4.1 Suites

On verra dans ce chapitre que certains nombres peuvent être exprimés à l'aide d'une somme ayant une infinité de termes.

On sait que

$$\frac{1}{3} = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \ldots$$

On peut aussi montrer à l'aide d'un carré dont l'arête mesure 1 unité (voir la figure 4.1.1) que

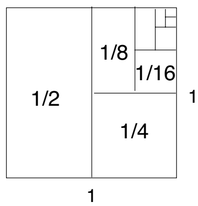


figure 4.1.1

l'aire du carré est de 1 unité^2, on peut arriver au même résultat en utilisant le raisonnement suivant; on divise le carré en deux régions d'aires égales puis, une des deux régions est divisée à nouveau en deux, on continue de la même façon ce découpage indéfiniment, la somme des aires de ces régions donnera de toute évidence 1 unité^2

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$$

Il en est de même pour une multitude d'autres nombres. On découvrira par exemple que

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

ou encore que

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Ce type de problème est à l'origine de l'étude des *séries* (sommes ayant une infinité de termes). Mais avant de nous intéresser aux séries, penchons nous d'abord sur une autre notion, celle des *suites*.

définition 4.1.1

suite

Une *suite* de nombres réels

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ \ldots \ , a_n, \ldots$$

est une fonction qui associe à chaque nombre entier positif n un nombre réel a_n .

n^e terme d'une suite

Le terme a_n est appelé le *n^e terme de la suite* ou le *terme général de la suite*. Il est parfois utile de représenter une suite par la formule de son n^e terme. Si a_n désigne le n^e terme d'une suite, $\{ a_n \}$ désignera la suite correspondante.

exemple 4.1.1

Suite	Suite en extension
$\{ n^2 + 1 \}$	2, 5, 10, 17, 26, ... , $n^2 + 1$, ...
$\left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} \right\}$	
$\left\{ \frac{1}{n!} \right\}$	

par définition

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n - 1) \times n$
et $0! = 1$

où n est un entier supérieur à 1

exemple 4.1.2

Suite	n^e terme
$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}, \ldots$	$a_n = \frac{2n+1}{2n}$
$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \ldots$	
$-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, -\frac{6}{243}, \ldots$	

On peut désigner une suite de plusieurs façons différentes.
Par exemple la suite

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

peut être définie de l'une ou l'autre des façons suivantes:

- la suite $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$
- la suite $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$
- la suite dont le terme général est $\frac{1}{2^n}$

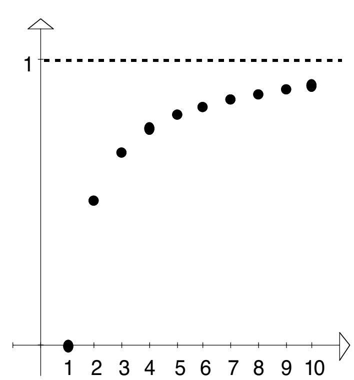
représentation graphique d'une suite

On peut représenter les termes d'une suite en plaçant les points (n, a_n) de la suite dans un plan cartésien.

exemple 4.1.3

Représenter graphiquement la suite $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ sur un axe horizontal.

La suite en extension est $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$



Si on examine le graphique précédent, on constate que les termes de la suite s'approchent de plus en plus de la valeur 1 lorsque n augmente.

On dira que la suite $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$ converge vers 1.

définition 4.1.2

convergence d'une suite

La suite $\{a_n\}$ converge (ou est convergente) si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad (L \in \mathbf{R})$$

Autrement la suite diverge (ou est divergente).

La notation

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

signifie qu'en prenant n suffisamment grand, les termes de la suite seront aussi près que l'on désire de la quantité L.

Notons que cette définition de la limite d'une suite est à peu de chose près semblable à la définition que l'on a déjà présentée de la limite d'une fonction réelle à l'infini. La seule différence est que la variable n doit être entière.

exemple 4.1.4

Étudier la convergence de la suite $\left\{\sqrt[n]{e}\right\}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e} = \lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^{1/\infty} = e^0 = 1$$

La suite converge vers 1.

exemple 4.1.5

Étudier la convergence de la suite $\left\{\dfrac{\ln n}{n}\right\}$

à priori, on ne peut pas employer la règle de l'Hospital puisque la fonction utilisée n'est pas une fonction réelle, on peut néanmoins contourner la difficulté en utilisant la fonction réelle

$f(x)$ telle que $f(n) = a_n$

$(\forall\ n \in \mathbf{Z}^+)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{IND.}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{RH}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

La suite converge vers 0.

Lorsqu'on aura à utiliser la règle de l'Hospital, on le fera sans transformer au préalable la variable n en x.

exemple 4.1.6

Étudier la convergence de la suite $\left\{ \dfrac{2^n}{n^2} \right\}$

---

rép: la suite diverge (∞)

exemple 4.1.7

Étudier la convergence de la suite $\left\{ n \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \right\}$

---

rép: la suite converge vers π

Dans certains cas, le terme général de la suite ne pourra être associé à aucune fonction réelle.

exemple 4.1.8

Étudier la convergence de la suite $\{ (-1)^n \}$

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n = (-1)^\infty = ?$$

La suite en extension est $\{ -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , \ \dots \ , (-1)^n , \ \dots \ \}$

Puisque les termes de rang impair valent toujours -1 tandis que les termes de rang pair valent toujours 1, il est clair que

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \text{ n'existe pas}$$

et que la suite diverge.

Pour faire l'étude de la convergence d'une suite dont les signes alternent (suite alternée), on utilisera la proposition suivante.

proposition 4.1.1

Soit la *suite alternée* $\{(-1)^n b_n\}$ où $b_n > 0 \ \forall\ n \geq N$

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ alors la suite converge vers 0.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ alors la suite diverge.

démonstration

Lorsque $b_n > 0 \ \forall\ n \geq N$,

a) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n b_n = 0 \Rightarrow \{(-1)^n b_n\}$ converge vers 0

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n b_n \ (\nexists) \Rightarrow \{(-1)^n b_n\}$ diverge

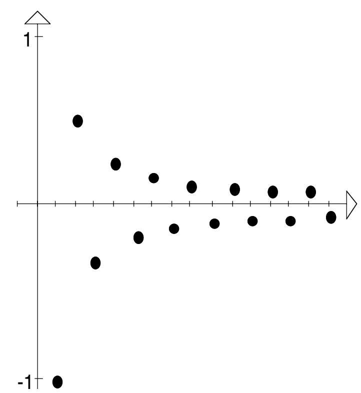
exemple 4.1.9

Étudier la convergence de la suite $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$

La suite converge vers 0.



exemple 4.1.10

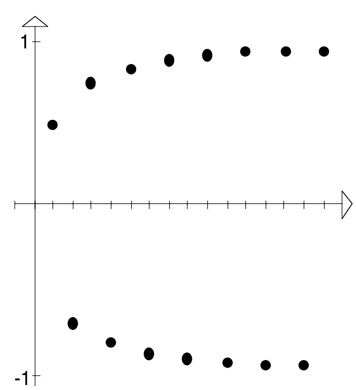
Étudier la convergence de la suite $\left\{(-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}\right\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty}$ IND.

$\overset{RH}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} \ \nexists$

La suite diverge.



Exercices 4.1

1. Donner les cinq premiers termes de chacune des suites ci-dessous.

a) $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$

b) $\{\ 3(-2)^{n-1}\ \}$

c) $\left\{\frac{3n-2}{5n}\right\}$

d) $\{\ 5\ \}$

e) $\left\{(-1)^n\ \frac{2}{n!}\right\}$

f) $\{\ 2 + \cos n\pi\ \}$

2. Trouver le terme général de chacune des suites.

a) $3 , 9 , 27 , 81 , 243 , \ldots$

b) $1 , 4 , 9 , 16 , 25 , \ldots$

c) $-3 , 3 , -3 , 3 , -3 , \ldots$

d) $\frac{2}{3} , \frac{4}{5} , \frac{8}{9} , \frac{16}{17} , \frac{32}{33} , \ldots$

e) $\frac{1}{2} , -\frac{3}{4} , \frac{5}{6} , -\frac{7}{8} , \frac{9}{10} , \ldots$

f) $-\frac{3}{5} , \frac{4}{10} , -\frac{5}{15} , \frac{6}{20} , -\frac{7}{25} , \ldots$

g) $1 , 4 , 7 , 10 , 13 , \ldots$

h) $0 , 2 , 0 , 2 , 0 , \ldots$

3. Déterminer si les suites ci-dessous convergent ou divergent. Si elles convergent, trouver vers quelle valeur.

a) $\frac{7}{11} , \frac{9}{21} , \frac{11}{31} , \frac{13}{41} , \frac{15}{51} , \ldots$

b) $1 , \frac{4}{3} , \frac{9}{5} , \frac{16}{7} , \frac{25}{9} , \ldots$

c) $\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$

d) $\left\{(-1)^n \frac{2n}{1+3n}\right\}$

e) $\left\{(-1)^{n+1} \frac{n^2}{1+n^3}\right\}$

f) $\left\{\frac{n!}{(n-2)!}\right\}$

g) $\{\ \text{arctg}\ 2n\ \}$

h) $\{\ n\ 2^{-n}\ \}$

i) $\{\ \ln(2n + 1) - \ln n\ \}$

j) $\left\{ \dfrac{\sqrt{n + 2}}{\sqrt{9n + 1}} \right\}$

au problème 3. k), rationaliser le numérateur

k) $\{\ \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}\ \}$

l) $\left\{ 2n \sin\left(\dfrac{3}{5n}\right) \right\}$

m) $\{\ n^{1/n}\ \}$

n) $\left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \right\}$

4. Soit la suite

$$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ ,\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}\ ,\ \ldots$$

   a) Trouver le terme général de cette suite.
   b) Déterminer si la suite converge ou diverge et si elle converge, trouver vers quelle valeur.

5. Soit la suite

$$1\ ,\ r\ ,\ r^2\ ,\ r^3\ ,\ r^4\ ,\ \ldots$$

   Indiquer pour quelle(s) valeur(s) de $r \in \mathbf{R}$ la suite

   a) converge,
   b) diverge.

Réponses aux exercices 4.1

1. a) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$
   b) $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$
   c) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{7}{15}, \frac{1}{2}, \frac{13}{25}, \ldots$
   d) $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$
   e) $-2, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{60}, \ldots$
   f) $1, 3, 1, 3, 1, \ldots$

2. a) $\{3^n\}$
   b) $\{n^2\}$
   c) $\{(-1)^n 3\}$
   d) $\left\{\frac{2^n}{2^n + 1}\right\}$
   e) $\left\{(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2n}\right\}$
   f) $\left\{(-1)^n \frac{n+2}{5n}\right\}$
   g) $\{1 + 3(n - 1)\}$ ou $\{3n - 2\}$
   h) $\{1 + (-1)^n\}$

3. a) converge vers 1/5
   b) diverge (∞)
   c) converge vers 0
   d) diverge (n'existe pas)
   e) converge vers 0
   f) diverge (∞)
   g) converge vers $\pi/2$
   h) converge vers 0
   i) converge vers ln 2
   j) converge vers 1/3
   k) converge vers 0
   l) converge vers 6/5
   m) converge vers 1
   n) converge vers *e*

4. a) $a_n = 2^{(2^n - 1)/2^n}$
   b) la suite converge vers 2.

