6. Trouver k pour que la suite soit une PG.

$$k - 4 , k - 1 , 2k - 2 , \ldots$$

7. Dans une PG, les termes entre 2 valeurs données sont appelés MOYENS GÉOMÉTRIQUES entre ces 2 valeurs. On demande d'insérer

   a) 2 moyens géométriques entre 27 et -125,

   b) 5 moyens géométriques entre 8 et $\frac{1}{8}$,

   c) 1 moyen géométrique entre a et b.

8. Soit $\{ a_n \}$ une suite géométrique, trouver

   a) r et a si $a_4 = 16a_8$ et $a_5 = \frac{1}{3}$

   b) a_8 et s_8 si $a_3 = \sqrt{2}$ et $a_6 = 4$

9. Anatole est maintenant à la retraite. Il a travaillé 40 ans pour le même employeur. À ses 5 premières années, son salaire était de

   2000 \$, 2160 \$, 2333 \$, 2519 \$, 2721 \$

   Durant toute sa carrière son salaire a continué de croître d'une façon géométrique.

   a) Quel était son salaire à sa dernière année de travail?
   b) Combien Anatole a-t-il gagné en salaire durant toute sa carrière?

10. On lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne un 6. Calculer la probabilité que l'on cesse de lancer le dé avant le 16e lancer.

11. Trouver les sommes suivantes si elles existent.

    a) $128 + 48 + 18 + \frac{27}{4} + \ldots$

    b) $16 - 4 + 1 - \frac{1}{4} + \ldots$

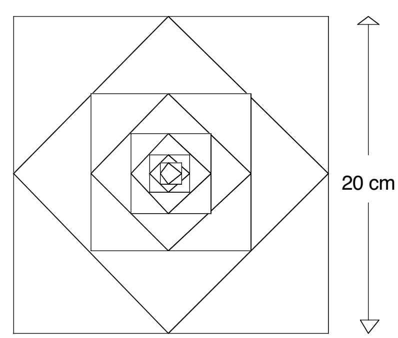
    c) $\frac{2}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4\sqrt{6}}{27} + \ldots$

    d) $-2 + \sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \ldots$

    e) $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \ldots$

12. Considérons un carré de 20 cm de côté. Si l'on joint les milieux des côtés de ce carré, on forme un nouveau carré. En joignant les milieux des côtés de ce deuxième carré, on en forme un troisième et ainsi de suite. On obtient de la sorte une infinité de carrés. Calculer la somme

    a) des périmètres de tous les carrés.
    b) des aires de tous les carrés.



13. Trois tireurs à l'arc décident de s'affronter. Le premier qui atteindra une cible gagnera. Jean, Michel et Denis ont respectivement des probabilités de 1/5, 1/4 et 1/3 d'atteindre la cible. Ils tirent dans cet ordre, à tour de rôle jusqu'à ce qu'un des 3 atteigne la cible. Calculer la probabilité que

    a) Jean gagne,
    b) Michel gagne,
    c) Denis gagne.

Réponses aux exercices 3.3

1. a) $r = \frac{3}{4}$; $\frac{27}{4}$, $\frac{81}{16}$

   b) $r = -\frac{2}{3}$; $\frac{4}{27}$, $-\frac{8}{81}$

   c) $r = -\frac{1}{2h^2}$; $-\frac{1}{4h^5}$, $\frac{1}{8h^7}$

   d) $r = \sqrt[6]{3}$; $\frac{4\sqrt{6}}{27}$, $\frac{8}{27}$

2. a) $\frac{1}{128}$ b) $-\frac{512}{10\,935}$

3. 9^e

4. a) $\frac{2059}{27}$ b) -1023

5. $\frac{625}{16}$, $\frac{125}{8}$, $\frac{25}{4}$ ou $\frac{625}{16}$, $-\frac{125}{8}$, $\frac{25}{4}$

6. $k = 7$

7. a) -45, 75

   b) 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ou -4, 2, -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$

   c) $\sqrt{ab}$ ou $-\sqrt{ab}$

8. a) $r = \pm\frac{1}{2}$ et $a = \frac{16}{3}$

   b) $a_8 = 8$ et $s_8 = \frac{15(2+\sqrt{2})}{2}$

9. a) 40 230,60 $ b) 518 113,04 $

10. 0,935

11. a) $\frac{1024}{5}$ d) $2(\sqrt{2} - 2)$

    b) $\frac{64}{5}$ e) n'existe pas

    c) $\frac{2(3+\sqrt{6})}{3}$

12. a) $80(2 + \sqrt{2}\,)$ cmb) $800\ cm^2$

13. a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$

    b) $\frac{1}{3}$

3.4 Étude d'un modèle de croissance

Les suites sont souvent utilisées pour décrire la croissance de phénomènes courants. Dans ce genre d'étude, il est quelquefois aisé de décrire le comportement du phénomène à l'aide d'une équation de récurrence. La condition initiale est en général facilement identifiable. Le problème se complique lorsqu'on essaie de trouver la solution du système.

exemple 3.4.1

Une épidémie de grippe fait actuellement rage. 40 personnes sont présentement atteintes de la maladie. Le nombre double à chaque semaine. Combien de personnes seront malades dans 10 semaines?

