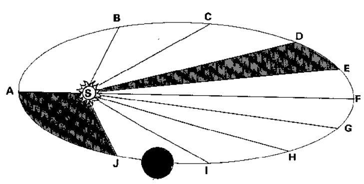
La dérivée d’une fonction

3

Dans un certain sens, on peut dire qu'en inventant les techniques du calcul infinitésimal pour étudier le mouvement, Newton introduisait en science la technique du cinéma. Le film n'est en effet qu'une succession d'images fixes d'un objet en mouvement de même le calcul infinitésimal tronçonne le mouvement en étapes qui peuvent être examinées une à une. Une fois la méthode inventée, les mathématiciens purent considérer le déplacement d'un objet comme la trajectoire d'un point à travers l'espace et arrêter la course de ce point à tout instant pour en déterminer sa vitesse et son accélération.

Le *calcul différentiel* (calcul infinitésimal) est un outil qui permet d’étudier les *mouvements*. Lorsqu’un mouvement obéit à certaines règles et qu’il peut être mis sous forme d'équation, le calcul différentiel permet de déterminer les lois auxquelles ses variations obéissent.

Il fut inventé au XVII^{e} siècle afin de combler les besoins des scientifiques de ce temps. Avant ce siècle, les *Grecs* avaient développé des méthodes sophistiquées, d’une très grande complexité afin de cerner les rythmes de variation du mouvement. Leur méthode consistait à décomposer en tranches infiniment petites, les courbes associées à certains mouvements. En introduisant la représentation graphique dans sa géométrie analytique (1637), *René Descartes* ouvrait la voie à ses contemporains en leur permettant de visualiser les équations comme une succession de points dans un plan. Entre 1665 et 1666, l’Anglais **Isaac Newton** conçut le calcul infinitésimal permettant du même coup d'étudier le mouvement de toutes choses. Le procédé de Newton consistait à combiner les possibilités du découpage en tranches infinitésimales des Grecs et celle de la représentation graphique de Descartes pour forger un outil puissant et très simple. Ce procédé s'avéra d'une telle efficacité qu'en quelques années Newton fut en mesure d'énoncer les lois du mouvement et celles de la gravitation. Ces lois fondamentales de la physique expliquent le fonctionnement du système solaire et l'action sur un corps en mouvement de forces extérieures comme la gravitation ou la traction d'un ressort. Les avions, les télévisions, les bombes, les ponts, les vaisseaux spatiaux, etc., sont en quelque sorte les conséquences de la découverte de Newton et lui doivent d'exister.



Quelque 50 ans avant Newton, Képler mit près de 20 ans à démontrer ses trois lois relatives au mouvement des planètes. Dans la seconde de ses lois, il démontra que la vitesse d’une planète est fonction de la distance qui la sépare du soleil. Par voie de conséquence les temps mis pour parcourir les portions de trajectoire DE et JA sont égaux et les aires des figures ombrées correspondantes sont égales. Avec le calcul différentiel, un après-midi suffit pour démontrer cette règle ...

Personne ne réussit à convaincre Newton de publier sa thèse du calcul infinitésimal, du moins jusqu'au jour ou **Gottfried Wilhelm von Leibniz,** un mathématicien allemand, recréa de son côté une oeuvre mathématique similaire. Leibniz inventa le calcul infinitésimal en 1675, soit 10 ans après Newton, mais publia sa découverte en 1684, 20 ans avant que le Britannique ne fit connaître ses propres résultats. Les deux hommes s'engagèrent par la suite dans une controverse chauvine sur l'antériorité et la nature de leurs travaux.

Aujourd’hui la portée du calcul différentiel dépasse largement sa vocation première soit la compréhension des phénomènes physiques. Cet outil très polyvalent se retrouve partout. En économie, on l’utilise pour prévoir les tendances des marchés. Les biologistes étudient la croissance des populations à l’aide du calcul différentiel. En recherche médicale, on l’utilise pour créer des équipements à rayons X ou à ultrasons. L’exploration spatiale serait impossible sans le calcul différentiel. Les ingénieurs l’utilisent dans la conception des ponts. Les manufacturiers d’équipements sportifs l’utilisent dans la conception de leurs raquettes de tennis ou leurs bâtons de baseball. La liste est pratiquement interminable. Tous les domaines scientifiques utilisent d’une façon ou d’une autre cet outil merveilleux qu’est le calcul différentiel.

3.1 Taux de variation

Considérons une bactérie dont la croissance est définie par la fonction

$$f(t) = (t + 1)^2$$

t représente un temps en minutes,
$f(t)$ représente le nombre de bactéries au temps t.

Initialement (t = 0), le nombre de bactéries est

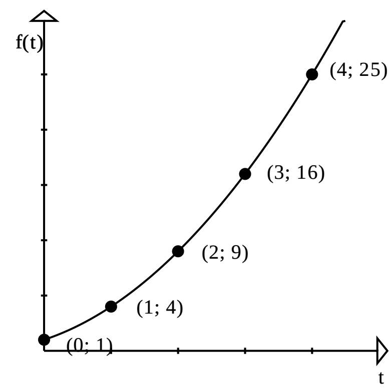
$$f(0) = (0 + 1)^2 = 1$$

Après une minute (t = 1), le nombre de bactéries devient

$$f(1) = (1 + 1)^2 = 4 \quad ...$$

Pour les quatre premières minutes, on obtient

t (min.)	$f(t)$ (nbre de bactéries)
0	1
1	4
2	9
3	16
4	25



On remarque que la croissance des bactéries est de plus en plus rapide. La population double, triple ou quadruple très rapidement.

Ainsi,
de t = 0 à t = 1, l'accroissement des bactéries est de 4 - 1 = 3,
de t = 1 à t = 3, l'accroissement des bactéries est de 16 - 4 = 12,
de t = a à t = b, l'accroissement des bactéries sera de $f(b) - f(a)$.

Lorsqu'on étudie la croissance d'une fonction, on s'intéresse souvent à la vitesse à laquelle s'effectue cette croissance sur des intervalles donnés. On s'intéresse en fait à ce qu'on appelle le *taux de variation moyen* de la fonction.

Le taux de variation moyen des bactéries par rapport au temps

de t = 0 à t = 1 est de $\dfrac{4 - 1}{1 - 0}$ = 3 bactéries/minute,

de t = 1 à t = 3 est de $\dfrac{16 - 4}{3 - 1}$ = 6 bactéries/minute,

définition 3.1.1

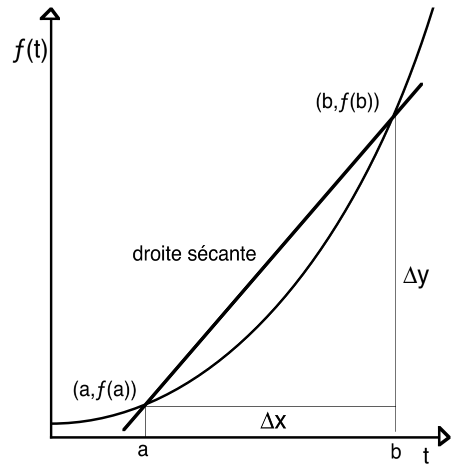
taux de variation moyen

Le taux de variation moyen d'une fonction f sur l'intervalle [a, b] de son domaine est donné par

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Géométriquement, lorsqu'on calcule le taux de variation moyen d'une fonction sur l'intervalle [a, b], on calcule une *pente*.