5. a) la suite converge lorsque $-1 < r \leq 1$
   b) la suite diverge lorsque $r > 1$ ou lorsque $r \leq -1$

4.2 Séries

Lorsqu'on additionne les termes d'une suite, on obtient une série infinie (ou simplement une série).

définition 4.2.1
série

Soit la suite $\{ a_n \}$ de nombres réels. La *série* associée à cette suite est représentée par l'expression

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ \dots\ + a_n + \dots$$

Il est important, à ce stade-ci, de ne pas confondre suite et série. Une suite c'est une liste ordonnée de nombres.

$$a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ \dots\ , a_n , \dots$$

confondre une suite et une série c'est un peu comme si on confondait un livre à ses pages

Une série c'est la somme d'une infinité de nombres.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ \dots\ + a_n + \dots$$

Bien qu'on additionne un nombre infini de termes, une série peut dans certains cas avoir une somme finie. Lorsque la somme de la série est finie, la série est dite *convergente*. C'est précisément cette notion de convergence qui sera l'objet principal de notre étude tout au long de la section.

La convergence d'une suite et la convergence d'une série sont deux notions différentes. Lorsqu'on étudie la convergence d'une suite, on veut savoir si *les termes* de la suite s'approchent d'une valeur précise au fur et à mesure que n augmente. La convergence d'une série porte plutôt sur la *somme des termes* de la série.

Ainsi la suite

$$\frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \frac{1}{32} , \dots , \left(\frac{1}{2}\right)^n , \dots.$$

converge vers 0 puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$

Mais la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$$

converge vers 1 car $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ (voir la figure 4.1.1 à la page 4.1)

Une autre façon de montrer que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = 1$$

est de considérer les sommes partielles de la série du haut.

on commence par considérer le premier terme de la série que l'on note s_1 puis la somme des deux premiers termes (s_2), la somme des trois premiers termes (s_3) ...

on obtient ainsi la suite des sommes partielles

s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 ...

$$s_1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$$

$$s_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \boxed{\frac{15}{16}}$$

$$s_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \boxed{\frac{31}{32}}$$

De toute évidence, en additionnant les n premiers termes de la série, on obtient

à l'aide des termes obtenus, on tente ensuite de découvrir s_n, le terme général de la suite

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Ces sommes partielles forment une suite, la suite $\{ s_n \}$ des sommes partielles de la série.

s_n correspond à la somme des n premiers termes de la série

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

si

$\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ existe dans **R**

alors

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$$

Puisque

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 1$$

La suite converge vers 1 et par conséquent,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots = 1$$

en pratique, la technique ne pourra être utilisée que dans de rares cas car le terme général de la suite des sommes partielles sera souvent presque impossible à trouver; on se servira néanmoins de cette méthode pour définir la notion de convergence d'une série

On peut donc à partir de la suite des sommes partielles d'une série déterminer si la série converge ou diverge. On doit d'abord trouver le terme général s_n de la suite des sommes partielles qui rappelons-le, correspond à la somme des n premiers termes de la série puis, étudier la convergence de cette suite. Si

$$\lim_{n \to \infty} s_n = S \quad \text{où } S \in \mathbf{R}$$

alors la série converge vers S. Autrement la série diverge.

définition 4.2.2
convergence d'une série

Soit la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$$

et $\{ s_n \}$ la suite des sommes partielles associée à la série. Si

$$\lim_{n \to \infty} s_n = S \quad \text{où} \quad S \in \mathbf{R}$$

alors la série converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Autrement la série diverge.

la série diverge lorsque $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \pm\infty$ ou $\nexists$

Lorsqu'on écrit $\sum a_n = S$, cela signifie qu'en additionnant suffisamment de termes, la somme de la série sera aussi près que l'on désire de la valeur S.

exemple 4.2.1

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et trouver sa somme.

rép: 1

exemple 4.2.2

Montrer que la série suivante diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Série géomérique

La série géométrique est probablement celle que l'on retrouve le plus souvent dans nos applications.

définition 4.2.3
série géométrique

Une série de la forme

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad (a \neq 0)$$

est une *série géométrique* de premier terme «a» et de raison «r».

caractéristique de la série géométrique

Le rapport de deux termes quelconques consécutifs d'une série géométrique est constant et toujours égal à sa raison «r».

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

exemple 4.2.3

Montrer que la série

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots$$

est une série géométrique et déterminer les valeurs de a et r.

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = \frac{48}{24} = \dots = 2 \text{ (une constante)}$$

La série est géométrique de raison r = 2 et son premier terme est a = 3.

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 3(2)^{n-1}$$

exemple 4.2.4

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{8}{2^n}$ est-elle géométrique?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^n \dfrac{8}{2^{n+1}}}{(-1)^{n-1}\dfrac{8}{2^n}} = \frac{(-1)^n\, 2^n\, 8}{(-1)^{n-1}\, 2^{n+1}\, 8} = -\frac{1}{2} \quad \text{(une constante)}$$

On a donc une série géométrique de raison $r = -\dfrac{1}{2}$ et son premier terme est $a = (-1)^{1-1}\dfrac{8}{2^1} = \dfrac{8}{2} = 4.$

exemple 4.2.5

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5}$ est-elle géométrique?

rép: non

proposition 4.2.1

$|r| < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$
$|r| \geq 1 \Rightarrow r \geq 1$ ou $r \leq -1$

La série géométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \begin{cases} \text{converge vers } \boxed{\dfrac{a}{1-r}} & \text{si } |r| < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } |r| \geq 1 \end{cases} \qquad (\text{ où } a \neq 0\ )$$

démonstration

Soit $\{ s_n \}$ la suite des sommes partielles associée à la série.

$$\begin{aligned} s_1 &= a \\ s_2 &= a + ar \\ s_3 &= a + ar + ar^2 \\ s_4 &= a + ar + ar^2 + ar^3 \\ &\ \vdots \\ s_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ \dots\ + ar^{n-1} \qquad (1) \end{aligned}$$

Puisque

$$r(s_n) = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ \dots\ + ar^{n-1} + ar^n \qquad (2)$$

En soustrayant les deux membres des équations (1) et (2) on obtient

$$s_n - r(s_n) = a - ar^n$$

$$s_n (1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$\Rightarrow \quad s_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)} \quad (r \neq 1)$$

Étant donné que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

$$= \left(\frac{a}{1 - r}\right) \lim_{n\to\infty} (1 - r^n) \begin{cases} \nexists & \text{si} \quad r \leq -1 \\ \dfrac{a}{1 - r} & \text{si} \quad |r| < 1 \\ \pm\infty & \text{si} \quad r > 1 \end{cases}$$

et que pour r = 1, la série diverge (voir à gauche) alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \begin{cases} \text{converge vers } \dfrac{a}{1 - r} & \text{si} \quad |r| < 1 \\ \text{diverge} & \text{si} \quad |r| \geq 1 \end{cases}$$

lorsque r = 1 la série devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(1)^{n-1} = a + a + a + a + \ldots$$

et

$s_1 = a$
$s_2 = 2a$
$s_3 = 3a$
:
$s_n = na$

puisque

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} na = \pm\infty$$

on conclut que la série diverge

exemple 4.2.6

Montrer que la série géométrique

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \frac{80}{81} - \ldots$$

converge et trouver sa somme.

Trouvons d'abord la raison r de la série géométrique.

$$r = \frac{-\frac{10}{3}}{5} = \frac{\frac{20}{9}}{-\frac{10}{3}} = \frac{-\frac{40}{27}}{\frac{20}{9}} = \frac{\frac{80}{81}}{-\frac{40}{27}} = \ldots = -\frac{2}{3}$$

La raison de la série est $r = -\frac{2}{3}$ et son premier terme est a = 5.

Puisque $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la série converge et sa somme est

$$\frac{a}{1 - r} = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

exemple 4.2.7

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{4^{n-1}}$ est géométrique et trouver sa somme si elle converge.

---

rép: 144

exemple 4.2.8

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}\, 3^{1-n}$ est géométrique et trouver sa somme si elle converge.

Cette fois-ci, plutôt que de vérifier le rapport de deux termes consécutifs, nous allons montrer que la série peut être exprimée sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

En transformant le terme général, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}\, 3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^2\right)^n 3^{-(n-1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

La série a la forme d'une série géométrique de raison $r = \frac{4}{3}$

et son premier terme est $a = 4$.

Puisque que $|r| = \frac{4}{3} > 1$ on conclut que la série diverge.

exemple 4.2.9

Écrire le nombre rationnel $3,\overline{2}$ = 3,222 222 22... comme un quotient de deux nombres entiers.

utiliser l'égalité suivante pour résoudre le problème

3,222 222 22.. =

$$3 + \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \ldots$$

rép: $\frac{29}{9}$

réindexation

On peut réindexer une série sans en changer les termes.

- Pour augmenter de r unités la valeur initiale de la variable fictive n, il suffit de remplacer le n du terme général a_n par (n - r).
- Pour diminuer de r unités la valeur initiale de la variable fictive n, il suffit de remplacer le n du terme général a_n par (n + r).

La série $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ pourra s'écrire de l'une ou l'autre des façons suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad ; \quad \sum_{n=1+r}^{\infty} a_{n-r} \quad ; \quad \sum_{n=1-r}^{\infty} a_{n+r}$$

Par exemple,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$$

peut être notée:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-4}} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$$

exemple 4.2.10

Montrer que la série $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{e^{n-3}}$ converge et trouver sa somme.

Réécrivons cette série sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{e^{n-3}} = \sum_{n=4-3}^{\infty} \frac{1}{e^{(n+3)-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

La série est géométrique avec $a = \frac{1}{e}$ et $r = \frac{1}{e}$.