On peut facilement décrire le phénomène à l'aide d'une équation de récurrence et de sa condition initiale.

il est parfois utile dans des situations comme celle-ci de considérer a_0 comme condition initiale plutôt que a_1

le domaine de définition du système de récurrence devient $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Si a_n représente le nombre de malades après n semaines,

on a $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_0 = 40 \end{cases}$ où $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Pour obtenir la solution de ce système, il suffit d'énumérer quelques termes.

$$40, 80, 160, 320, 640, \dots = 40, 40(2), 40(2^2), 40(2^3), 40(2^4), \dots$$

De toute évidence, la solution du système précédent est

$$a_n = 40(2^n) \quad \text{où} \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

a_{10} correspond au nombre de malades dans 10 semaines.

$$a_{10} = 40(2^{10}) = 40\,960 \text{ malades.}$$

Malheureusement, trouver la solution d'un système de récurrence est en général un problème complexe. Dans cette section nous verrons comment obtenir facilement la solution d'un système de récurrence possédant certaines caractéristiques.

proposition 3.4.1

solution du système de récurrence linéaire du 1^{er} ordre

La solution du système de récurrence $\begin{cases} a_{n+1} = Aa_n + B \\ a_0 = C \end{cases}$

est
$$a_n = \begin{cases} CA^n + B\left(\dfrac{1 - A^n}{1 - A}\right) & \text{si } A \neq 1 \\ C + Bn & \text{si } A = 1 \end{cases}$$

$(A, B, C \in \mathbf{R} \text{ et } A \neq 0)$

démonstration

À l'aide de la condition initiale $a_0 = C$ et de l'équation de récurrence $a_{n+1} = Aa_n + B$ on obtient les termes suivant:

$$\begin{aligned}
n = 0,\quad a_1 &= Aa_0 + B = \boxed{CA + B} \\
n = 1,\quad a_2 &= Aa_1 + B = A(CA + B) + B \\
&= \boxed{CA^2 + B(1 + A)} \\
n = 2,\quad a_3 &= Aa_2 + B = A(CA^2+B(1 + A)) + B \\
&= \boxed{CA^3 + B(1 + A + A^2)} \\
n = 3,\quad a_4 &= Aa_3 + B = A(CA^3 + B(1 + A + A^2)) + B \\
&= \boxed{CA^4 + B(1 + A + A^2 + A^3)} \quad \ldots
\end{aligned}$$

On pourrait démontrer par induction mathématique (bien que le résultat paraît évident) que

$$a_n = CA^n + B(1 + A + A^2 + A^3 + \ \ldots\ + A^{n-1}) \qquad (*)$$

Étant donné que la suite

$$1, A, A^2, A^3, A^4, \ \ldots\ , A^{n-1}$$

correspond à une PG contenant n termes avec a = 1 et r = A.
La somme de ces termes sera

$$1 + A + A^2 + A^3 + A^4 + \ \ldots + A^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1 - A^n}{1 - A} & \text{si } A \neq 1 \\ n & \text{si } A = 1 \end{cases}$$

En substituant cette somme dans l'équation (*), on obtient

$$a_n = \begin{cases} CA^n + B\left(\dfrac{1 - A^n}{1 - A}\right) & \text{si } A \neq 1 \\ C + Bn & \text{si } A = 1 \end{cases}$$

On pourrait vérifier en substituant différentes valeurs de n dans cette équation que les quantités obtenues correspondent bien aux termes de la suite décrite par le système de récurrence. De plus, c'est la seule solution pour un a_0 donné (sans preuve).

exemple 3.4.1

Trouver la solution du système suivant.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 4 \\ a_0 = 3 \end{cases} \qquad \text{où } n \in \{ 0,1,2,3,4, \ldots \}$$

Le système de récurrence correspond à celui du théorème 3.4.1
Les valeurs des constantes sont: A = 1, B = -4, C = 3.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad a_n &= C + Bn \\
&= 3 + (-4)n \\
&= 3 - 4n \qquad \text{où } n \in \{ 0,1,2,3,4, \ldots \}
\end{aligned}$$

exemple 3.4.2

Trouver la solution du système suivant.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 4 \\ a_0 = 3 \end{cases} \qquad \text{où } n \in \{0,1,2,3,4, \dots\}.$$

Le système de récurrence correspond à celui du théorème 3.4.1
Les valeurs des constantes sont: A = 2, B = -4, C = 3.

$$\Rightarrow \quad a_n = CA^n + B\left(\frac{1 - A^n}{1 - A}\right)$$

$$= 3(2^n) + (-4)\left(\frac{1 - 2^n}{1 - 2}\right)$$

$$= 3(2^n) + 4(1 - 2^n)$$

$$= 3(2^n) + 4 - 4(2^n)$$

$$= 4 - 2^n \qquad \text{où } n \in \{0,1,2,3,4, \dots\}$$

la suite en extension est
3, 2, 0, -4, -12, ...

exemple 3.4.3

Trouver la solution du système suivant.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2 \\ a_0 = 5 \end{cases} \qquad \text{où } n \in \{0,1,2,3,4, \dots\}.$$

la suite en extension est
5, 17, 53, 161, 485, ...