En fait cette quantité correspond à *la pente de la droite sécante* passant par les points (a, f(a)) et (b, f(b))



Ainsi

$$\text{le taux de variation moyen } = \frac{\text{variation de y}}{\text{variation de x}}$$

notation Δ (lire delta)

Si on note Δy pour la variation de y et Δx pour la variation de x, on aura,

$$\boxed{\text{taux de variation moyen } = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

exemple 3.1.1

Le 20 juin dernier, on a relevé la température T de l'air entre t = 11 h et t = 15 h. On a obtenu les températures suivantes:

11 h	21°C
12 h	25°C
13 h	27°C
14 h	21°C
15 h	23°C

Calculer le taux de variation moyen de la température sur les intervalles indiqués et interpréter les résultats obtenus.

a) entre 11 h et 13 h

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\text{variation de T}}{\text{variation de t}} = \frac{27°C - 21°C}{13\text{ h} - 11\text{ h}} = 3°C/h.$$

b) entre 11 h et 14 h

c) entre 12 h et 14 h

exemple 3.1.2

Un camion de la compagnie ACME quitte l'entrepôt pour effectuer une livraison. La distance (en kilomètres) parcourue par le camion après avoir roulé t heures est donnée par l'équation

$$s(t) = 15t^2 \qquad 0 \le t \le 4$$

Compléter le tableau:

t	0	1	2	3	4
s(t)					

Calculer le taux de variation moyen de la distance parcourue par le camion sur les intervalles de temps indiqués. (interpréter les résultats obtenus).

a) $[0, 4]$

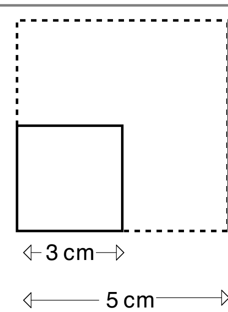
le taux de variation moyen d'une distance par rapport à un temps correspond à une vitesse moyenne

b) $[0, 2]$

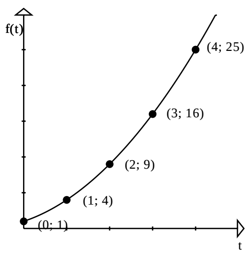
c) $[3, 4]$

exemple 3.1.3

Quel est le taux de variation moyen de l'aire d'un carré par rapport à la longueur de son côté lorsque celui-ci passe de 3 cm à 5 cm?



$f(t) = (t + 1)^2$



Reprenons l'exemple du début sur la croissance des bactéries.

Serait-il possible d'obtenir le taux de croissance des bactéries à un moment précis; disons à la 4e minute?

Il est possible d'approcher la valeur en question en considérant plusieurs taux de variation moyens.

D'abord à gauche,

sur [3; 4]	on a	$\dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$	$= \dfrac{25 - 16}{1}$	$= 9$
sur [3,5; 4]	on a	$\dfrac{f(4) - f(3{,}5)}{4 - 3{,}5}$	$= \dfrac{25 - 12{,}25}{0{,}5}$	$= 9{,}5$
sur [3,9; 4]	on a	$\dfrac{f(4) - f(3{,}9)}{4 - 3{,}9}$	$= \dfrac{25 - 24{,}01}{0{,}1}$	$= 9{,}9$
sur [3,99; 4]	on a	$\dfrac{f(4) - f(3{,}99)}{4 - 3{,}99}$	$= \dfrac{25 - 24{,}9001}{0{,}01}$	$= 9{,}99$
sur [3,999; 4]	on a	$\dfrac{f(4) - f(3{,}999)}{4 - 3{,}999}$	$= \dfrac{25 - 24{,}990001}{0{,}001}$	$= 9{,}999$

Puis à droite,

sur [4; 5]	on a	$\dfrac{f(5) - f(4)}{5 - 4}$	$= \dfrac{36 - 25}{1}$	$= 11$
sur [4; 4,5]	on a	$\dfrac{f(4{,}5) - f(4)}{4{,}5 - 4}$	$= \dfrac{30{,}25 - 25}{0{,}5}$	$= 10{,}5$
sur [4; 4,1]	on a	$\dfrac{f(4{,}1) - f(4)}{4{,}1 - 4}$	$= \dfrac{26{,}01 - 25}{0{,}1}$	$= 10{,}1$
sur [4; 4,01]	on a	$\dfrac{f(4{,}01) - f(4)}{4{,}01 - 4}$	$= \dfrac{25{,}1001 - 25}{0{,}01}$	$= 10{,}01$
sur [4; 4,001]	on a	$\dfrac{f(4{,}001) - f(4)}{4{,}001 - 4}$	$= \dfrac{25{,}010001 - 25}{0{,}001}$	$= 10{,}001$

Il semble donc qu'à la 4e minute le taux de croissance sera très près de 10 bactéries/minute.

Aurait-il été possible de résoudre le problème sans avoir à utiliser la calculatrice?

La réponse est oui. On aurait pu éviter ces longs calculs et résoudre le problème autrement en utilisant la notion de limite.

Voyons comment on procède.

a) On considère l'intervalle de temps $[4, t]$,

b) On trouve le taux de variation moyen de la fonction sur cet intervalle,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

c) On évalue la limite lorsque t s'approche de 4,

on se souvient que la croissance des bactéries est définie par la fonction

$f(t) = (t + 1)^2$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4} &= \lim_{t \to 4} \frac{(t + 1)^2 - 25}{t - 4} \\
&= \frac{0}{0} \text{ IND.} \\
&= \lim_{t \to 4} \frac{(t^2 + 2t + 1) - 25}{t - 4} \\
&= \lim_{t \to 4} \frac{t^2 + 2t - 24}{t - 4} \\
&= \lim_{t \to 4} \frac{(t + 6)\cancel{(t - 4)}}{\cancel{t - 4}} \\
&= \lim_{t \to 4} (t + 6) \\
&= 10
\end{aligned}$$

La valeur obtenue s'appelle le *taux de variation instantané* de la population des bactéries à la 4e minute.