Puisque $|r| = \frac{1}{e} < 1$, la série converge et sa somme est

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{e}}{\frac{e-1}{e}} = \frac{1}{e-1} = 0{,}582$$

Exercices 4.2.1

1. En utilisant les sommes partielles de chacune des séries, trouver leur somme si elle existe.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - 1}{(n^2 + 1)(n^2 - 2n + 2)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n + 1)(4n - 3)}$

2. Soit la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\{s_n\}$ la suite des sommes partielles associée à cette série. Si $s_n = \dfrac{n}{2n + 3}$ alors trouver

on obtient a_8 en faisant la somme des 8 premiers termes moins la somme des 7 premiers termes de la série

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{8} a_n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

c) a_8

3. Parmi les séries suivantes, identifier lesquelles sont des séries géométriques. Déterminer les valeurs de a et r des séries géométriques.

a) $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} + \dots$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{13^{n-1}}$

b) $\dfrac{9}{2} - 3 + 2 - \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{9} - \dots$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,(2)^n$

c) $2 + 4 + 2 + 4 + 2 + \dots$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{5}$

4. Déterminer si les séries géométriques suivantes convergent ou divergent. Trouver la somme des séries convergentes.

a) $12 + 6 + 3 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} + \dots$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5}{4^n}$

d) $\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 4 + 4\sqrt{2} - \ldots$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\left(3^{n+1}\right)}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{4^{n-1}}$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^n}{2^{n-1}}$

i) $\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2-n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{n}{3}}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} (0,1)^{2n-1}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n-2}}{4^{2n-3}}$

5. Écrire chaque nombre irrationnel comme un quotient de deux nombres entiers.

a) $0,\overline{7}$

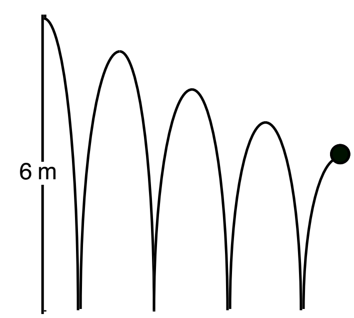
b) $0,\overline{08}$

c) $1,2\overline{12}$

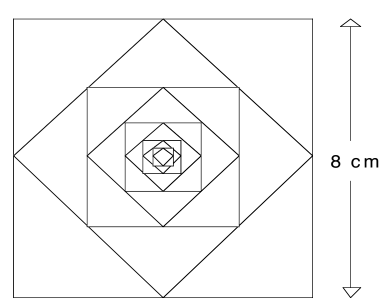
d) $2,\overline{027}$

la distance totale parcourue par la balle correspond à la somme des distances qu'elle parcoure <u>en descendant</u> et <u>en remontant</u>

6. Une balle de caoutchouc rebondit toujours à une hauteur équivalent à 90 % de la hauteur d'où elle est tombée. On laisse tomber cette balle d'une hauteur de 6 m. Si la balle rebondit indéfiniment, quelle sera la distance totale parcourue ?



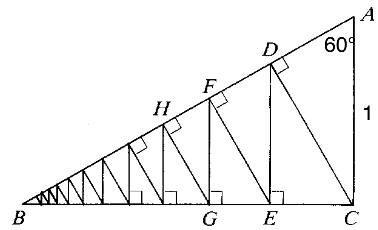
7. Considérons un carré de 8 cm de côté. Si l'on joint les milieux des côtés de ce carré, on forme un nouveau carré. En joignant les milieux des côtés de ce deuxième carré, on en forme un troisième et ainsi de suite. On obtient de la sorte une infinité de carrés. Calculer la somme



a) des périmètres de tous les carrés.
b) des aires de tous les carrés.

8. Un triangle rectangle ABC est tel que $|AC| = 1$ et $\angle A = 60°$. Si $CD \perp AB$, $DE \perp BC$, $EF \perp BA$ et que ce procédé continue indéfiniment, trouver la longueur totale de toutes les droites perpendiculaires tracées

$$|CD| + |DE| + |EF| + \ldots$$



9. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$

Bien que la série ne soit pas géométrique, elle est constituée d'une infinité de séries géométriques convergentes. Inspirez-vous du développement suivant pour solutionner le problème.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \ldots}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$$

etc...

Réponses aux exercices 4.2.1

1. a) $\frac{1}{2}$ d) diverge ($-\infty$)

   b) 1 e) 1

   c) diverge (∞) f) $\frac{1}{4}$

2. a) $\frac{8}{19}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{323}$

3. a) la série est géométrique ; $a = \frac{1}{12}$ et $r = 2$

   b) la série est géométrique ; $a = \frac{9}{2}$ et $r = -\frac{2}{3}$

   c) la série n'est pas géométrique

   d) la série est géométrique ; $a = 2$ et $r = \frac{1}{13}$

   e) la série n'est pas géométrique

   f) la série est géométrique ; $a = \frac{1}{5}$ et $r = -3$

4. a) converge vers 24 g) converge vers $-\frac{108}{7}$

   b) converge vers 15 h) diverge

   c) converge vers 1 i) converge vers $\frac{4}{3}$

   d) diverge j) converge vers 1

   e) converge vers $\frac{1}{4}$ k) converge vers $\frac{1000}{99}$

   f) converge vers $\frac{e}{e-1}$ l) diverge

5. a) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{40}{33}$

   b) $\frac{8}{99}$ d) $\frac{75}{37}$

6. 114 m

7. a) $\frac{64}{2-\sqrt{2}}$ cm $= 32(2+\sqrt{2})$ cm b) 128 cm^2

8. $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,(2+\sqrt{3})$

Série harmonique

définition 4.2.4

série harmonique

nommé ainsi par les Grecs vu le rôle de 1/n dans l'harmonie musicale

On appelle *série harmonique*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

proposition 4.2.2

La série harmonique est divergente.

démonstration

c'est vers l'an 1360 que le mathématicien français Nicolas d'Oresme montra la divergence de la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

le résultat est loin d'être évident; si on additionne les 1000, 10 000 ou 50 000 premiers termes de la série harmonique, on obtient

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n} = 7{,}4855$$

$$\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{n} = 9{,}7876$$

$$\sum_{n=1}^{50000} \frac{1}{n} = 11{,}3970$$

la série diverge très lentement!

En additionnant 1/2 indéfiniment, la somme deviendra aussi grande que l'on désire . En effet si $\{ s_n \}$ est la suite des sommes partielles associée à la série de droite alors

$$s_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad s_2 = \frac{2}{2} \quad ; \quad s_3 = \frac{3}{2} \quad ; \quad s_4 = \frac{4}{2} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad s_n = \frac{n}{2}$$

Puisque que $\displaystyle \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} = \infty$

la série de droite a une somme infinie et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots > \infty$$

On conclut que la série harmonique diverge.

Série semi-harmonique

définition 4.2.5

série semi-harmonique

On appelle *série semi-harmonique*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

proposition 4.2.3

La série semi-harmonique est convergente.

Contentons-nous de justifier la proposition. Pour cela, représentons sur une droite la suite $\{s_n\}$ des sommes partielles associée à la série (figure 4.2.2).

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 - \frac{1}{2}$$
$$s_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$s_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$s_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$
$$s_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

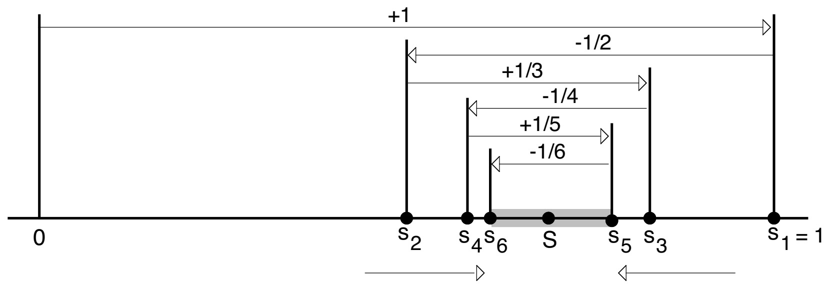


figure 4.2.2

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} < 1$$

On remarque que les termes de rang pair de la suite $\{s_n\}$ vont en croissant et sont toujours supérieurs à 0 tandis que les termes de rang impair vont en décroissant et sont toujours inférieurs à $s_1 = 1$. Puisque les termes de la série semi-harmonique *s'approchent de 0* au fur et à mesure que n augmente et que $s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n}$, il est vraisemblable de penser que les termes de rang pair et les termes de rang impair vont converger vers une valeur commune S et que conséquemment, la série semi-harmonique convergera vers la valeur S.

nous verrons à la section 4.3 que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 \approx 0{,}6931$$

Bien qu'on ne connaisse pas la valeur de S, on sait qu'elle se situe entre 0 et 1 (la valeur du premier terme de la série).

Les séries convergentes possèdent certaines propriétés. On peut additionner des séries convergentes, soustraire des séries convergentes ou encore multiplier une série convergente par une constante. La série ainsi obtenue sera elle aussi convergente.

proposition 4.2.4
algèbre des séries

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sont deux série convergentes alors

a) $\sum_{n=1}^{\infty} c(a_n)$ converge aussi et $\sum_{n=1}^{\infty} c(a_n) = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge aussi et $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ converge aussi et $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

corollaire 4.2.4

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge alors $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ diverge $(c \neq 0)$

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

alors $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ divergent.

remarque

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge alors $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ peut aussi bien converger que diverger.

Par exemple,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ divergent mais $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{-1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ converge

exemple 4.2.11

Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} - 3^{-n})$ converge et trouver sa somme.

---

on réindexe la série à n = 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} - 3^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-(n-1)} - 3^{-(n-1)}\right)$$

par la proposition 4.2.4 (si chacune des série converge)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

les deux séries sont des séries géométriques convergentes

l'une avec a = 1 et r = 1/2 et l'autre avec a = 1 et r = 1/3

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

exemple 4.2.12

Étudier la convergence de chacune des séries suivantes.

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \ldots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n - n}{n\,3^n}\right)$

---

rép: a) diverge ; b) diverge

remarque La convergence ou la divergence d'une série n'est pas affectée lorsqu'on ajoute ou lorsqu'on supprime un nombre *fini* de termes à la série.

exemple 4.2.13 Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$

Puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n}$$

la série diverge, elle correspond à la série harmonique amputée de ses 10 premiers termes

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{série harmonique divergente}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n}}_{\text{somme finie}}$$

On conclut à partir de la remarque précédente que la série diverge.

Exercices 4.2.2

1. Déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent. Trouver la somme des séries convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - (0,9)^{n-1} \right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

c) $\displaystyle\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{50} + \ldots$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [\,3(4^{-n}) + 4(3)^{-n}]$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+20}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{2n} - \frac{2}{3n} \right]$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 - 3^{2n}}{8^n}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 2^n)^2}{5^n}$

Réponses aux exercices 4.2.2

1. a) converge vers -7 , (algèbre des séries et série géométrique)

   b) diverge , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
   (série harmonique)

   c) diverge , $\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{50} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n}\right)$
   (algèbre des séries et série harmonique)

   d) converge vers 10 , (algèbre des séries et série géométrique)

   e) diverge , $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+20} = \sum_{n=21}^{\infty} 5\left(\frac{1}{n}\right)$
   (5 fois la série harmonique amputée des 20 premiers termes)

   f) converge vers $\frac{7}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$
   (algèbre des séries et série géométrique)

   g) diverge , $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\right]$
   (algèbre des séries, série harmonique et série semi-harmonique)

   h) diverge , $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2n} - \frac{2}{3n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6}\left(\frac{1}{n}\right)$
   (algèbre des séries et série harmonique)

   i) diverge , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 - 3^{2n}}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[5\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} - \left(\frac{9}{8}\right)^{n-1}\right]$
   (algèbre des séries et série géométrique)

   j) converge vers $\frac{35}{12}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - 2^n)^2}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - \frac{4}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right]$
   (algèbre des séries et série géométrique)

À l'exception de la série géométrique, il est en général difficile d'obtenir la somme d'une série. On se contente souvent de déterminer si une série converge ou diverge sans vraiment chercher à trouver sa somme. Plusieurs *critères* (propositions) existent pour étudier la convergence ou la divergence d'une série. On fera l'étude de deux de ces critères:

- le critère de divergence,
- le critère de d'Alembert.

proposition 4.2.5

condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge alors $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

démonstration

$s_n - s_{n-1} = (a_1+a_2+ .. +a_n) - (a_1+a_2+ .. +a_{n-1}) = a_n$

Soit $\{ s_n \}$ la suite des sommes partielles associée à la série.