rép: $a_n = 6(3^n) - 1$

exemple 3.4.4

Trouver la solution du système suivant.

$$\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n - 3 \\ a_0 = 4 \end{cases} \qquad \text{où } n \in \{0,1,2,3,4, \dots\}.$$

---

la suite en extension est

4, -11, 19, -41, 79, ...

rép: $a_n = 5(-2)^n - 1$

exemple 3.4.5

tout phénomène de croissance que l'on peut reproduire à l'aide d'un système de récurrence de la forme

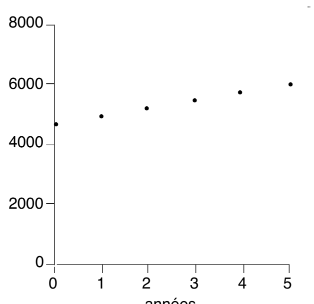
$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = a_n + B \\ a_0 = C \end{cases} \quad (B, C \text{ Œ } \mathbf{R})}$$

est un phénomène à *croissance linéaire*, les termes sont en PA avec a = C et d = B

la solution d'un tel système est

$$\boxed{a_n = C + Bn}$$

graphiquement, ce type de croissance correspond à des points isolés alignés sur une droite



Actuellement il y a 4500 étudiants dans un collège. À chaque année le nombre d'étudiants augmente de 250.

a) Quelle sera la population étudiante dans 8 ans?
b) Dans combien d'années la population doublera-t-elle?

Soit a_n la population du collège après n périodes d'un an.
On a

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 250 \\ a_0 = 4500 \end{cases} \qquad \text{où } n \in \{0,1,2,3,4, \dots\}$$

Puisque A = 1, B = 250 et C = 4500 alors la solution du système est $a_n = 4500 + 250n$.

a) a_8 correspond à la population étudiante dans 8 ans.

$$\begin{aligned} a_8 &= 4500 + 250(8) \\ &= 4500 + 2000 \\ &= 6500 \text{ étudiants} \end{aligned}$$

b) On cherche à trouver n tel que $a_n \geq 2(4500)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 4500 + 250n &\geq 9000 \\ 250n &\geq 4500 \\ n &\geq 18 \text{ ans} \end{aligned}$$

exemple 3.4.6

intérêt simple

Un montant de 1000 $ est prêté pour 10 ans à un taux d'intérêt simple de 6 % par année.

a) Quel sera le montant accumulé dans 10 ans?
b) Dans combien d'années le capital vaudra-t-il 1500 $ ou plus?

---

l'intérêt simple rapporte à chaque année un capital fixe de 1000 $ × 6 % = 60 $

rép: a) 1600 $; b) dans 9 ans

exemple 3.4.7

Sophie suit présentement un régime d'amaigrissement. Son poids diminue à chaque jour de 0,2 kg. Quinze jours après le début du régime, elle pèse 58 kg.

a) Quel était son poids au début du régime?
b) Dans combien de jours aura-t-elle perdu au moins 10% de son poids initial?

---

rép: a) 61 kg ; b) dans 31 jours (30,5 jours)

exemple 3.4.8

croissance de bactéries

La bactérie "*Escherichia coli*" est une bactérie que l'on peut retrouver dans le lait. Chaque cellule de cette bactérie se divise en deux environ toutes les 20 minutes. Si le même taux de reproduction se maintient pendant 4 heures,

a) combien y aura-t-il de cellules produites à partir d'une cellule de la bactérie "*Escherichia coli*"?

b) dans combien de temps, le nombre de cellules sera-t-il d'au moins 1 000 000?

Soit a_n le nombre de cellules après n périodes de 20 minutes.
On obtient

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_0 = 1 \end{cases} \quad \text{où } n \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

tout phénomène de croissance que l'on peut reproduire à l'aide d'un système de récurrence de la forme

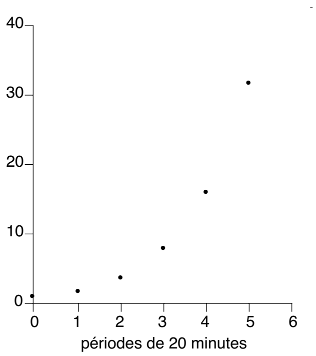
$$\boxed{\begin{cases} a_{n+1} = Aa_n \\ a_0 = C \end{cases} \quad (A, C \in \mathbf{R}, A \neq 0)}$$

est un phénomène à *croissance géométrique*, les termes sont en PG avec a = C et r = A

la solution d'un tel système est

$$\boxed{a_n = C(A^n)}$$

ces phénomènes ont une croissance très rapide



Puisque A = 2, B = 0 et C = 1 alors la solution du système est

$$a_n = 1(2)^n$$

a) a_{12} correspond au nombre de bactéries après 4 heures (12 périodes de 20 minutes).

$$\begin{aligned} a_{12} &= 2^{12} \\ &= 4096 \text{ cellules} \end{aligned}$$

b) On cherche à trouver n tel que $a_n \geq 1\,000\,000$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad 2^n &\geq 1\,000\,000 \\ \log 2^n &\geq \log(1\,000\,000) \\ n(\log 2) &\geq \log(1\,000\,000) \\ n &\geq \frac{\log(1\,000\,000)}{\log 2} \\ n &\geq \frac{6}{0.30103} \\ n &\geq 19{,}93 \\ n &\geq 20 \ \ (400 \text{ minutes}) \end{aligned}$$

exemple 3.4.9

croissance de population

La population d'une ville s'accroît de 2 % par année. Présentement la population est de 500 000 habitants.

a) Quelle sera la population de la ville dans 10 ans?
b) Dans combien d'années cette population sera-t-elle au moins le double de ce qu'elle est présentement?