Normalement, on devrait considérer l'intervalle

- $[4, t]$ (avec $t > 4$) pour lequel le taux de variation moyen est

$$\frac{f(t) - f(4)}{t - 4} \quad \text{et évaluer} \quad \lim_{t \to 4^+} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

Puis ensuite considérer l'intervalle

- $[t, 4]$ (avec $t < 4$) pour lequel le taux de variation moyen est

$$\frac{f(4) - f(t)}{4 - t} \quad \text{et évaluer} \quad \lim_{t \to 4^-} \frac{f(4) - f(t)}{4 - t}$$

Mais cela est inutile puisque

on multiplie par -1, le numérateur et le dénominateur

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 4^+} \dfrac{f(t) - f(4)}{t - 4} \\[2ex] \lim\limits_{t \to 4^-} \dfrac{f(4) - f(t)}{4 - t} = \lim\limits_{t \to 4^-} \dfrac{f(t) - f(4)}{t - 4} \end{array}\right\} = \lim_{t \to 4} \frac{f(t) - f(4)}{t - 4}$$

définition 3.1.2

taux de variation instantané

(première forme)

Le taux de variation instantané d'une fonction f pour $x = a$ de son domaine est donné par

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

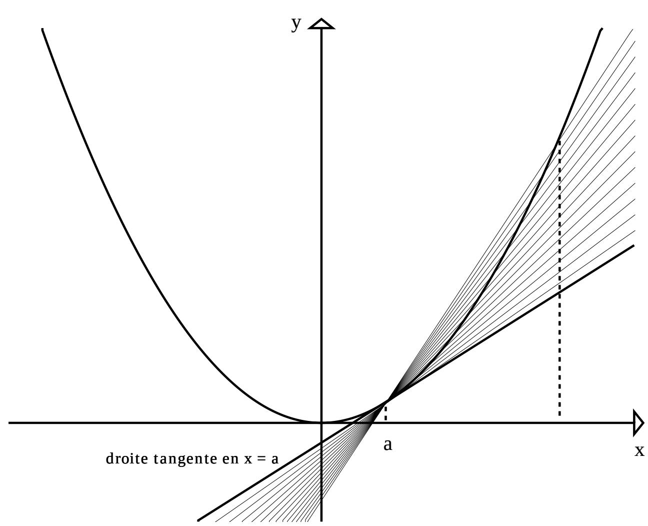
lorsque cette limite existe dans **R**.

Convenons immédiatement que pour le reste du cours, on emploiera les termes taux de variation à la place de taux de variation instantané.

droite tangente

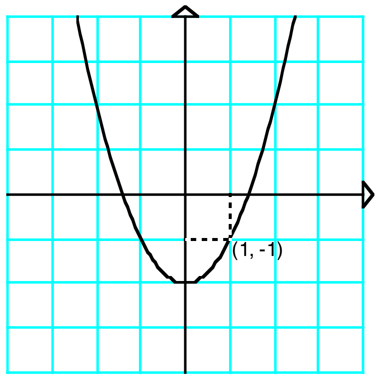
Lorsqu'on calcule le taux de variation d'une fonction en une valeur $x = a$, on calcule la *pente* d'une droite qu'on appelle *droite tangente* à la courbe en $x = a$.

La droite tangente est en fait la limite des droites sécantes lorsque la variable x prend des valeurs de plus en plus près de a.

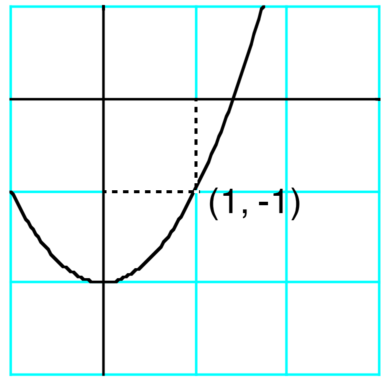


La tangente d'une fonction en $x = a$ peut aussi être considérée comme la linéarisation du graphique de la fonction dans un voisinage immédiat de a.

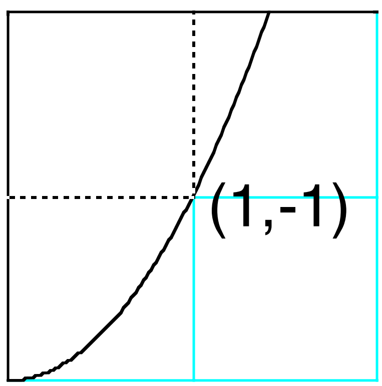
en grossissant plusieurs fois la courbe de $f(x) = x^2 - 2$, on remarque que dans un voisinage immédiat de $x = 1$, elle devient presque rectiligne. La droite ainsi obtenue est appelée la tangente à la courbe en $x = 1$



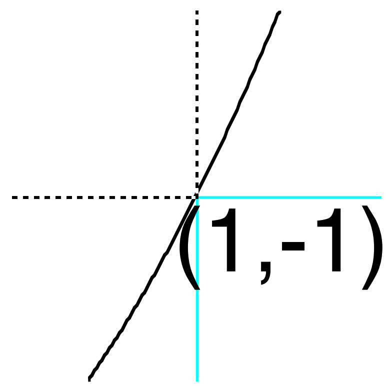
$f(x) = x^2 - 2$



grossissement de 2×



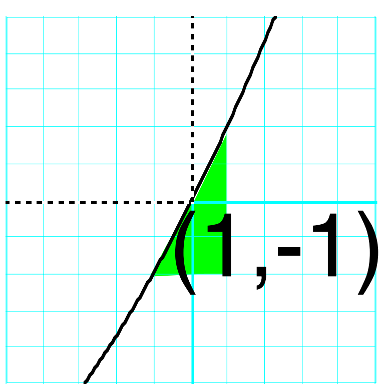
grossissement de 4×



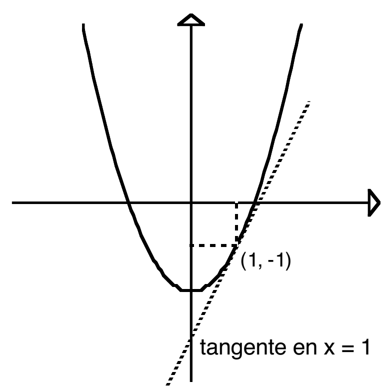
grossissement de 8×

à l'aide d'un quadrillage plus fin, on estime la pente de la tangente en $x = 1$ à environ

$$\frac{4}{2} = 2$$



grossissement de 8×



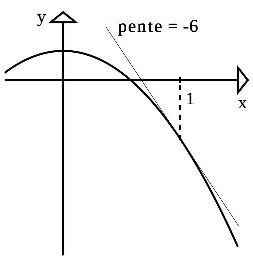
exemple 3.1.4

Calculer le taux de variation de la fonction $f(x) = 1 - 3x^2$

a) pour $x = 1$,
b) pour $x = 5$,
c) pour $x = -2$.