Puisque $a_n = s_n - s_{n-1}$ $(\forall\ n > 1)$

et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} s_n = S$ $(S \in \mathbf{R})$ (par hypothèse)

alors
$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (s_n - s_{n-1})$$
$$= \lim_{n \to \infty} s_n - \lim_{n \to \infty} s_{n-1}$$
$$= S - S = 0$$

La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

La condition $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ est *nécessaire* pour que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mais cette condition n'est pas *suffisante*. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à considérer la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Cette série est divergente bien que $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

On peut par ailleurs affirmer en utilisant la contraposée de la proposition 4.2.5 que

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Ce corollaire qu'on appelle aussi *critère de divergence* est un élément important lorsqu'on étudie la convergence des séries.

proposition 4.2.6
critère de divergence

Si $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0$ alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

exemple 4.2.14

En utilisant le critère de divergence, montrer que la série diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} &= \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} \\
&\overset{\text{RH}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{10n} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{5} \\
&= \frac{1}{5} \neq 0
\end{aligned}$$

À partir du critère de divergence, on conclut que la série diverge.

exemple 4.2.15

En utilisant le critère de divergence, montrer que la série diverge.

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n} - 1}$$

Le critère de d'Alembert est un autre critère très utile.

proposition 4.2.7

critère de d'Alembert

Jean LE ROND d'Alembert philosophe, écrivain et mathématicien français (1717-1783)

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ une série quelconque,

a) si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ alors la série converge,

b) si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ alors la série diverge,

c) si $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ alors on ne peut rien conclure.

On ne démontrera pas la proposition. Mentionnons cependant que le critère de d'Alembert s'appuie sur la convergence d'une série géométrique. Il permet de comparer les termes de rang élevé de la série à ceux d'une série géométrique.

exemple 4.2.16

Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{5^n}$.

Appliquons le critère de d'Alembert,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^n (n+1)^2}{5^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n-1} n^2}{5^n}} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n (n+1)^2}{5^{n+1}} \; \frac{5^n}{(-1)^{n-1} n^2} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)\,(n+1)^2}{5n^2} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{5n^2} = \frac{\infty}{\infty} \;\; \text{IND}$$

$$\overset{\text{RH}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{5} < 1$$

La série est convergente.

Le critère de d'Alembert est efficace lorsqu'il est appliqué à une série dont le terme général contient au moins une expression de la forme:

$$b^n \ (b > 0, b \neq 1)\ , \quad e^n \quad , \quad n! \quad \text{ou} \quad n^n$$

Il n'est pas concluant lorsqu'il est appliqué à une série dont le terme général ne contient aucune de ces expressions. Par exemple, si on utilise le critère de d'Alembert sur la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \\ &\overset{\text{RH}}{=} 1 \end{aligned}$$

On ne peut par conséquent rien conclure.

exemple 4.2.17 Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\, e^n}{n!}$

rép: la série converge

exemple 4.2.18

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

utiliser la définition du nombre *e* pour résoudre ce problème

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

rép: la série diverge

Exercices 4.2.3

1. Si on utilise le critère de divergence sur les séries suivantes, quelles sont celles que l'on peut dire divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1000}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n}{3n^2-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{\sqrt{1+100n^2}}$

f) $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[5]{5} + \ldots$

2. Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide du critère de d'Alembert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n^3+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{3^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^2\, 3^{n+1}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{100^n\, n!}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{2^n\, n!}$

utiliser au besoin les notions de:

série géométrique,
série harmonique,
série semi-harmonique,
l'algèbre des séries,
le critère de divergence,
le critère de d'Alembert,
ou en dernière instance
les sommes partielles de la série

3. Étudier la convergence des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5}{n^2+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^{n-1}} + \frac{1}{3^n}\right)$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, 3^{n+1}}{2^n\, n!}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2^{n+1}}}$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^2}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{n\, 2^n}$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 7^n}{5^n}$

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n - 2^n}$

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}$

4. Soit la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\{s_n\}$ la suite des sommes partielles associée à cette série. Dans chacun des cas, indiquer si la série converge ou diverge et trouver sa somme si elle converge.

a) $a_n = \dfrac{3n}{4n+1}$

b) $s_n = \dfrac{1}{n}$

c) $a_n = 5^{-n}$

d) $s_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = 0$

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = 1$

Réponses aux exercices 4.2.3

1. a) la série diverge
   b) la série diverge
   c) on ne peut rien conclure
   d) la série diverge
   e) la série diverge
   f) la série diverge

2. a) la série converge (1/2)
   b) la série converge (0)
   c) la série diverge (3)
   d) la série diverge (∞)
   e) la série diverge (4/3)
   f) la série converge (0)
   g) la série diverge (∞)
   h) la série diverge ($e/2$)

3. a) la série diverge
   (critère de divergence)
   b) la série converge
   (série géométrique , r = -1/4)
   c) la série diverge
   (critère de d'Alembert, 1/ln 2)
   d) la série converge
   (alg. des séries, série géométrique)
   e) la série converge
   (critère de d'Alembert, 0)
   f) la série diverge
   (critère de divergence)
   g) la série converge
   (série géométrique, r = $-1/\sqrt{2}$)
   h) la série diverge
   (critère de divergence)
   i) la série converge
   (critère de d'Alembert, 0)
   j) la série diverge
   (alg. séries, séries géom. et harm.)
   k) la série diverge
   (critère de divergence)
   l) la série converge
   (sommes partielles)
   m) la série diverge
   (alg. des séries, séries géom.)
   n) la série converge
   (critère de d'Alembert, 0)

4. a) la série diverge
   b) la série converge vers 0
   c) la série converge vers 1/4
   d) la série converge vers 0
   e) on ne peut rien conclure
   f) la série converge vers 0
   g) la série diverge
   h) la série converge vers 1

4.3 Séries de puissances

Notre étude a jusqu'ici porté uniquement sur des séries numériques c'est-à-dire des séries dont tous les termes étaient des nombres réels. Par exemple,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

est une série numérique (géométrique). Nous allons maintenant généraliser cette étude aux séries à termes variables. Ces séries portent le nom de *séries de puissances.* Ainsi,

les séries de puissances sont aussi appelées des séries entières

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

est une série de puissances. Elle se comporte elle aussi comme une série géométrique. Son premier terme est a = 1 et sa raison

$$r = \frac{x^{n+1}}{x^n} = x.$$

Lorsque $|x| < 1$, la série converge vers $\dfrac{a}{1 - r} = \dfrac{1}{1 - x}$.

Par conséquent, $\dfrac{1}{1 - x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $-1 < x < 1$.

Nous dirons que pour $|x| < 1$, la fonction $f(x) = 1/(1 - x)$ a pour développement, la série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Dans cette section, nous chercherons à répondre à 3 questions:

a) quelles sont les valeurs de la variable x pour lesquelles une série de puissances converge ?
b) quelles sont les fonctions qui possèdent un développement en série de puissances ?
c) à quoi peut servir de développer une fonction en série de puissances ?

séries de puissances (séries entières)

une série de puissances peut être considérée comme un polynôme de degré infini

Soit c un nombre réel et $\{ a_n \}$ une suite. On appelle série de puissances de $(x - c)$, une série de la forme

$$a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$$

Lorsque $c = 0$, la série devient une série de puissances de x.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

exemple 4.3.1

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^2}$ sont deux séries de puissances. La première est une série de puissances de $(x - 1)$ et la seconde est une série de puissances de x.

intervalle de convergence d'une série de puissances

L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles une série de puissances converge est appelé *l'intervalle de convergence* de la série.

Soit la série de puissances: $\displaystyle x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \;\dots\; = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

une série de puissances de x converge toujours pour $x = 0$ tandis qu'une série de puissances de $x - c$ converge toujours pour $x = c$

On constate que si

$x = 0$, la série devient $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 0$, elle converge donc vers 0,

$x = 1$, la série devient $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, elle diverge (série harmonique),

$x = -1$, la série devient $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, converge (série semi-harmonique).

Il est évidemment impensable de poursuivre cette étude sur la convergence de la série du haut de cette façon. Étant donné la nature des séries de puissances, nous utiliserons le test de d'Alembert.

exemple 4.3.2

Déterminer l'intervalle de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

---

pour $x = 0$, la série converge

En appliquant le test de d'Alembert au terme général, on a pour $x \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{x^n}{n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\;\frac{n}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|x\;\frac{n}{n+1}\right|$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} |x| \frac{n}{n+1}$$

$$= |x| \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\overset{RH}{=} |x|$$

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

et pour $r > 0$,

$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$

$|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ ou $x > r$

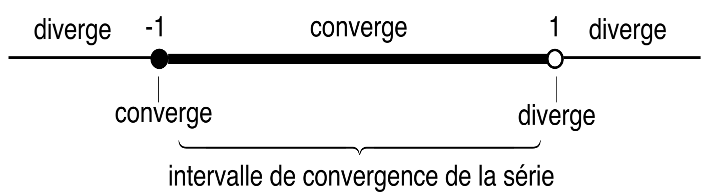
- Lorsque $|x| < 1$ $(-1 < x < 1)$, la série converge.
- Lorsque $|x| > 1$ $(x < -1$ ou $x > 1)$, la série diverge.
- Lorsque $|x| = 1$ $(x = \pm 1)$, on ne peut rien conclure.