---

rép: a) 609 497 hab. ; b) dans 35 ans (35,003 ans)

exemple 3.4.10

dépréciation

Un homme achète une auto au montant de 25 000 $. La dépréciation de la valeur de l'auto est de 15 % par année.

a) Calculer la valeur de l'auto dans 8 ans.
b) Dans combien d'années l'auto vaudra-t-elle moins de la moitié de sa valeur d'achat?

---

rép: a) 6812,26 $; b) dans 5 ans (4,265 ans)

exemple 3.4.11

intérêt composé

Que devient 1000 $ déposé pour 10 ans à 10 % d'intérêt composé, capitalisé

a) annuellement?
b) semestriellement?
c) trimestriellement?

Dans combien d'années le capital

d) doublera si la capitalisation se fait annuellement?
e) triplera si la capitalisation se fait semestriellement?

---

un capital placé à intérêt composé de 10 % par année rapporte à chaque année 10 % d'intérêt sur le capital de l'année précédente

on aura

dans 1 an: 1000 $ + 100 $ = 1100 $
dans 2 ans:1100 $ + 110 $ = 1210 $
dans 3 ans: 1210 $ + 121 $ = 1331 $
etc.

si la capitalisation est

***annuelle** alors un intérêt de 10 % est versé à la fin de chaque année*

***semestrielle** alors un intérêt de 10 % ÷ 2 = 5 % est versé à la fin de chaque période 6 mois*

***trimestrielle** alors un intérêt de 10 % ÷ 4 = 2,5 % est versé à la fin de chaque période de 3 mois*

rép: a) 2593,74 $; b) 2653,30 ; c) 2685,06
d) dans 8 ans (7,27 années) ; e) dans 12 ans (22,517 semestres)

exemple 3.4.12
rumeur

Durant une manifestation, un manifestant fait partir la rumeur qu'un groupe de contre-manifestants vient en leur direction. Supposons que chaque personne communique en une minute la rumeur à 3 personnes qui ne l'avaient pas encore entendu. En pratique la personne qui transmet la nouvelle le fait en des moments variés pendant l'intervalle de 1 minute. Nous supposerons que la nouvelle n'est communiquée qu'à la fin de chaque minute pour la solution du problème. S'il y a 1 000 000 de manifestants, dans combien de temps tous les manifestants seront au courant de la rumeur.

---

rép: dans 10 minutes (9,9657 min)

exemple 3.4.13
inventaire

Un quincaillier fait l'inventaire de ses ampoules électriques. Il vend mensuellement le tiers de ses ampoules et en achète 300 d'un grossiste à la fin de chaque mois. Au début de l'année, il avait 1000 ampoules électriques en stock.

a) Trouver le nombre d'ampoules à la fin de l'année.
b) Dans combien de mois aura-t-il 910 ampoules ou moins en stock?

Soit a_n le nombre d'ampoules électriques en stock après n périodes d'un mois.

il existe plusieurs autres phénomènes dont la croissance n'est pas linéaire ou exponentielle et qui peuvent utiliser le système général du théorème 3.4.1 comme modèle.

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n - \frac{1}{3}a_n + 300 \\ \\ a_0 = 1000 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 300 \\ \\ a_0 = 1000 \end{array}\right.$$

où $n \in \{ 0,1,2,3,4, ... \}$

Le système de récurrence correspond à celui du théorème 3.4.1 Les valeurs des constantes sont

$$A = \frac{2}{3}\ , B = 300 \text{ et } C = 1000$$

Étant donné que $A \neq 1$ alors

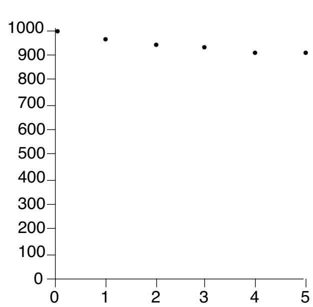
$$\begin{aligned}
a_n &= CA^n + B\left(\frac{1 - A^n}{1 - A}\right) \\
&= 1000\left(\frac{2}{3}\right)^n + 300\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}\right) \\
&= 1000\left(\frac{2}{3}\right)^n + 900\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \\
&= 1000\left(\frac{2}{3}\right)^n + 900 - 900\left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&= 100\left(\frac{2}{3}\right)^n + 900 \quad \text{où} \quad n \in \{0,1,2,3,4, \ldots\}
\end{aligned}$$

a) a_{12} correspond au nombre d'ampoules en stock dans un an.