$f(1) = 1 - 3(1)^2 = -2$

a) pour $x = 1$,



$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - 3x^2) - (-2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3 - 3x^2}{x - 1}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3(1 - x^2)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3\cancel{(1 - x)}(1 + x)}{\underset{(-1)}{\cancel{x - 1}}}$$

$$= \lim_{x \to 1} -3(1 + x)$$

$$= -6$$

---

b) pour $x = 5$,

rép; -30

c) pour $x = -2$,

rép; 12

exemple 3.1.5

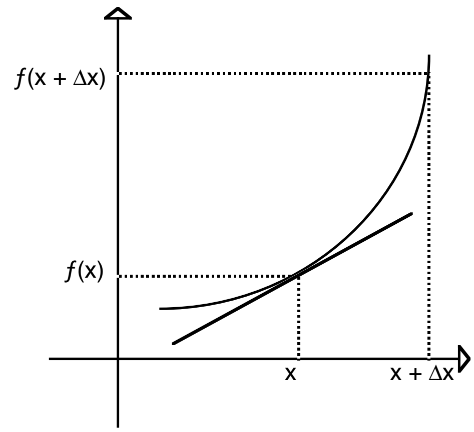
La vitesse v d'un objet (en mètres par seconde) est donnée par l'équation $v(t) = t^2 + 3t + 1$. Calculer le taux de variation de la vitesse de l'objet par rapport au temps lorsque $t = 5$ secondes.

le taux de variation d'une vitesse par rapport à un temps correspond à une accélération

rép; 13 m/s^2

Il existe une autre façon de calculer le taux de variation d'une fonction. Bien que cette autre façon exige un peu plus de manipulations algébriques, elle est beaucoup plus pratique que la première. La différence entre les deux méthodes en est une de notation.

Appelons x une valeur quelconque du domaine de la fonction et donnons à x un accroissement Δx (positif ou négatif).



Le taux de variation de la fonction f pour une valeur x de son domaine est donné par

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

lorsque cette limite existe dans **R**.

définition 3.1.3

taux de variation instantané

(seconde forme)

Le taux de variation de la fonction f pour une valeur x de son domaine est donné par

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

lorsque cette limite existe dans **R**.

Cette nouvelle forme donne le taux de variation de la fonction (quand il existe) non pas pour une seule valeur mais pour toutes les valeurs de son domaine. Voilà un gros avantage sur la première forme.

Pour s'en convaincre, reprenons l'exemple 3.1.4.

exemple 3.1.5

Donner l'expression du comportement général du taux de variation de la fonction $f(x) = 1 - 3x^2$.

L'expression générale du taux de variation de la fonction est donnée par

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 - 3(x + \Delta x)^2\right) - (1 - 3x^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - 3x^2 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 - 1 + 3x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6x\Delta x - 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(-6x - 3\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-6x - 3\Delta x)$$

$$= -6x$$

Le résultat est général. Le taux de variation lorsque

comparer avec les réponses de l'exemple 3.1.4

- $x = 1$ est $-6(1) = -6$,
- $x = 5$ est $-6(5) = -30$,
- $x = -2$ est $-6(-2) = 12$.

exemple 3.1.6

Donner l'expression du comportement général du taux de variation de la fonction $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

---

rép: $-\dfrac{1}{x^2}$

exemple 3.1.7

On observe une culture de bactéries en faisant son dénombrement à chaque heure. À l'aide de ces informations, on obtient l'équation suivante

$$N(t) = 50\sqrt{t} + 300$$

où $N(t)$ représente une estimation du nombre de bactéries après t heures d'observation.

a) Quel est le taux de variation moyen du nombre de bactéries entre $t = 1$ heure et $t = 9$ heures?
b) Quelle est l'expression générale représentant le taux de variation de la population des bactéries par rapport au temps?
c) Quel est le taux de variation de la population des bactéries lorsque $t = 1$ heure ; lorsque $t = 9$ heures?

a) pour calculer le taux de variation moyen de la population, utiliser la définition 3.1.1

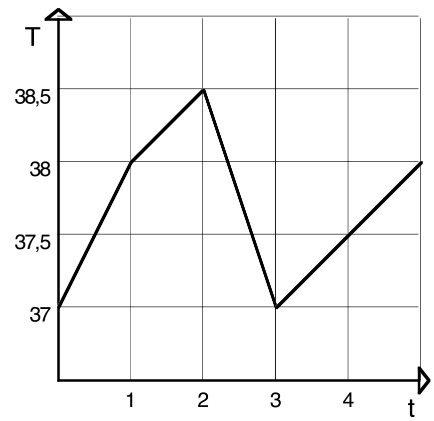
b) pour obtenir l'expression générale représentant le taux de variation de la population, utiliser la définition 3.1.3

rép: a) 12,5 bactéries/heure ; b) $\dfrac{25}{\sqrt{t}}$ *; c) 25 bactéries/heure, 8,3 bactéries/heure*

Exercices 3.1

1. La courbe ci-contre représente la température T en degré Celcius d'un patient en fonction du temps t exprimé en heures. Trouver le taux de variation moyen de la température T par rapport au temps t sur les intervalles suivants:

   a) de $t = 0$ à $t = 2$,
   b) de $t = 1$ à $t = 2$,
   c) de $t = 1$ à $t = 5$,
   d) de $t = 1$ à $t = 3$,



2. Pour chacune des fonctions, calculer le taux de variation moyen par rapport à x sur l'intervalle indiqué.

   a) $f_1(x) = 2x - 1$ sur $[1, 2]$

   b) $f_2(x) = 2x^2 + x - 4$ sur $[-1, 3]$

   c) $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[2, 5]$

   d) $f_4(x) = \sqrt{x}$ sur $[1, 4]$

   e) $f_5(x) = 1 - x$ sur $[a, x]$

   f) $f_6(x) = x^2 + 2x - 1$ sur $[x, x + \Delta x]$

3. Après t minutes de croissance, la masse d'une certaine culture bactérienne est de $2t^3$ grammes.

   a) Déterminer l'augmentation de la masse (en grammes) sur l'intervalle de temps [2; 2,01].
   b) Déterminer le taux de variation moyen de la masse (en grammes/minute) sur l'intervalle de temps [2; 2,01].

4. Calculer (si possible) le taux de variation des fonctions par rapport à x lorsque $x = 2$, $x = 0$ et $x = -1$ en utilisant <u>la première forme</u> (définition 3.1.2).

   a) $f_1(x) = 1 - 5x$

   b) $f_2(x) = 8 - 5x^2$

   c) $f_3(x) = \sqrt{x}$

5. Sur sa piste d'envol, un avion se déplace à la vitesse v(t) (en mètres par seconde) de

$$v(t) = \frac{t^2}{20} \quad \text{où} \quad 0 \le t \le 60$$

Quelle est son accélération à la 20^e seconde? (utiliser la première forme - définition 3.1.2)

6. Donner l'expression du comportement général du taux de variation par rapport à x de chacune des fonctions. (utiliser la seconde forme - définition 3.1.3)

a) $f_1(x) = 4$

b) $f_2(x) = 3x + 4$

c) $f_3(x) = 2x^2 + 4x + 1$

d) $f_4(x) = x^3 - 1$

7. Après analyse, des démographes prédisent que dans t années à compter d'aujourd'hui, la population d'un petit village sera donnée par l'équation

$$P(t) = 3000 - t^2 + 70t \text{ habitants}$$

a) Quelle est la population actuelle du village?
Que sera-t-elle dans 10 ans?
b) Quel sera le taux de variation moyen de cette population dans les 10 prochaines années (c'est-à-dire sur l'intervalle [0, 10])?
c) Quelle est l'expression générale représentant le taux de variation de la population du village par rapport au temps?
d) Quel est le taux de variation actuel de la population?
Que sera-t-il dans 5 ans, dans 10 ans?
e) Dans combien d'années le taux de variation de la population sera-t-il de 30 habitants/année?