En remplaçant x par ±1 dans la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ on constate que

- si $x = 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\begin{cases} \text{la série diverge} \\ \text{(série harmonique)} \end{cases}$

- si $x = -1$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\begin{cases} \text{la série converge} \\ \text{(série semi-harmonique)} \end{cases}$

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge donc $\forall$ $x \in [-1, 1[$



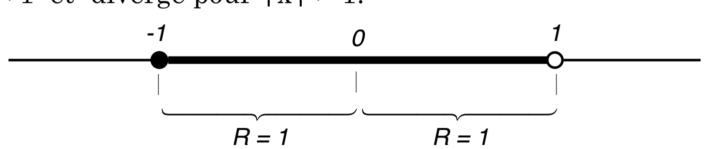
rayon de convergence d'une série de puissances de x

Si la série de puissances $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| < R$ et diverge pour $|x| > R$ alors le nombre R est appelé le *rayon de convergence* de la série.

exemple 4.3.3

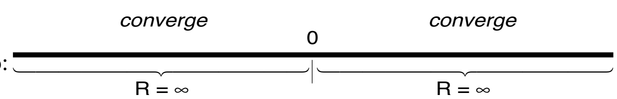
Le rayon de convergence de la série de puissances $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ de l'*exemple 4.3.2* est $R = 1$ puisque la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$.

le rayon de convergence d'une série de puissances correspond toujours à la moitié de la longueur de l'intervalle de convergence



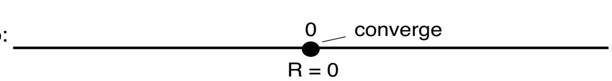
exemple 4.3.4

Déterminer l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

rép: 

exemple 4.3.5

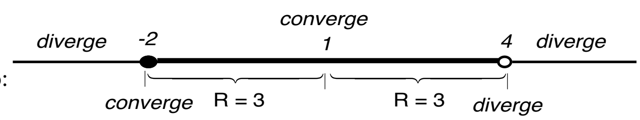
Déterminer l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

rép: 

La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ peut avoir comme intervalle de convergence

a) la seule valeur $x = 0$ $(R = 0)$,
b) toutes les valeurs de x dans les réels $(R = \infty)$,
r > 0 c) $]-r, r[$ ou $]-r, r]$ ou $[-r, r[$ ou $[-r, r]$ $(R = r)$.

exemple 4.3.6 Déterminer l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\, 3^n}$.

rép: 

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ peut avoir comme intervalle de convergence

r > 0

a) la seule valeur $x = c$,
b) toutes les valeurs de x dans les réels,
c) $]c - r, c + r[$ ou $]c - r, c + r]$ ou $[c - r, c + r[$ ou $[c - r, c + r]$.

De plus, si la série de puissances $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$ converge pour $|x - c| < R$ et diverge pour $|x - c| > R$ alors le rayon de convergence de la série est R.

série de puissances géométriques

Lorsqu'une série de puissances a un comportement géométrique, il sera possible d'associer cette série à une fonction sur son intervalle de convergence.

exemple 4.3.7

Soit la série de puissances $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$.

a) Déterminer l'intervalle de convergence de la série.
b) Trouver une fonction ayant cette série pour développement sur l'intervalle de convergence trouvé.

Par le test de d'Alembert,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}}\ \frac{2^n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)}{2}\right|$$

$$= \frac{|x-3|}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n = 1 + \frac{(x-3)}{2} + \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(x-3)^3}{8} + \ldots$$

Puisque l'expression $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{x-3}{2}$ ne dépend pas de n, la série de puissances est une série géométrique (le rapport de tout terme avec le précédent est une constante).

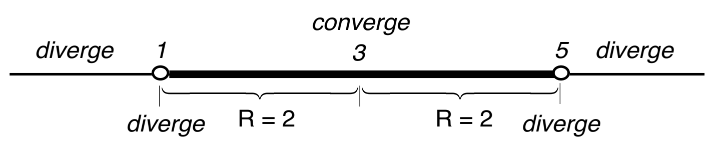
- Elle converge lorsque

$$\frac{|x-3|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 2$$
$$\Leftrightarrow -2 < x - 3 < 2$$
$$\Leftrightarrow 1 < x < 5\ .$$

- Elle diverge lorsque

$$\frac{|x-3|}{2} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5\ .$$

L'intervalle de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ est]1, 5[et son rayon de convergence est R = 2.



De plus, puisque la série est géométrique de premier terme a = 1 et de raison $r = (x-3)/2$, elle converge vers

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{(x-3)}{2}} = \frac{2}{5-x}$$

Par conséquent, $\displaystyle\frac{2}{5-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ si $x \in\ ]1, 5[$

On dira que pour $x \in]1, 5[$, la fonction $f(x) = 2/(5-x)$ a pour développement la série de puissances

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$$

Puisque la série géométrique: $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$ converge vers $a/(1-r)$ pour $|r| < 1$, il sera parfois possible d'utiliser ce fait pour trouver une série de puissances dont la somme est égale à une fonction donnée sur son intervalle de convergence.

exemple 4.3.8

Trouver une série de puissances de x dont la somme est $\dfrac{2}{1 + x}$

(Indiquer l'intervalle de convergence.)

On écrit d'abord $\dfrac{2}{1 + x}$ sous la forme $\dfrac{a}{1 - r}$.

$$\frac{2}{1 + x} = \frac{2}{1 - (-x)}$$

L'expression de droite représente la somme d'une série géométrique de raison $r = -x$ dont le premier terme est $a = 2$.

$$\frac{2}{1 + x} = 2 + 2(-x) + 2(-x)^2 + 2(-x)^3 + 2(-x)^4 + \ldots \quad \text{si} \quad |-x| < 1$$

$|-x| < 1 \Rightarrow |-1|\,|x| < 1 \Rightarrow |x| < 1$

D'où $$\frac{2}{1 + x} = \sum_{n = 1}^{\infty} 2(-x)^{n - 1} \quad \text{si} \quad |x| < 1$$

Ainsi $\forall\ x \in]-1, 1[$, la fonction $f(x) = 2/(1 + x)$ a pour développement la série de puissances $\displaystyle\sum_{n = 1}^{\infty} 2(-x)^{n - 1}$.

exemple 4.3.9

Trouver une série de puissances de x dont la somme est $\dfrac{5}{3 - x}$

(Indiquer l'intervalle de convergence.)

rép: $\displaystyle\sum_{n = 1}^{\infty} \frac{5x^{n - 1}}{3^n} \ \forall\ x \in]-3, 3[$

exemple 4.3.10

Trouver une série de puissances de $(x - 1)$ de somme $\dfrac{5}{3 - x}$.

(Indiquer l'intervalle de convergence.)

rép: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(x-1)^{n-1}}{2^n} \quad \forall\ x \in]-1, 3[$

Exercices 4.3.1

1. Trouver l'intervalle de convergence ainsi que le rayon de convergence de chacune des séries de puissances.

a) $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \frac{x^4}{81} - \dots$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$

c) $2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \frac{16x^4}{4} + \dots$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-2)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+4)^n}{n\,7^n}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n+1}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n (x+2)^n}{n}$

2. Déterminer la somme ainsi que l'intervalle de convergence de chacune des séries de puissances.

a) $4 + \frac{4x}{3} + \frac{4x^2}{9} + \frac{4x^3}{27} + \dots$

b) $\frac{(x-4)}{3} - \frac{(x-4)^2}{3} + \frac{(x-4)^3}{3} - \dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{n-1}}{2^n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x-2)^n}{5^n}$

3. Trouver une série de puissances de $(x - c)$ dont la somme correspond aux fonctions suivantes. (Indiquer l'intervalle de convergence de la série.)

a) $\frac{2}{2-x}$; $c = 0$

b) $\frac{3}{5+x}$; $c = 0$

c) $\frac{5}{3x-1}$; $c = 0$

d) $\frac{4x}{4+x^2}$; $c = 0$

e) $\frac{1}{2-x}$; $c = 1$

f) $-\frac{1}{x}$; $c = -2$

Réponses aux exercices 4.3.1

1. a) $R = 3$; $]-3, 3[$
   b) $R = \infty$; $]-\infty, \infty[$
   c) $R = 1/2$; $[-1/2, 1/2[$
   d) $R = 0$; $\{ 2 \}$
   e) $R = 3$; $]-5, 1[$
   f) $R = 7/3$; $[-11/3, 1[$
   g) $R = 1$; $]0, 2[$
   h) $R = 1/4$; $]-9/4, -7/4]$

2. a) $\dfrac{12}{3 - x}$ $\forall\ x \in\ ]-3, 3[$
   b) $\dfrac{x - 4}{3(x - 3)}$ $\forall\ x \in\ ]3, 5[$
   c) $\dfrac{1}{2 - 3x}$ $\forall\ x \in]-2/3, 2/3[$
   d) $\dfrac{5}{3 + 3x}$ $\forall\ x \in]-1, 7/3[$

3. a) $1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{8} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$ $\forall\ x \in\ ]-2, 2[$
   b) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{3x}{25} + \dfrac{3x^2}{125} - \dfrac{3x^3}{625} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-x)^{n-1}}{5^n}$ $\forall\ x \in\ ]-5, 5[$
   c) $-5 - 5(3x) - 5(3x)^2 - 5(3x)^3 - \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -5\,(3x)^{n-1}$ $\forall\ x \in\ ]-1/3, 1/3$
   d) $x - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^5}{16} - \dfrac{x^7}{64} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{n-1}$ $\forall\ x \in\ ]-2, 2[$
   e) $1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x - 1)^{n-1}$ $\forall\ x \in\ ]0, 2[$
   f) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{(x - 2)}{4} + \dfrac{(x - 2)^2}{8} + \ldots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{x + 2}{2}\right)^{n-1}$ $\forall\ x \in\ ]-4, 0[$

Développement en série de Taylor et de Maclaurin

À l'intérieur de son intervalle de convergence, une série de puissances se comporte sous plusieurs aspects comme une fonction polynomiale. Il serait donc logique de penser que l'on puisse dériver ou intégrer une telle série en dérivant ou en intégrant chacun de ses termes.

Bien que l'on sache que la dérivée d'une somme égale la somme des dérivées et que l'intégrale d'une somme égale la somme des intégrales,

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{k} \frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right)$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{k} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{k} \int \left(a_n x^n\right)\, dx$$

il n'est pas évident que cette règle s'applique aussi lorsque la somme possède un nombre infini de termes comme c'est le cas des séries de puissances.