$$\begin{aligned}
a_{12} &= 100\left(\frac{2}{3}\right)^{12} + 900 \\
&= 900{,}77 \quad \text{(901 ampoules)}
\end{aligned}$$

b) On cherche à trouver n tel que $a_n \leq 910$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad 100\left(\frac{2}{3}\right)^n + 900 &\leq 910 \\
100\left(\frac{2}{3}\right)^n &\leq 10 \\
\left(\frac{2}{3}\right)^n &\leq \frac{1}{10} \\
\log\left(\frac{2}{3}\right)^n &\leq \log\frac{1}{10} \\
n\left(\log\frac{2}{3}\right) &\leq \log\frac{1}{10} \\
n &\geq \frac{\log\frac{1}{10}}{\log\frac{2}{3}} \qquad \left(\log\frac{2}{3} < 0\right) \\
n &\geq 5{,}678 \quad \text{(dans 6 mois)}
\end{aligned}$$



exemple 3.4.14

Mme Laplante est une mordue des roses. Elle possède une magnifique roseraie derrière chez elle. Malheureusement à chaque printemps, elle perd en moyenne 20 % de ses rosiers. Afin de combler ses pertes, Mme Laplante se rend à chaque printemps chez son pépiniériste préféré et achète 8 rosiers. Actuellement, elle possède 24 rosiers.

a) Combien en aura-t-elle dans 5 ans?
b) Mme Laplante rêve de posséder un jour 3 douzaines de rosiers, croyez-vous qu'elle puisse réaliser son rêve et si oui, dans combien d'années?

---

rép: a) 35 rosiers (34,75 rosiers) ; b) dans 7 ans

exemple 3.4.15
annuité simple

Une personne verse chaque année pendant 4 ans, 1000 $ à une banque. La banque lui verse annuellement 10 % d'intérêt composé. Quelle sera la valeur du capital amassé si les versements se font

a) à la fin de chaque année?
b) au début de chaque année?

rép: a) 4641 $; b) 6105,10 $

exemple 3.4.16

remboursement d'un capital

Vous empruntez 1000 $ à une institution financière. Elle vous prête ce montant à 12 % d'intérêt composé mensuellement. À la fin de chaque mois vous devez rembourser 40$. Quelle somme devrez-vous dans 1 an?

rép: 619,52 $

exemple 3.4.17

calcul des versements d'un emprunt

Une personne désire acheter une auto au prix de 12 500 $ taxe comprise. N'ayant pas l'argent nécessaire, elle se dirige vers une Caisse Populaire qui accepte de financer cet achat à un taux de 12 % capitaliser mensuellement sur une période de 36 versements de fin de mois. Quel sera le montant des versements?

rép: 415,17 $

Exercices 3.4

1. Trouver la solution de chacun des systèmes suivants.

a) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n \\ a_0 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 6 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 3 \\ a_0 = -3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3 \\ a_0 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} a_{n+1} = -3a_n + 8 \\ a_0 = 4 \end{cases}$

j) $\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3} \\ a_0 = 1 \end{cases}$

2. Une compagnie déclare actuellement un profit de 16 000 $. Étant donné que les profits diminuent de 450 $ à chaque année, déterminer
   a) les profits qui seront enregistrés dans 8 ans,
   b) le nombre d'années nécessaire pour que les profits diminuent de moitié ou plus.

3. Une personne dépose 1500 $ dans un compte d'épargne d'une banque qui lui paie un intérêt simple de 12 % par année. Quelle sera la valeur de l'investissement dans 9 ans?

4. Vous achetez une automobile. La dépréciation (perte de valeur) de l'auto, à chaque année, est de 200 $ de moins que l'année précédente. Sachant que la dépréciation à la fin de la huitième année est de 600 $, trouver la dépréciation de l'auto lors de son achat.

5. Un homme au volant d'une automobile roule à 90 km/h (25 m/s). Il applique les freins et arrive à un arrêt complet en 20 secondes. Si la vitesse à laquelle il arrive à la fin de chaque seconde décroît d'une façon constante, trouver sa vitesse à la fin de la douzième seconde.

6. Quel capital doit-on placer à intérêt simple de 10 % par année pour que la valeur de ce capital soit de 5000 $ dans 12 ans?

7. Anatole se préoccupe depuis quelque temps de son apparence. Dernièrement ses cheveux se sont mis à tomber d'une façon alarmante; il ne lui reste que deux poils sur la tête. Désespéré, Anatole se rend à une clinique capillaire. On lui propose un traitement qui est sensé tripler le nombre de ses cheveux à chaque semaine. Combien Anatole aura-t-il de cheveux sur la tête dans 3 mois?

8. Un chercheur injecte à une souris en parfaite santé, une cellule du cancer et observe les résultats. Après quelques jours, il constate que le nombre de cellules cancéreuses quadruple chaque jour.
   a) Quel sera le nombre de cellules cancéreuses 5 jours après l'injection?
   b) Si nous supposons que 1 000 000 de cellules cancéreuses provoquent la mort de la souris et si de plus, il existe un traitement qui tue les cellules cancéreuses chez la souris, quel est le délai maximum avant qu'un premier traitement soit administré pour garder la souris en vie?

9. On injecte à une personne 5 unités d'un certain vaccin. À chaque heure, la quantité active du vaccin présente dans le corps humain est le tiers de celle présente l'heure précédente. Quelle est la quantité active présente 4 heures après l'injection?