8. On lance un caillou dans un lac. Le caillou produit des ondes circulaires à partir de son point de chute.

a) Calculer le taux de variation moyen de l'aire du cercle ainsi formé lorsque le rayon passe de 1 mètre à 4 mètres.
b) Trouver l'expression générale représentant le taux de variation de l'aire du cercle par rapport au rayon.
c) Quel est le taux de variation de l'aire du cercle lorsque le rayon est de 1 mètre, de 4 mètres?

9. Du haut d'un pont de 125 mètres, on laisse tomber une pierre. La distance s(t) (en mètres) parcourue par cette pierre au temps t (en secondes) est donnée par l'équation

$$s(t) = 5t^2$$

a) Trouver la vitesse de la pierre après t secondes.
b) Calculer la vitesse de la pierre après 1 seconde, 2 secondes et 3 secondes.
c) Après combien de temps touchera-t-elle l'eau?
Quelle sera sa vitesse à ce moment?

Réponses aux exercices 3.1

1. a) 0,75 °/h
   b) 0,5 °/h
   c) 0 °/h
   d) -0,5 °/h

2. a) 2
   b) 5
   c) -0,1
   d) $\frac{1}{3}$
   e) -1
   f) $2x + 2 + \Delta x \quad (\Delta x \neq 0)$

3. a) 0,241 g
   b) 24,1 g/min

4.

	x = 2	x = 0	x = -1
a)	-5	-5	-5
b)	-20	0	10
c)	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\nexists$	$\nexists$

5. 2 m/s^2

6. a) 0
   b) 3
   c) $4(x + 1)$
   d) $3x^2$

7. a) 3000 hab.
   3600 hab.
   b) 60 hab./année
   c) 70 - 2t
   d) 70 hab./année (pour t = 0)
   60 hab./année (pour t = 5)
   50 hab./année (pour t = 10)
   e) dans 20 ans

8. a) 5π m^2/mètre de rayon
   b) $2\pi r$ m^2/mètre de rayon
   c) 2π m^2/mètre de rayon
   8π m^2/mètre de rayon

9. a) 10t m/s.
   b) 10 m/s. ; 20 m/s. ; 30 m/s.
   c) 5 s ; 50 m/s.

3.2 Définition de la dérivée d'une fonction

définition 3.2.1

la dérivée d'une fonction

La dérivée d'une fonction $y = f(x)$ que l'on note $\frac{dy}{dx}$ est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

si cette limite existe dans **R**.

Lorsque la limite existe, on dit que la fonction est dérivable en x. Si une fonction est dérivable pour toutes les valeurs de son domaine, on dit simplement qu'elle est dérivable.

autres notations

c'est la notation qu'utilisait Leibniz et celle que nous utiliserons le plus souvent

Pour désigner la dérivée de la fonction $y = f(x)$ par rapport à x, il existe plusieurs notations. La principale notation est celle qui apparaît dans la définition 3.2.1.

- $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}f(x)$ aussi appelée la notation de Leibniz.

Il est important de noter que lorsqu'on utilise cette notation, il faut la considérer en bloc comme un symbole plutôt que comme une fraction. Leibniz représenta par dx la quantité infinitésimale Δx (la lettre romaine *d* correspondant à la lettre grecque *Δ*). Lorsque Δx devint l'infinitésimal dx, Δy devint du même coup l'infinitésimal dy et le rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ devint } \frac{dy}{dx}.$$

Les autres notations sont: y' ou $f'(x)$.

définition 3.2.2

la dérivée d'une fonction lorsque x = a

La dérivée d'une fonction $y = f(x)$ pour $x = a$ que l'on note $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ est donnée par

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

si cette limite existe dans **R**.

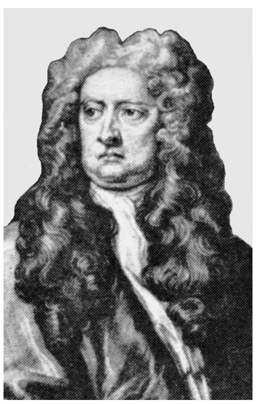
autres notations

$$y'|_{x=a} \quad \text{ou} \quad f'(a)$$

C'est la définition 3.2.1 qui sera utilisée le plus souvent.

Rappel historique

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)



Isaac Newton (1642-1727)

tiré en partie du livre

"Le calcul différentiel et intégral par la résolution de problèmes"

de Neal Read

La notion de dérivée a été inventée simultanément par Leibniz (philosophe et mathématicien allemand) et Newton (physicien, mathématicien et astronome anglais). Ces deux célèbres personnages poursuivirent presque en même temps, des objectifs aussi différents que la recherche d'un procédé général pour le calcul de la pente de la tangente à une courbe en un point (Leibniz) et la recherche d'un instrument mathématique adéquat pour l'étude du mouvement des corps (Newton).

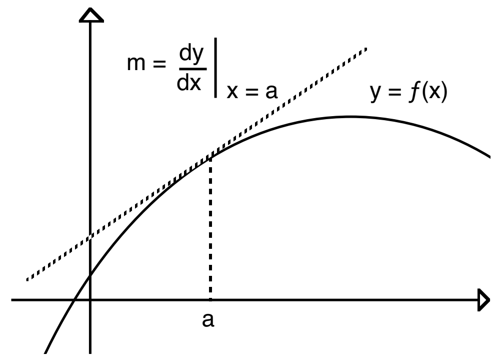
Leibniz a repris les travaux de son contemporain anglais, Newton qui quelques années auparavant avait communiqué en privé à ses amis le résultat de ses recherches sur le calcul différentiel. Bien qu'une polémique sur la paternité de cette découverte s'engagea plus tard, de toute évidence les deux hommes ont travaillé indépendamment et suivi des méthodes différentes dans la mise au point de cette nouvelle analyse. Dans les années 1670, Leibniz étudia les techniques algébriques introduites par René Descartes dans l'analyse des courbes. Il en tira une méthode de calcul qui fournissait un algorithme général pour résoudre les problèmes de tangentes et d'aires. Vers 1677, il donna les règles pour calculer les dérivées d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions. Il est curieux de noter que le fameux écrit de Leibniz dans lequel il donne les règles de dérivation ne contient que six pages, et que ces règles y sont données sans aucune démonstration.