Nous accepterons sans preuve le résultat de la proposition suivante.

proposition 4.3.1

dérivation et intégration des séries de puissances

Soit $f(x)$ une fonction dont le développement en série de puissances de $(x - c)$ est pour $|x - c| < R$ (R est le rayon de convergence de la série),

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + \ \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^{n}$$

Par dérivation ou intégration de la série, on a:

a) $$\frac{d}{dx} f(x) = 0 + a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + \ \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - c)^{n-1} \qquad \text{pour } |x - c| < R$$

b) $$\int f(x)\, dx = C + a_0(x - c) + \frac{a_1(x - c)^2}{2} + \frac{a_2(x - c)^3}{3} + \frac{a_3(x - c)^4}{4} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x - c)^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{pour } |x - c| < R.$$

le rayon de convergence demeure le même lorsqu'on dérive ou intègre une série de puissances; par ailleurs, il peut arriver que la série initiale converge aux extrémités de l'intervalle de convergence et que la nouvelle série obtenue par dérivation ou intégration diverge en l'un ou l'autre de ces points

exemple 4.3.11

Sachant que pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ \dots \ = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

trouver un développement en série de puissances de x pour chacune des fonctions suivantes en indiquant l'intervalle de convergence des séries.

a) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ b) $f(x) = \ln(1-x)$

On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ \dots \qquad \text{si } |x| < 1$$

Selon la proposition 4.3.1 a), si nous dérivons chaque membre de l'équation précédente, nous aurons pour $|x| < 1$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ \dots \right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ \dots$$

la série obtenue par dérivation converge aussi pour $-1 < x < 1$ (prop. 4.3.1); pour les valeurs $x = -1$ et $x = 1$, elle diverge par le critère de divergence

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} \qquad \text{si } -1 < x < 1$$

De plus, selon la proposition 4.3.1 b), si nous intégrons chaque membre de l'équation précédente, nous aurons pour $|x| < 1$,

$$\int \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \int \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ \dots \right) dx$$

$C = 0$ car l'égalité doit être vérifiée pour $x = 0$

$$\Rightarrow \qquad -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ \dots \ + C$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \ \dots$$

la série obtenue par intégration converge aussi pour $-1 < x < 1$ (prop. 4.3.1); pour $x = -1$, elle converge (série semi-harmonique) et pour $x = 1$ elle diverge (série harmonique)

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{si } -1 \leq x < 1$$

En particulier, pour $x = -1$ (dans l'intervalle de convergence),

$$\ln(1-(-1)) = -(-1) - \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4} - \ \dots$$

la série semi-harmonique converge vers ln 2

$$\Rightarrow \qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ \dots \ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

exemple 4.3.12

Trouver la somme de la série de puissances suivante.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ 3^{n-2}\, x^n = \frac{1}{9} + \frac{2x}{3} + 3x^2 + 12x^3 + 45x^4 + \ldots$$

Supposons que $f(x) = \frac{1}{9} + \frac{2x}{3} + 3x^2 + 12x^3 + 45x^4 + \ldots \quad \forall\ x \in I$

Par la proposition 4.3.1, on a $\forall\ x \in I$

$$\int f(x)\ dx = \int \left(\frac{1}{9} + \frac{2x}{3} + 3x^2 + 12x^3 + 45x^4 + \ldots \right) dx$$

$$= C + \underbrace{\frac{x}{9} + \frac{x^2}{3} + x^3 + 3x^4 + 9x^5 + \ \ldots}_{\text{série géométrique avec } a = x/9 \text{ et } r = 3x}$$

$$= C + \frac{x/9}{1-3x} \qquad \text{pour } -1 < 3x < 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int f(x)\ dx = \frac{d}{dx}\left(C + \frac{x}{9(1-3x)} \right) \text{pour } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{9(1-3x)^2} \qquad \text{pour } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Lorsque $x = \pm\frac{1}{3}$, la série devient $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\ (\pm 1)^n}{9}$. Elle diverge par le critère de divergence.

Ainsi, $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ 3^{n-2}\, x^n = \frac{1}{9(1-3x)^2} \quad \text{pour } -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

exemple 4.3.13

Trouver la somme de la série de puissances suivante.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{2^{n-1}\, n} = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{32} + \frac{x^5}{80} - \ \ldots$$

servez-vous de l'indice suivant: la dérivée de cette série est une série géométrique

rép: $2 \ln\frac{(2+x)}{2}$ pour $-2 < x \le 2$

développement d'une fonction en série de puissances

En utilisant la proposition précédente, voyons maintenant comment il est possible d'exprimer certaines fonctions sous la forme d'une série de puissances.

Considérant une fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable, il s'agit d'abord de supposer l'existence d'une série de puissances qui convergerait vers cette fonction pour un quelconque intervalle de convergence.

Supposons que pour $|x - c| < R$,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$$

Nous pouvons obtenir les coefficients de cette série de puissances de la façon suivante.

une série de puissances en (x - c) converge toujours pour x = c

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 + a_4(x - c)^4 + a_5(x - c)^5 \ \dots$$

$$\Rightarrow \quad f(c) = a_0$$

$$\text{et} \quad a_0 = f(c)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - c) + 3a_3(x - c)^2 + 4a_4(x - c)^3 + 5a_5(x - c)^4 \ \dots$$

$$\Rightarrow \quad f'(c) = a_1$$

$$\text{et} \quad a_1 = f'(c)$$

$$f''(x) = 2a_2 + (2\times3)a_3(x - c) + (3\times4)a_4(x - c)^2 + (4\times5)a_4(x - c)^3 \ \dots$$

$$\Rightarrow \quad f''(c) = 2a_2 = 2!a_2$$

$$\text{et} \quad a_2 = \frac{f''(c)}{2!}$$

$$f'''(x) = (2\times3)a_3 + (2\times3\times4)a_4(x - c) + (3\times4\times5)a_4(x - c)^2 \ \dots$$

$$\Rightarrow \quad f'''(c) = (2\times3)a_3 = 3!a_3$$

$$\text{et} \quad a_3 = \frac{f'''(c)}{3!}$$

$$f^{(4)}(x) = (2\times3\times4)a_4 + (2\times3\times4\times5)a_4(x - c) \ \dots$$

$$\Rightarrow \quad f^{(4)}(c) = (2\times3\times4)a_4 = 4!a_4$$

$$\text{et} \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}$$

En continuant de la même façon, il paraît évident que

pour n = 0, on considère que $0! = 1$ et que $f^{(0)}(c) = f(c)$

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}}$$

proposition 4.3.2

développement d'une fonction en série de Taylor

en l'honneur du mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731)

Si $f(x)$ possède un développement en série de puissances de (x - c), c'est-à-dire si $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \quad \text{pour } |x - c| < R$$

alors $\quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$

La série devra donc avoir la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

$$= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - c)^3 \ \ldots$$

Dans le cas où c = 0, la série est appelée *série de Maclaurin*

développement d'une fonction en série de Maclaurin

en l'honneur du mathématicien écossais Colin Maclaurin (1698-1746)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + $$

exemple 4.3.14

Trouver le développement en série de Maclaurin de $f(x) = e^x$.

En supposant que ce développement existe, il aura la forme

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 \ \ldots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & \qquad f(0) &= e^0 = 1 \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= e^0 = 1 \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= e^0 = 1 \\ f'''(x) &= e^x & f'''(0) &= e^0 = 1 \\ f^{(4)}(x) &= e^x & f^{(4)}(0) &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Par le test de d'Alembert,

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

La série converge donc $\forall$ x (R = ∞),

$$\Rightarrow \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall\ x$$

en particulier, lorsque x = 1, on obtient

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

exemple 4.3.15

Trouver une série de puissances en $(x - 2)$ pour $f(x) = e^x$

rép: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x - 2)^n \quad \forall\ x$

exemple 4.3.16

Trouver le développement en série de Maclaurin de $f(x) = \sin x$.

rép: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall\ x$

exemple 4.3.17

Trouver la série de puissances de Taylor en (x - 1) pour la fonction

$$f(\mathrm{x}) = \ln \mathrm{x}$$

rép: $\ln \mathrm{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\mathrm{x}-1)^n}{n} \quad \forall \ \mathrm{x} \in]0, 2]$

On peut obtenir d'autres séries par dérivation ou par intégration.

exemple 4.3.18

Trouver le développement en série de Maclaurin de $f(x) = \cos x$ en utilisant le développement obtenu à l'exemple 4.3.16.

rép: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall\, x$

On peut aussi utiliser un changement de variable.

exemple 4.3.19

Trouver le développement en série de Maclaurin de $f(x) = \cos 2x$ en utilisant le développement obtenu à l'exemple 4.3.18.

lorsqu'on applique un changement de variable, on doit également l'appliquer à l'intervalle de convergence de la série initiale

rép: $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \quad \forall\, x$

Ou encore utiliser l'algèbre des séries.

exemple 4.3.20

Trouver le développement en série de Maclaurin de $f(x) = x \cos x$ en utilisant le développement obtenu à l'exemple 4.3.18.

rép: $x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} \quad \forall\, x$

algèbre des séries de puissances

La ressemblance des séries de puissances et des polynômes ne s'arrête pas au processus de dérivation et d'intégration de celles-ci. Il est également possible d'additionner, de soustraire, de multiplier ou de diviser les séries de puissances comme on le ferait avec des polynômes.

on additionne, soustrait multiplie et divise les séries de puissances comme on le ferait avec des polynômes

Considérons deux séries de puissances convergentes pour $|x - c| < R$.

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 \ \ldots$$
$$g(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + b_3(x - c)^3 \ \ldots$$

si les séries que l'on additionne, soustrait multiplie ou divise ont un rayon de convergence de R, il en sera de même pour les nouvelles séries sauf peut-être celles obtenues par division; dans ce dernier cas, le rayon de convergence pourrait être inférieur à R

a) $f(x) \pm g(x) = (a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 \ \ldots) \pm (b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + b_3(x - c)^3 \ \ldots)$

b) $f(x) \,.\, g(x) = (a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 \ \ldots) \times (b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + b_3(x - c)^3 \ \ldots)$

c) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + a_3(x - c)^3 \ \ldots}{b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + b_3(x - c)^3 \ \ldots}$$

(pourvu que $g(x) \neq 0$ lorsque $|x - c| < R$)

exemple 4.3.21

Sachant que pour tout x: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ \ldots$

trouver un développement en série de puissances de x pour $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Indiquer l'intervalle de convergence de la série.

certaines combinaisons des fonctions exponentielles e^x et e^{-x} reviennent dans plusieurs applications;

a) sinus hyperbolique

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

b) cosinus hyperbolique

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

D'abord remplaçons x par -x dans la série de puissances de e^x.

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ \ldots \qquad \forall\ x \in\ ]-\infty, \infty[$$

Puis par l'algèbre des séries de puissances on obtient,

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) - \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)}{2}$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \ \ldots \qquad \forall\ x \in\ ]-\infty, \infty[$$

exemple 4.3.22

Sachant que pour tout x: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$

trouver un développement en série de puissances de x pour $f(x) = \cos^2 x$ et indiquer l'intervalle de convergence des séries.

on peut résoudre le problème en multipliant la série du haut par elle-même ou plus simplement en utilisant l'identité

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

rép: $\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^4}{4!} - \frac{32x^6}{6!} + \frac{128x^8}{8!} - \ldots \ \forall\ x \in\ ]-\infty, \infty[$

Exercices 4.3.2

dériver ou intégrer les séries pour découvrir une série géométrique

1. Trouver la somme de chacune des séries.

   a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} x^n}{n} = x + \frac{3x^2}{2} + \frac{9x^3}{3} + \frac{27x^4}{4} + \frac{81x^5}{5} + \ldots$$

   b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n\, x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{2x}{4} + \frac{3x^2}{8} - \frac{4x^3}{16} + \frac{5x^4}{32} - \ldots$$

2. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   a) Trouver le développement de cette fonction en série de puissances de (x - 1) en l'associant à la somme d'une série géométrique.

   b) En dérivant la série obtenue en a), trouver une série de puissances de (x - 1) pour la fonction $1/x^2$.

   c) En intégrant la série obtenue en a), trouver une série de puissances de (x - 1) pour la fonction ln x.