10. Lorsqu'on laisse tomber une balle de golf, elle rebondit au 3/5 de son point de départ. Si on laisse tomber la balle d'une hauteur de 10 mètres, à quelle hauteur s'élèvera la balle au sixième rebond?

11. Le nombre d'étudiants d'une université augmente de 3 % à chaque année. S'il y avait 10 000 étudiants inscrits au début de 1990,
    a) combien y en aura-t-il au début de l'an 2000?
    b) en quelle année, les inscriptions seront-elles plus du double de celles de 1990?

12. La population mondiale s'élevait à 5,3 milliards d'habitants au début de 1990 soit une augmentation de 92 millions d'habitants en un an (annuaire démographique de l'ONU pour 1990). Ce chiffre représente une croissance démographique annuelle de 1,7 %. On estime que l'accroissement de la population mondiale continuera à ce rythme pour les trente prochaines années.
    a) Quelle sera la population mondiale en l'an 2000?
    b) En quelle année, la population mondiale sera-t-elle d'au moins 8 milliards d'habitants?

13. Un homme achète une auto au montant de 20 000 $. La dépréciation de la valeur de l'auto est de 10 % par année.
    a) Calculer la valeur de l'auto après 5 ans?
    b) Dans combien d'années, la valeur de l'auto sera-t-elle inférieure à la moitié de sa valeur d'achat?

14. Le dixième d'une substance radioactive se désintègre à chaque heure. Au point de départ, il y a 10 mg de substance. Trouver
    a) la quantité qui reste après 6 heures,
    b) le nombre d'heures nécessaires pour qu'au moins la moitié de la substance soit désintégrée «demi-vie de la substance».

15. Une pompe aspire 1/5 de l'air d'une cloche à vide à chaque coup de piston.
    a) Quel pourcentage de l'air initial demeure dans la cloche après le 4e coup de piston?
    b) Quelle est le nombre minimal de coups qu'il faudra pour que la cloche soit vidée d'au moins les 2/3 de son contenu initial?

16. Quel est l'investissement le plus rentable sur une période de 10 ans; placer 5000 $ à 18 % d'intérêt simple ou placer 5000 $ à 11 % d'intérêt composé annuellement?

17. Un père de famille place à la naissance de son fils, une somme de 5000 $ à intérêt composé de 5 %, capitalisé mensuellement. Quelle somme le fils touchera-t-il à son 18e anniversaire de naissance?

18. Combien un père doit-il déposer à la naissance de sa fille pour qu'elle soit en possession de 20 000 $ à son 16e anniversaire de naissance si le dépôt porte un intérêt composé de 7 % par année, capitalisé semestriellement?

19. Calculer le temps nécessaire pour qu'un capital double s'il est placé à 12 % d'intérêt composé
    a) annuellement,
    b) mensuellement.

20. La semence d'une plante produit 3 semences par année. En supposant que toute nouvelle semence ainsi que les semences déjà existantes produiront aussi 3 autres semences en une année alors combien y aura-t-il de semences la cinquième année, s'il y a 2 semences au point de départ?

21. Un pépiniériste ramène d'un voyage une plante d'une espèce rare. Cette plante produit 2 nouvelles plantes identiques à chaque année. En supposant que toute nouvelle plante produira elle aussi 2 autres plantes en une année et qu'en moyenne 75 % des nouvelles plantes survivent, combien y aura-t-il de plantes la dixième année?

22. Un astronaute revenant de la planète Mars rapporte un virus extraterrestre et déclenche une épidémie. Supposons que dès qu'une personne a contacté la maladie, elle la communique indéfiniment à d'autres personnes. Supposons de plus que le nombre moyen par jour de personnes qui attrapent la maladie est la moitié du nombre de personnes déjà malades. Combien de personnes seront malades une semaine après l'arrivée de l'astronaute?

23. Jean reçoit la lettre suivante.

    « Cher Jean,

    Si tu te conformes aux conditions ci-dessous, tu contribueras à ce que toi et plusieurs autres gagniez 40 $.

    a) D'abord, envoie 10 $ à la personne de qui tu as reçu la lettre.
    b) Ensuite, envoie une copie exacte à 5 autres personnes, lesquelles t'enverront chacune 10 $.

    Sincèrement »

    Cette lettre fait partie d'une chaîne de lettres. Si nous supposons que chaque personne qui reçoit une telle lettre effectue ce qu'on lui demande
    a) trouver le nombre de personnes qui recevront une lettre à l'échelon 8,
    b) trouver le nombre de personnes ayant participé à la chaîne de lettre du début jusqu'à l'échelon 8.

24. Dans certaines situations demandant une action rapide, on utilise la chaîne téléphonique comme procédé pour transmettre un message à un nombre relativement élevé d'individus. Un premier individu transmet le message par téléphone à un certain nombre de personnes. Ces dernières retransmettent le message à un même nombre de personnes. La chaîne continue ainsi jusqu'à ce que tous soient au courant du message. Supposons que l'on doit transmettre un message et que l'on procède par chaîne téléphonique. Un premier individu contacte 3 personnes, ces 3 personnes en contactent 3 autres et ainsi de suite. On pose comme hypothèse qu'une personne peut en contacter 3 autres en un maximum de six minutes.

    a) Combien de personnes seront contactées à la septième périodes de six minutes?
    b) Combien de personnes seront au courant du message après une heure?