Quand à Newton, il a écrit un Traité de la quadrature des courbes, dans lequel il posait les règles du calcul des fluxions (au même moment ou Leibniz inventait le calcul différentiel). Le mot fluxion pourrait se traduire par accroissement ou par différentielle. Le rapport des fluxions d'une fonction était en fait la dérivée de la fonction.

Bien que Leibniz partagea avec Newton les honneurs de l'invention du calcul différentiel et intégral, son oeuvre joua historiquement un plus grand rôle. Newton était lent à publier et préférait travailler seul. Leibniz, au contraire, créa, pour promouvoir ses méthodes, une dynamique école de mathématiciens. La notation et les algorithmes du calcul leibnizien sont plus pratiques et faciles à utiliser que le lourd calcul fluxionnel de Newton. Tout au long de sa vie, Leibniz s'intéressa au problème philosophique du langage et il insista consciencieusement sur l'importance de la notation dans son nouveau calcul (c'est lui qui a introduit la notation utilisée de nos jours dans le calcul différentiel). Le déclin des mathématiques britanniques qui suivit la mort de Newton résulte notamment du refus des chercheurs anglais de reconnaître la puissance et la supériorité des méthodes de Leibniz.

En se référant à la section précédente, la dérivée peut être interprétée comme le <u>taux de variation instantané</u> d'une fonction en une valeur donnée.

D'un point de vue géométrique, la dérivée d'une fonction c'est la <u>pente de la droite tangente</u> à la courbe de la fonction en une valeur donnée.



exemple 3.2.1

Trouver $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ si $y = \sqrt{4 - 3x}$.

---

par la définition 3.2.2

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4 - 3x} - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4 - 3x} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{4 - 3x} + 1}{\sqrt{4 - 3x} + 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(4 - 3x) - 1}{(x - 1)(\sqrt{4 - 3x} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-3(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{4 - 3x} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-3}{\sqrt{4 - 3x} + 1}$$

$$= -\frac{3}{2}$$

exemple 3.2.2

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{x - 1}{x + 1}$.

---

par la définition 3.2.1

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x + \Delta x) - 1}{(x + \Delta x) + 1} - \frac{x - 1}{x + 1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x - 1)(x + 1) - (x - 1)(x + \Delta x + 1)}{\Delta x(x + \Delta x + 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + x + x\Delta x + \Delta x - x - 1 - x^2 - x\Delta x - x + x + \Delta x + 1}{\Delta x(x + \Delta x + 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x(x + \Delta x + 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)} = \frac{2}{(x + 1)^2}$$

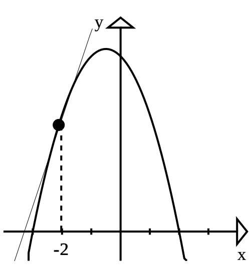
exemple 3.2.3

Soit $y = 6 - x - x^2$,

a) trouver la pente de la droite tangente à la courbe lorsque $x = -2$,
b) déterminer l'équation de la droite tangente pour cette valeur.

---

a) La pente de la droite tangente à la courbe lorsque $x = -2$ est donnée par



$y = 6 - x - x^2$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = -2} = \lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(6 - x - x^2) - 4}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{2 - x - x^2}{x + 2}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(2 + x)(1 - x)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} (1 - x) = 3$$

l'équation de la droite de pente m est $y = mx + b$

si $x = -2$ alors $y = 6 - (-2) - (-2)^2 = 4$

b) La pente de la droite tangente est 3. L'équation de cette droite aura donc la forme

$$y = 3x + b.$$

Puisque la droite passe par le point (-2,4), on a que

$$(4) = 3(-2) + b \;\Rightarrow\; b = 10.$$

L'équation de la droite tangente est donc $y = 3x + 10$.

exemple 3.2.4

Soit $y = x^2 - 2x$.

a) Trouver y'.

b) Pour quelle valeur de x aura-t-on une tangente horizontale ?

rép: a) $y' = 2x - 2$; b) $x = 1$

exemple 3.2.5

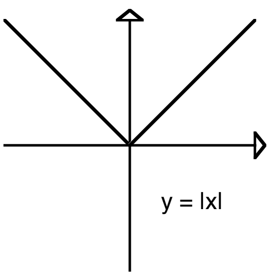
Soit $y = |x|$, trouver $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ IND.}$$



$$= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1 \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \end{cases}$$

par conséquent $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} \nexists$

exemple 3.2.6

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$, trouver $f\,'(1)$.

---

rép: $f\,'(1) \nexists$

Il existe une relation intéressante entre la dérivée et la continuité

proposition 3.2.1

relation entre dérivée et continuité

> Si une fonction f est dérivable lorsque $x = a$ alors cette fonction est continue pour $x = a$.

démonstration

Soit $y = f(x)$ est une fonction dérivable lorsque $x = a$. On a

par hypothèse

$$f\,'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = k \quad \text{(k étant un nombre réel)}$$

On peut sûrement affirmer que

on multiplie et on divise par (x - a)

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \to a} \left[\big(f(x) - f(a)\big) \cdot \frac{(x - a)}{(x - a)} \right]$$

$$= \lim_{x \to a} \left[\frac{\big(f(x) - f(a)\big)}{(x - a)} \cdot (x - a) \right]$$

la limite d'un produit est égale au produit des limites si les limites existent

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= (k)\,(0)$$

$$= 0$$

la limite d'une différence est égale à la différence des limites si les limites existent

De plus

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a) = 0$$

la limite d'une constante est égale à la constante

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$$

$$\text{et} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

par la définition 2,1.1

Par conséquent la fonction f est continue pour $x = a$.

Ainsi *une fonction dérivable pour une valeur donnée est toujours continue pour cette valeur*. Mais attention la réciproque n'est pas vrai! *Une fonction continue pour une valeur donnée n'est pas toujours dérivable pour cette valeur*.

corollaire 3.2.1

contraposé de la proposition 3.2.1

> Si une fonction f est discontinue pour $x = a$ alors cette fonction n'est pas dérivable lorsque $x = a$.