   (Indiquer l'intervalle de convergence de chacune des séries.)

3. En supposant que chacune des fonctions suivantes possède un développement en série de puissances de (x - c), trouver ce développement à l'aide des formules de Taylor ($c \neq 0$) ou de Maclaurin ($c = 0$).

   a) $f(x) = \cos x$; $c = 0$

   b) $f(x) = \sin 2x$; $c = \pi/2$

   c) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$; $c = 0$

   d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $c = 2$

   e) $f(x) = xe^x$; $c = 0$

   f) $f(x) = \ln(3 + 2x)$; $c = -1$

   (Indiquer l'intervalle de convergence de chacune des séries.)

4. Sachant que $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots \quad \forall\, x$$

   $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots \quad \forall\, x$$

   trouver un développement en série de Maclaurin pour

   a) $x^2 e^{-x}$

   b) $x \cos(x/2)$

   c) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

   d) $\dfrac{1 - \cos(2x)}{x}$

   (Indiquer l'intervalle de convergence de chacune des séries.)

Réponses aux exercices 4.3.2

C vaut -1 pour la série obtenue par intégration car une série de puissances en (x - 1) doit converger lorsque x = 1

1. a) $-\dfrac{\ln(1-3x)}{3}$; [-1/3, 1/3[

   b) $\dfrac{2}{(x+2)^2}$;]-2, 2[

2. a) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1+(x-1)} = \dfrac{1}{1-(-(x-1))}$

   $= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots$

   $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$;]0, 2[

   b) $\dfrac{1}{x^2} = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + \ldots$

   $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$;]0, 2[

   c) $\ln x = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} - \dfrac{(x-1)^4}{4} + \ldots$

   $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$;]0, 2]

3. a) $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$;]-∞, ∞[

   b) $-2(x-\pi/2) + \dfrac{8(x-\pi/2)^3}{3!} - \dfrac{32(x-\pi/2)^5}{5!} + \dfrac{128(x-\pi/2)^7}{7!} - \ldots$

   $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1}(x-\pi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$;]-∞, ∞[

   c) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$;]-1, 1[

   d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{(x-2)}{4} + \dfrac{(x-2)^2}{8} - \ldots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$;]0, 4[

e) $x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$; $]-\infty, \infty[$

f) $2(x+1) - \frac{4(x+1)^2}{2} + \frac{8(x+1)^3}{3} - \frac{16(x+1)^4}{4} + \ldots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}(x+1)^{n+1}}{n+1} \quad ; \quad]-3/2, -1/2]$$

4. a) $x^2 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^5}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n!}$; $]-\infty, \infty[$

b) $x - \frac{x^3}{2^2(2!)} + \frac{x^5}{2^4(4!)} - \frac{x^7}{2^6(6!)} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n}(2n)!}$; $]-\infty, \infty[$

c) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $]-\infty, \infty[$

d) $\frac{2^2x}{2!} - \frac{2^4x^3}{4!} + \frac{2^6x^5}{6!} - \frac{2^8x^7}{8!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+2}x^{2n+1}}{(2n+2)!}$

; $]-\infty,\infty[\;/\; \{0\}$

Applications des séries de puissances

approximation de fonctions

On peut se servir des séries de puissances comme d'un outil d'approximation. Par exemple, pour obtenir une approximation de la valeur de sin 1, on remplace x par 1 dans la série de puissances suivante

cette série converge vers sin x pour tout x dans les réels

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \ \ldots$$

En utilisant

la précision de la réponse dépend du nombre de termes utilisés

- 2 termes: $\sin 1 \sim \left(1 - \frac{1^3}{3!}\right) \sim 0{,}8333333$,
- 3 termes: $\sin 1 \sim \left(1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!}\right) \sim 0{,}8416666$.

Sachant que $\sin 1 = 0{,}8414709$, on obtient une approximation exacte à 3 décimales en utilisant les 3 premiers termes de la série. L'approximation de la valeur de sin 4 est par ailleurs beaucoup moins précise. En utilisant les 3 premiers termes de la série, on obtient $\sin 4 \sim 1{,}8666667$ bien que la valeur exacte de sin 4 est $-0{,}7568025$. Pour mieux comprendre les raisons de la différence de précision dans l'approximation des deux valeurs, comparons les graphiques de $y = \sin x$ avec ceux des polynômes associés aux 2, 3, 4 et 5 premiers termes de la série.

on remarque à la figure 4.3.1 qu'une approximation de sin x à l'aide des deux premiers termes de la série de puissances de x sera très bonne pour des valeurs autour de 0;

entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ les graphiques de $y = \sin x$ et de $y = x - x^3/3!$ sont presque identiques;

ailleurs, aucune approximation n'est possible; en outre, on constate que plus on s'éloigne de $x = 0$, plus on doit utiliser de termes pour obtenir une approximation qui soit valable

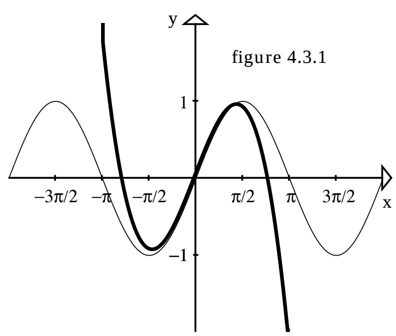


figure 4.3.1

$$y = x - \frac{x^3}{3!}$$

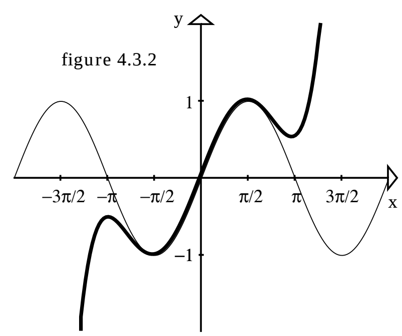


figure 4.3.2

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

d'une façon générale, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n,$$

on obtient pour des valeurs de x près de c, une très bonne approximation de la fonction en n'utilisant que quelques termes de la série; plus on s'éloigne du point c, plus on doit utiliser de termes pour que l'approximation soit valable

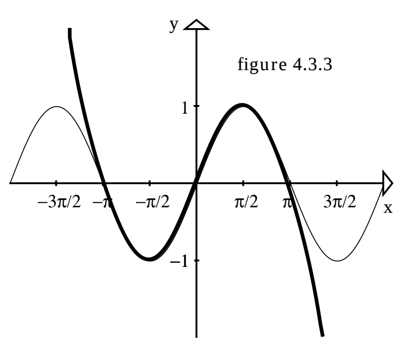


figure 4.3.3

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

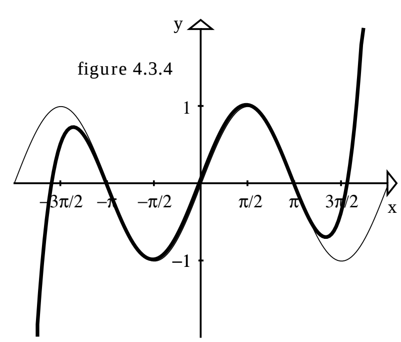


figure 4.3.4

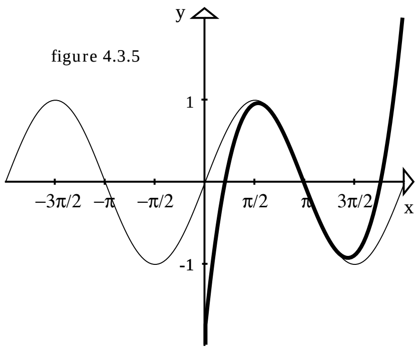
$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

Lorsqu'on se sert de la série de puissances en (x - c) d'une fonction pour estimer cette fonction en x = a, on obtient d'excellents résultats avec très peu de termes si c est près de a. Prenons les développements de sin x en puissances de x et de (x - π) pour estimer la valeur de sin 3 que l'on sait égale à 0,14112001.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \frac{(x-\pi)^5}{5!} + \frac{(x-\pi)^7}{7!} - \dots$$

figure 4.3.5



$$y = -(x - \pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!}$$

On doit utiliser les 5 premiers termes de la série de puissances en x de sin x pour obtenir une valeur de sin 3 qui soit exacte à 2 décimales.

$$\sin 3 \sim 3 - \frac{3^3}{3!} + \frac{3^5}{5!} - \frac{3^7}{7!} + \frac{3^9}{9!} = 0{,}1453125$$

Avec seulement les 2 premiers termes de la série de puissances en (x - π) de sin x (figure 4.3.5), on obtient la valeur de sin 3 avec une précision de 4 décimales.

$$\sin 3 \sim -(3 - \pi) + \frac{(3-\pi)^3}{3!} = 0.1411195$$

calcul d'erreur

Il est possible, en utilisant le résultat suivant, de calculer l'erreur maximale commise par de telles approximations.

le reste du polynôme de Taylor après n termes

le terme utilisé pour calculer E ressemble aux termes de la série de Taylor sauf que $f^{(n)}$ est évaluée en un point z au lieu d'être évaluée au point c; tout ce qu'on peut dire c'est que z correspond à une valeur située entre c et x

Quand on utilise les n premiers termes de la série

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1}$$

pour obtenir une approximation de $f(x)$, l'erreur E que cette approximation engendre est donnée par

$$E = \left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - c)^n\right| \quad \text{(z est entre c et x)}$$

exemple 4.3.23

Sachant que pour tout x, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$

Estimer la valeur de e en utilisant les 5 premiers termes de la série et préciser l'ordre de grandeur de l'erreur commise.

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} \sim 2{,}7083333$$

$$E = \left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - c)^n\right| \quad \text{(z est entre c et x)}$$

Puisqu'on évalue e^1 à l'aide des 5 premiers termes d'une série de puissances de x, on a

x = 1 ; n = 5 ; c = 0 et $f^{(n)}(z) = e^z$

$$E = \left|\frac{e^z}{5!}(1 - 0)^5\right| = \left|\frac{e^z}{5!}\right| \quad \text{(z est entre 0 et 1)}$$

car $e^z < e$ $\Rightarrow \frac{e^z}{5!} < \frac{e}{5!}$

Si $0 < z < 1$ alors $e^0 < e^z < e^1$ et $E = \left|\frac{e^z}{5!}\right| < \left|\frac{e}{5!}\right| < 0{,}023$

Certains pourraient se demander pourquoi perdre son temps à de telles approximations quand un calculateur peut si bien faire ces évaluations. Lorsqu'on utilise les fonctions $\sin x$, $\arctan x$, e^x ou $\ln x$ sur un calculateur ou un ordinateur, il y a de fortes chances que le sous-programme qui effectue le calcul utilise un développement en série. Il est beaucoup plus simple pour un ordinateur de traiter ces fonctions comme des polynômes que de le faire autrement.

approximation d'une intégrale définie

Une autre raison de l'importance des séries de puissances tient au fait qu'elles permettent l'intégration de fonctions qui jusqu'à présent ne pouvaient être faite à l'aide des fonctions élémentaires.

exemple 4.3.24

Évaluer approximativement $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ en utilisant les 5 premiers termes de la série série de Maclaurin associée à l'intégrande du problème.