25. Patrick possède un dépanneur. À chaque semaine il vend 25 % de son stock de "VIN MAISON". Au début de la semaine il avait sur ses tablettes 70 bouteilles de cette marque. À chaque fin de semaine, il commande deux douzaines de bouteilles. Combien Patrick aura-t-il de bouteilles sur ses tablettes dans 5 semaines?

26. Le Ministère des Pêcheries estime à 125 000, le nombre de truites dans un certain lac. L'expérience a démontré que dans ce lac, le nombre de truites augmente de 50 % lors de la période de reproduction. La pêche y est permise au printemps et le nombre de truites pêchées à cette période est de 65 000.

    a) Quel sera le nombre de truites dans ce lac dans 5 ans?
    b) Dans combien d'années, le lac sera-t-il vidé de ses truites?

27. À chaque année, la province de Québec perd 1 % de ses médecins (retraite, décès, émigration, etc.). Par ailleurs, les universités québécoises forment annuellement en moyenne 500 nouveaux médecins. Si aujourd'hui, on compte 30 000 médecins actifs au Québec,

    a) quel sera le nombre de médecins actifs au Québec dans 10 ans?
    b) combien devra-t-on former de nouveaux médecins par année pour que dans 10 ans on ait au moins 35 000 médecins actifs au Québec?

28. Caroline veut s'acheter dans 5 ans une caméra assez dispendieuse. Elle dépose 10 $ au début de chaque mois dans son compte de banque. Si la banque lui verse 12 % d'intérêt composé mensuellement, combien aura-t-elle dans 5 ans?

29. Benoît est âgé de 23 ans et dépense en moyenne 2000 $ par année pour sa consommation de cigarettes. Si au lieu de s'adonner à cette habitude, il dépose à la banque 1000 à la fin de chaque semestre, combien accumulera-t-il à l'âge de 60 ans si son placement lui rapporte 10 % d'intérêt composé capitalisé semestriellement?

30. Quel est l'investissement le plus avantageux dans 10 ans?

calculer la valeur de chacun des investissements dans 10 ans

    a) placer 1000 $ à intérêt simple de 11 % par année;
    b) placer 1000 $ à intérêt composé de 8 % par année capitalisé trimestriellement;
    c) placer 150 $ à la fin de chaque année à intérêt composé de 9 % par année, capitalisé annuellement;
    d) placer 9 $ au début de chaque mois à intérêt composé de 12 % par année, capitalisé mensuellement.

31. Julie vient de gagner 20 000 $ à la LOTTO 6/49. Elle décide de placer son argent à la banque. Si elle est assurée d'obtenir un intérêt composé de 10 % par année capitalisé annuellement pour toute la durée de son placement,

    a) que deviendra son capital dans 20 ans si elle retire 1000 $ à la fin de chaque année?
    b) que deviendra son capital dans 20 ans si elle retire 2000 $ à la fin de chaque année?
    c) si elle désire faire 20 voyages avec cet argent, quel montant peut-elle retirer à la fin de chaque année?

32. Vous voulez acquérir une propriété de 100 000 $. Ne disposant que de 10 000 $, vous devez emprunter 90 000 $. Le taux d'intérêt de cet emprunt est de 12 % capitalisé mensuellement. Si la durée de l'emprunt est de 25 ans, calculer le montant des mensualités que vous aurez à payer à la fin de chaque mois pour devenir propriétaire.

33. Un individu emprunte une somme de 5000 $ à un de ses associés. Il s'engage à lui verser 400 $ à la fin de chaque trimestre. Le taux d'intérêt utilisé pour les besoins de l'emprunt est de 12 % capitalisé trimestriellement. Deux ans après, notre homme décide de rembourser par un paiement final le solde de sa dette. On vous demande de calculer ce paiement final.

34. Un homme vient d'avoir 40 ans et envisage la possibilité d'acquérir à sa retraite un condominium à Fort Lauderdale en Floride. Le prix actuel du genre de condominium désiré est de 60 000 $. Notre homme estime que le coût de construction dans l'état de Floride augmentera à un rythme de 6 % par année. Il entrevoit prendre sa retraite à l'âge de 55 ans et prévoit d'ici là investir à la fin de chaque année un montant d'argent. S'il obtient un intérêt sur son placement de 9 % capitalisé annuellement, quel devrait être le montant annuel de placement de notre homme s'il désire réaliser son projet?

estimer d'abord le prix du condominium à la retraite

Réponses aux exercices 3.4

1. a) $a_n = 2 + 3n$
   b) $a_n = 5(3^n)$
   c) $a_n = 1$
   d) $a_n = 2 - 2(4^n)$
   e) $a_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   f) $a_n = 4(2^n) - 3$
   g) $a_n = 3 - 6(2^n)$
   h) $a_n = 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
   i) $a_n = 2 + 2(-3)^n$
   j) $a_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$
2. a) 12 400 $ b) 18 ans
3. 3120 $
4. 2200 $
5. 10 m/s
6. 2272,73 $
7. 1 062 882
8. a) 1024 b) moins de 10 jours
9. 0,0617 unité
10. 0,467 m
11. a) 13 439 b) en 2014
12. a) 6 273 146 100 h b) en 2015
13. a) 11 809,80 $ b) dans 7 ans
14. a) 5,31 mg b) 7 heures
15. a) 40,96 % b) 5 coups de piston
16. 11 % (14 197,11 $ contre 14 000,00 $)
17. 12 275,04 $
18. 6651,79 $
19. a) 7 ans b) 6 ans