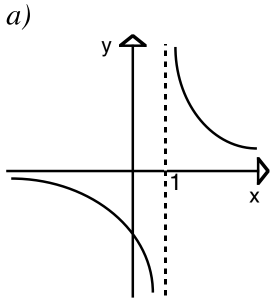
D'une façon générale, une fonction n'est pas dérivable pour x = a, si elle

- est *discontinue* pour x = a ou
- possède une *tangente verticale* lorsque x = a ou
- présente un *point anguleux* lorsque x = a.
- présente un *point de rebroussement* lorsque x = a.

exemple 3.2.7

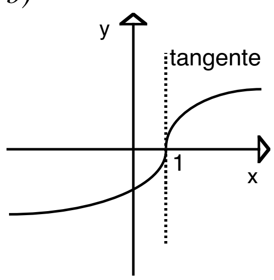
En examinant les graphiques suivants, expliquer pourquoi les fonctions associées à ces graphiques ne sont pas dérivables lorsque x = 1.

a)



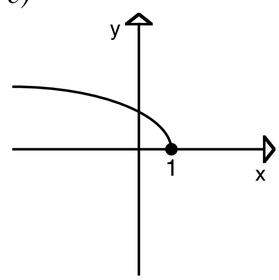
$f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

b)



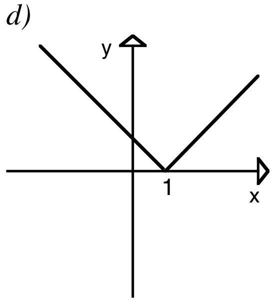
$f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

c)



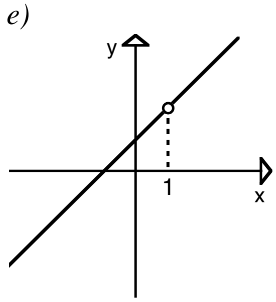
$f(x) = \sqrt{1 - x}$

d)



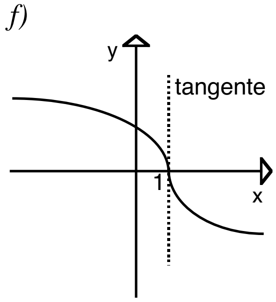
$f(x) = |x - 1|$

e)



$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

f)



$f(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

Dans chacun des cas, la fonction n'est pas dérivable lorsque x = 1.

à remarquer que b), d) et f) sont des graphiques associés à des fonctions continues pour x = 1 mais non dérivables lorsque x = 1

- a), c) et e) sont discontinues pour x = 1,
- b) et f) possèdent une tangente verticale lorsque x = 1 (le taux de variation lorsque x = 1 est infini),
- d) présente un point anguleux lorsque x = 1 (voir l'exemple 3.2.5).

Exercices 3.2

1. En utilisant la définition 3.2.2 de la dérivée trouver $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = a}$

   a) $y = \sqrt{x - 2}$ $a = 3$

   b) $y = 5 - \dfrac{2}{x}$ $a = -1$

   c) $y = \dfrac{x - 1}{2 + x}$ $a = 0$

   d) $y = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$ $a = 0$

2. En utilisant la définition 3.2.1 de la dérivée trouver $\dfrac{dy}{dx}$

   a) $y = \dfrac{1}{x^2} + 3$

   b) $y = 7\sqrt{5 - 3x}$

   c) $y = \dfrac{2x}{x - 7}$

   d) $y = x - \sqrt{x}$

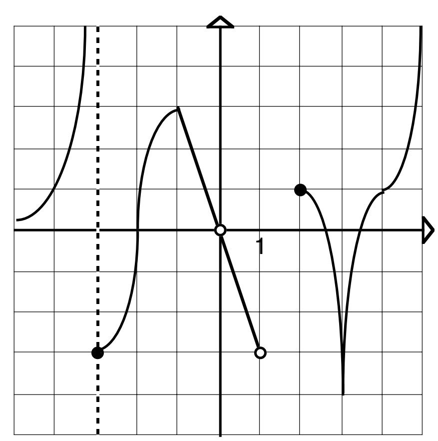
3. Soit $y = \dfrac{1}{x - 1}$

   a) déterminer la pente de la droite tangente à la courbe de la fonction lorsque $x = 0$,
   b) trouver l'équation de la droite tangente lorsque $x = 0$,
   c) tracer la courbe représentative de la fonction et la tangente lorsque $x = 0$.

4. Soit $y = 2x^2 - 7x + 9$

   a) trouver y'
   b) pour quel x la pente de la tangente à la courbe de la fonction égale-t-elle 5 ?

5. Indiquer pour quelles valeurs entre -5 et 5, la dérivée n'existe pas.



6. Après t minutes de croissance, la masse M d'une culture bactérienne est $M = t^3$ mg.

   a) Déterminer $\dfrac{dM}{dt}$,

   b) Calculer $\left.\dfrac{dM}{dt}\right|_{t=2}$; $\left.\dfrac{dM}{dt}\right|_{t=5}$; $\left.\dfrac{dM}{dt}\right|_{t=12}$.

7. Deux produits chimiques X et Y réagissent pour former un produit Z. La quantité $Q(t)$ en grammes, du produit Z en fonction du temps t en secondes est donnée par l'équation

$$Q(t) = \frac{t}{t+1}$$

   a) Trouver $\dfrac{dQ}{dt}$,

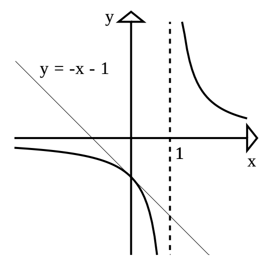
   b) Calculer le taux de variation de la quantité obtenue du produit Z par rapport au temps à la 1^re^ seconde ; 4^e^ seconde ; 9^e^ seconde .

Réponses aux exercices 3.2

1. a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$
   b) 2 d) 0

2. a) $-\frac{2}{x^3}$ c) $-\frac{14}{(x-7)^2}$
   b) $-\frac{21}{2\sqrt{5-3x}}$ d) $\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

3. a) -1
   b) y = -x -1
   c)



4. a) y ' = 4x - 7
   b) x = 3

5. x = -3 ; x = -2 ; x = -1 ; x = 0 ; $1 \le x \le 2$; x = 3 ; x = 5

6. a) $3t^2$ b) 12 mg/min
   75 mg/min
   432 mg/min

7 a) $\frac{1}{(t+1)^2}$ b) 0,25 g/s ; 0,04 g/s ; 0,01 g/s

3.3 Règles de dérivation

La dérivée de la fonction polynomiale

$$y = x^9 + 5x^7 + 3x - 1$$

est par définition

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big((x + \Delta x)^9 + 5(x + \Delta x)^7 + 3(x + \Delta x) - 1\big) - (x^9 + 5x^7 + 3x - 1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{0}{0} \quad \text{IND.}$$

Imaginez, pour lever l'indétermination, il faut d'abord développer les binômes $(x + \Delta x)^9$ et $(x + \Delta x)^7$ puis ensuite simplifier l'expression. Tout un travail! Évaluer une dérivée en utilisant la définition devient rapidement très laborieux. Leibniz a vite senti le besoin de créer des règles de dérivation beaucoup plus pratiques. C'est l'étude de ces règles que nous abordons dans cette section.

règle 1

dérivée d'une constante

$$\frac{d}{dx} k = 0 \qquad (k \in \mathbf{R})$$

$f(x) = k$
$f(x + \Delta x) = k$

$$\frac{d}{dx} k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k - k}{\Delta x}$$

$\frac{k - k}{\Delta x} = 0$ puisque le numérateur est nul

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 0$$

$$= 0$$

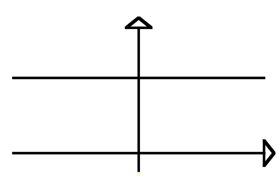
exemple 3.3.1

la dérivée d'une constante est nulle

$$\frac{d}{dx} 3 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sqrt{2} = 0$$

$$\frac{d}{dr} \pi = 0$$



le taux de croissance est nul lorsque la fonction est constante

règle 2

dérivée d'une puissance

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbf{R})$$

démonstration

La démonstration sera faite seulement pour le cas où n est un entier positif même si la règle est valable pour tout n dans les réels. Nous aurons à utiliser la factorisation du binôme $a^n - b^n$ pour démontrer ce résultat. Examinons d'abord les factorisations suivantes:

$$\begin{aligned}
a^1 - b^1 &= (a - b)\\
a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b)\\
a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)\\
a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)\\
&= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)\\
&= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)
\end{aligned}$$

il est à prévoir que

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$$

Nous sommes maintenant prêt à démontrer la règle 2.