Sachant que

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots \qquad \forall\ x$$

En remplaçant x par $-x^2$ dans la série, on obtient

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \qquad \forall\ x$$

Puis en intégrant terme à terme (proposition 4.3.1), on a

$$\int e^{-x^2}dx = \int\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\right)dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3\times1!} + \frac{x^5}{5\times2!} - \frac{x^7}{7\times3!} + \frac{x^9}{9\times4!} - \dots \ \forall\ x$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \left[x - \frac{x^3}{3\times1!} + \frac{x^5}{5\times2!} - \frac{x^7}{7\times3!} + \frac{x^9}{9\times4!} - \dots\right]_0^1$$

$$\sim 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$$

$$\sim 0{,}7475$$

calcul de limites

Les séries sont aussi utilisées pour évaluer des limites lorsque les méthodes de solution traditionnelles s'avèrent inefficaces.

exemple 4.3.25

À l'aide des séries calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x \sin x^3}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x \sin x^3} = \dfrac{0}{0}$ ind

Puisque $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \ldots \quad \forall\, x$

$\Rightarrow \quad 1 - \cos x^2 = \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^8}{4!} + \dfrac{x^{12}}{6!} - \dfrac{x^{16}}{8!} + \ldots \quad \forall\, x$

et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \ldots \quad \forall\, x$

$\Rightarrow \quad x \sin x^3 = x^4 - \dfrac{x^{10}}{3!} + \dfrac{x^{16}}{5!} - \dfrac{x^{22}}{7!} + \ldots \quad \forall\, x$

On obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x \sin x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^8}{4!} + \dfrac{x^{12}}{6!} - \dfrac{x^{16}}{8!} + \ldots}{x^4 - \dfrac{x^{10}}{3!} + \dfrac{x^{16}}{5!} - \dfrac{x^{22}}{7!} + \ldots}$$

divisons chacun des termes du numérateur et du dénominateur par x^4

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^8}{6!} - \dfrac{x^{12}}{8!} + \ldots}{1 - \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^{12}}{5!} - \dfrac{x^{18}}{7!} + \ldots} = \frac{1}{2}$$

exemple 4.3.26

À l'aide des séries calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - 2x^2 - \cos 2x}{(e^{x^2} - 1)^2}$

lorsque l'indétermination est de la forme $\dfrac{0}{0}$, il suffit pour obtenir la réponse du problème, de considérer le terme dominant de la série qui apparaît au numérateur et le terme dominant de la série qui apparaît au dénominateur; seuls ces deux termes agissent sur la limite cherchée

rép: $-\dfrac{2}{3}$

Exercices 4.3.3

utiliser votre calculatrice et les séries de Maclaurin qui apparaissent à la fin du texte pour résoudre ces problèmes

1. En utilisant les 2 premiers termes non nuls du développement en série de Maclaurin de $f(x) = \sin x$, évaluer approximativement $\sin 0,2$.

2. En utilisant les 4 premiers termes non nuls du développement en série de Maclaurin de $f(x) = \ln(1 + x)$, évaluer approximativement $\ln 1,4$.

$$E = \left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-c)^n \right|$$

(z est entre c et x)
(voir l'exemple 4.3.21)

3. En utilisant les 5 premiers termes du développement en série de Maclaurin de $f(x) = e^x$, évaluer approximativement $\sqrt{e}$ ainsi que l'erreur maximale commise par cette approximation.

4. Calculer approximativement les intégrales définies suivantes en utilisant les n premiers termes de la série de puissances en x associée à la fonction à intégrer .

a) $\displaystyle\int_0^1 x \sin x^3 \, dx \quad (n = 3)$

c) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{1}{1 + x^6} \, dx \quad (n = 2)$

b) $\displaystyle\int_0^1 \cos\sqrt{x} \, dx \quad (n = 4)$

d) $\displaystyle\int_{-0,1}^{0} e^{-x^3} \, dx \quad (n = 3)$

5. Utiliser un développement en série de puissances de x pour évaluer chacune des limites.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x(e^{x^5} - 1)}{x^2 - \sin x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^4 - x^4 \cos x^4}{x^{12}}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3} - x^3 - 1}{\cos x^3 - 1}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^6 \sin x^2}{(1 - \cos x^2)^2}$

Réponses aux exercices 4.3.3

1. 0.19867

2. 0,33493

3. 1,64844 ; $E < 0{,}0005$ (en utilisant $e^{1/2} < 4^{1/2} = 2$)

4. a)	0,18534	c)	0,49889
b)	0,76354	d)	0,10003

6. a)	6	c)	1/3
b)	-1	d)	4

Exercices de révision

utiliser au besoin:

les sommes partielles,
les séries géométriques,
le critère de divergence
ou
l'algèbre des séries

1. Déterminer si les suites ci-dessous convergent ou divergent. Si elles convergent, trouver vers quelle valeur.

   a) $\{ (2^{1/n} - 1)n \}$ b) $\{ n^2(1 - \cos(3/n)) \}$

2. Déterminer si les séries suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, trouver leur somme.

   a) $125 - 50 + 20 - 8 + \frac{16}{5} - \dots$

   b) $\frac{1}{36} + \frac{1}{30} + \frac{1}{25} + \frac{6}{125} + \dots$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n}}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 + 2^{-n}}$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{1-n} 5^{n/2}$

   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$

   h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + e^n}{e^{2n}}$

3. a) Exprimer le nombre 4,299 999... , à développement décimal périodique, sous une forme rationnelle (fractionnaire).
   b) Lequel des deux nombres est le plus grand: 4,3 ou 4,299 999...

4. Étudier la convergence des séries suivantes.

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{100}\, 10^n}{n!}$ b) $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{2m}{8m - 5}$

5. On imprime à un objet suspendu à une corde un mouvement d'oscillation. À la première oscillation, l'objet parcourt une distance de 20 cm et, pour les oscillations subséquentes, la distance parcourue est toujours de 2 % inférieure à la précédente. Dans ces conditions, quelle distance totale aura parcouru l'objet avant de s'immobiliser ?

6. Déterminer l'intervalle de convergence ainsi que le rayon de convergence des séries de puissances suivantes.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n + 1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 10)^n}{n\, 4^n}$

voir l'exercice # 9 à la page 4-20

7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ converge et trouver sa somme.

8. Trouver le développement de Taylor pour chacune des fonctions.

a) $f(x) = e^{(1 + x/2)}$; en puissances de $(x + 2)$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$; en puissances de $(x - 4)$

(Indiquer l'intervalle de convergence dans chacun des cas.)

9. Trouver la somme de chacune des séries (dériver ou intégrer s'il y a lieu, pour découvrir une série géométrique).

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x + 3)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{(x+3)}{4} + \frac{(x+3)^2}{8} - \frac{(x+3)^3}{16} + \ldots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n} = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \ldots$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n + 1) x^n = 1 + 4x + 12x^2 + 32x^3 + 80x^4 + \ldots$

utiliser les séries usuelles de Maclaurin à la fin du cahier

10. Trouver la série de Maclaurin pour les fonctions suivantes en utilisant une série connue (géométrique ou non) et s'il y a lieu, effectuer un changement de variable ou utiliser l'algèbre des séries de puissances.

a) $f(x) = \frac{2}{3x + 4}$

b) $f(x) = e^{-x^2/2}$

c) $f(x) = \cos x - x \sin x$

(Indiquer l'intervalle de convergence dans chacun des cas.)

pour résoudre ces problèmes, utiliser les séries usuelles de Maclaurin à la fin du cahier

pour les problèmes a) et b), n est le nombre de termes à utiliser

11. Effectuer à l'aide des séries.

a) $\int_0^{0,5} \cos x^3 \, dx \quad (n = 2)$

b) $\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx \quad (n = 3)$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x(e^{x^5} - 1)}{(x^2 - \sin x^2)}$

d) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right)$

12. En utilisant les séries de Maclaurin à la fin du cahier, montrer que:

a) $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + ... = 0$

b) $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... = \frac{1}{e}$

Réponses aux exercices de révision

1. a) la suite converge vers $\ln 2$ b) la suite converge vers $\frac{9}{2}$

2. a) $\frac{625}{7}$ (série géométrique)
   b) diverge (série géométrique)
   c) $\frac{16}{17}$ (série géométrique)
   d) diverge (critère de divergence)
   e) 1 (sommes partielles)
   f) $\frac{3\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$ (série géométrique)
   g) $\sin 1$ (sommes partielles)
   h) $\frac{e(4e + 1)}{e^2 - 1}$ (série géom. + alg. séries)

3. a) $\frac{43}{10}$ $\left(4{,}2 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots \right)$ b) les deux nombres sont égaux

4. a) converge (critère de d'Alembert)
   b) diverge (critère de divergence)

5. 1000 cm $\left(20 + 20(0{,}98) + 20(0{,}98)^2 + 20(0{,}98)^3 \dots \right)$

6. a)]-1, 1[(R = 1) b) [-14, -6[(R = 4)

7. $\frac{3}{4}$

8. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n\, n!}$]-∞, ∞[
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^n}{4^{n+1}}$]0, 8[

9. a) $\frac{1}{5+x}$]-5, -1[
   b) $\ln(1 + x^2)$ [-1, 1]
   c) $\frac{1}{(1-2x)^2}$]-1/2, 1/2[

10. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left(\frac{3x}{4}\right)^{n-1}$]-4/3, 4/3[

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^n\, n!}$]-∞, ∞[

c) $1 - \dfrac{3x^2}{2!} + \dfrac{5x^4}{4!} - \dfrac{7x^6}{6!} + \dfrac{9x^8}{8!} - \; = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(1+2n)\,x^{2n}}{(2n)!}$]-∞, ∞ [

11. a) 0,49944 c) 6

 b) 0,03598 d) -1/2

12. a) On remplace x par π dans la série de Maclaurin de sin x
 (π fait partie de l'intervalle de convergence)
 b) On remplace x par -1 dans la série de Maclaurin de e^x
 (-1 fait partie de l'intervalle de convergence)

Séries usuelles de Maclaurin

- $\dfrac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ \dots \ = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1$

- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ \dots \ = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \qquad -\infty < x < \infty$

- $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \ \dots \ = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \qquad -1 < x \leq 1$

- $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} - \ \dots \ = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -\infty < x < \infty$

- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} - \ \dots \ = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad -\infty < x < \infty$

- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} - \ \dots \ = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$