20.		2048 semences		
21.		9537 plantes		
22.		17 personnes		
23.	a)	390 625 personnes	b)	488 281 personnes
24.	a)	2187 personnes	b)	88 573 personnes
25.		90 bouteilles		
26.	a)	92 031 truites	b)	dans 9 ans
27.	a)	31 912 médecins	b)	823 ou plus
28.		834,86 $		
29.		719 670,21 $		
30.	a)	2100.00 $	c)	$\boxed{2278,94\ \$}$
	b)	2208,04 $	d)	2100,05 $
31.	a)	77 275 $	c)	2349,19 $
	b)	20 000 $		
32.		947,90 $		
33.		2776,92 $		
34.		4897,45 $		

Exercices de révision

1. Un remonte-pente grimpe
   - 100 mètres durant la première minute,
   - 90 mètres durant la deuxième minute,
   - 80 mètres durant la troisième minute,
   - 70 mètres durant la quatrième minute, etc.

   Dans combien de minutes sera-t-il à 540 mètres du point de départ?

2. On imprime à un objet suspendu à une corde un mouvement d'oscillation. À la première oscillation, l'objet parcourt une distance de 20 cm et, pour les oscillations subséquentes, la distance parcourue est toujours de 2 % inférieure à la précédente. Dans ces conditions,
   a) trouver la distance parcourue par l'objet à chacune des 5 premières oscillations,
   b) trouver la distance totale qu'aura parcouru l'objet après la dixième oscillation.

3. Philippe est un finissant au cégep Maisonneuve. Il termine son cours en technique policière et se voit immédiatement offrir un poste à Montréal. Son salaire est de 35 000 $ à sa première année. Il estime que son salaire devrait augmenter de 5 % par année pour plusieurs années à venir. Si son estimation s'avère vraie tout au long de sa carrière et si notre homme prendra sa retraite dans 40 ans, combien aura-t-il gagné en salaire durant toute sa carrière?

4. La population du Québec était de 7 000 000 d'habitants en 1985. Si le taux d'accroissement de la population se maintient à 1 % par année pour plusieurs années à venir alors
   a) quelle sera la population du Québec en l'an 2000?
   b) en quelle année la population atteindra-t-elle 10 000 000 d'habitants?

5. La croissance d'un phénomène est définie par le système suivant.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{5}{2} a_n \\ a_0 = 8 \end{cases} \qquad \text{où } n \in \{0,1,2,3,4, \dots\}$$

   a) Trouver les 5 premiers termes de la suite associée au système.
   b) Trouver la solution du système.
   c) Évaluer: $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$.

6. Quel est le placement le plus avantageux après 7 ans?
   a) placer 100 $ à la fin de chaque mois à intérêt composé de 15 % capitalisé mensuellement,
   b) placer 360 $ au début de chaque trimestre à intérêt composé de 10 % capitalisé trimestriellement.

7. Quel capital doit-on placer maintenant à intérêt composé de 12 % capitalisé semestriellement pour pouvoir acheter une automobile qui se vendra 15 000 $ dans 5 ans?

8. On offre au gagnant d'une loterie le choix suivant

   1 000 000 $ comptant ou,
   175 000 $ à la fin de chaque année pour 10 ans.

   Le gagnant est en mesure de placer son argent à un taux d'intérêt de 12 % capitalisé annuellement pour les 10 prochaines années. Quel devrait être le choix du gagnant?

9. En 1996, dans la région de Moscou, on a dénombré 6000 sangliers. Des analyses ont démontré que dans les régions où il n'y a pas de chasse, la population double chaque année.
   a) Combien y aura-t-il de sangliers dans 8 ans si la chasse est interdite durant cette période?
   b) Combien y aura-t-il de sangliers dans 8 ans si on permet la chasse au sanglier en limitant celle-ci à 3000 bêtes tuées par année?
   c) Combien de sangliers devraient être tués chaque année pour que le nombre de bêtes soit de 10 000 ou moins dans 5 ans?

Réponses aux exercices de révision

1. 9 minutes

2. a) 20 ; 19,6 ; 19,21 ; 18,82 ; 18,44
   b) 182,93 cm

3. 4 227 992,10 $

4. a) 8 126 783 habitants   b) en l'an 2021

5. a) 8 ; 20 ; 50 ; 125; 312
   b) $a_n = 8(5/2)^n$ où $n \in \{0,1,2,3, \dots\}$
   c) 127 151,24

6. a) 14 712,90 $ b) $\boxed{15\ 068{,}27\ \$}$

7. 8 375,92 $

8. 1 000 000 $ comptant

9. a) 1 536 000 sangliers   c) plus de 5871
   b) 771 000 sangliers