$f(x) = x^n$
$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$

$$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

pour lever l'indétermination, on utilise la factorisation de $a^n - b^n$ en posant $a = x + \Delta x$ et $b = x$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x + \Delta x) - x\right]\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + .. + x^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{n \text{ fois}}$$

$$= nx^{n-1}$$

exemple 3.3.2

a) $y = x^5$ trouver $\dfrac{dy}{dx}$; c) $r = \dfrac{1}{s^2}$ trouver $\dfrac{dr}{ds}$

b) $u = \sqrt{t}$ trouver $\dfrac{du}{dt}$; d) $v = \dfrac{1}{\sqrt{u^3}}$ trouver $\dfrac{dv}{du}$

---

a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^5 = \underbrace{5x^4}_{\text{règle 2}}$$

b) $$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{1/2} = \underbrace{\frac{1}{2}t^{-1/2}}_{\text{règle 2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

c) $$\frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{d}{ds}s^{-2} = \underbrace{-2s^{-3}}_{\text{règle 2}} = -2\frac{1}{s^3} = -\frac{2}{s^3}$$

d) $$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du}u^{-3/2} = \underbrace{-\frac{3}{2}u^{-5/2}}_{\text{règle 2}} = -\frac{3}{2\sqrt{u^5}} = -\frac{3}{2u^2\sqrt{u}}$$

règle 3

dérivée du produit d'une constante par une fonction

$$\frac{d}{dx}kg(x) = k\frac{d}{dx}g(x) \qquad (k \in \mathbf{R})$$

démonstration

$f(x) = kg(x)$
$f(x + \Delta x) = kg(x + \Delta x)$

$$\frac{d}{dx}kg(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{kg(x+\Delta x) - kg(x)}{\Delta x}$$

la limite d'une constante par une fonction égale la constante par la limite de la fonction si la limite existe

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{k\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= k\lim_{\Delta x \to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

par définition de la dérivée

$$= k\frac{d}{dx}g(x)$$

exemple 3.3.3

a) Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{8}{x}$, b) trouver $\frac{d}{dr}(\pi r^2)$

a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{8}{x}\right] = \underbrace{8\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]}_{\text{règle 3}} = 8\frac{d}{dx}x^{-1} = \underbrace{8(-1x^{-2})}_{\text{règle 2}} = -\frac{8}{x^2}$$

b) $$\frac{d}{dr}\pi r^2 = \underbrace{\pi\frac{d}{dr}r^2}_{\text{règle 3}} = \underbrace{\pi(2r)}_{\text{règle 2}} = 2\pi r$$

règle 4

dérivée d'une somme de fonctions

$$\frac{d}{dx}\left[g(x) \pm h(x)\right] = \frac{d}{dx}g(x) \pm \frac{d}{dx}h(x)$$

démonstration

$f(x) = g(x) + h(x)$
$f(x+\Delta x) = g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x)$

$$\frac{d}{dx}\left[g(x) + h(x)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x)\right] - \left[g(x) + h(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) + h(x+\Delta x) - g(x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right] + \left[h(x+\Delta x) - h(x)\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}\right]$$

la limite d'une somme est égale à la somme des limites si les limites existent

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}\right]$$

par définition de la dérivée

$$= \frac{d}{dx}g(x) + \frac{d}{dx}h(x)\ .$$

$\frac{d}{dx}\left[g(x) - h(x)\right] = \frac{d}{dx}g(x) - \frac{d}{dx}h(x)$ se démontre de la même façon.

exemple 3.3.4

Si $y = 2x^3 + 5$ trouver $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^3 + 5) = \underbrace{2\frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}5}_{\text{règle 4 et règle 3}} = \underbrace{2(3x^2)}_{\text{règle 2}} + \underbrace{0}_{\text{règle 1}} = 6x^2$$

La règle 4 se généralise à plusieurs fonctions. Ainsi

$$\frac{d}{dx}\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \ ...\right] = \frac{d}{dx} f_1(x) \pm \frac{d}{dx} f_2(x) \pm \frac{d}{dx} f_3(x) \ \pm \ ...$$

exemple 3.3.5

Trouver $\frac{d}{dx}(4x^3 - 3x^2 + 5x - 1)$

rép: $12x^2 - 6x + 5$

exemple 3.3.6

Si $u = \frac{3v - 2\sqrt{v}}{v^2}$ trouver $\frac{du}{dv}$

la dérivée d'un quotient n'est pas égale au quotient des dérivées

pas plus que la dérivée d'un produit n'égale le produit des dérivées

$$\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv}\left[\frac{3v - 2\sqrt{v}}{v^2}\right] = \frac{d}{dv}\left[3v^{-1} - 2v^{-3/2}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dv}\, 3v^{-1} - \frac{d}{dv}\left[2v^{-3/2}\right]}_{\text{règle 4}}$$

$$= \underbrace{3\frac{d}{dv}\, v^{-1}}_{\text{règle 3}} - \underbrace{2\frac{d}{dv}\, v^{-3/2}}_{\text{règle 3}}$$

$$= \underbrace{3(-1v^{-2})}_{\text{règle 2}} - \underbrace{2\left(-\frac{3}{2}\, v^{-5/2}\right)}_{\text{règle 2}}$$

$$= -\frac{3}{v^2} + \frac{3}{\sqrt{v^5}}$$

$$= -\frac{3}{v^2} + \frac{3}{v^2\sqrt{v}}$$

$$= -3\left(\frac{\sqrt{v} - 1}{v^2\sqrt{v}}\right)$$

Exercices 3.3.1

1. Trouver la dérivée en appliquant les règles 1 à 4 (a et b sont des constantes)

a) $y = x^3$

b) $y = \sqrt[3]{x}$

c) $y = x^{3/4}$

d) $y = x^{-27}$

e) $y = \dfrac{1}{x^3}$

f) $y = t^5 \sqrt{t}$

g) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

h) $y = 8x^3 + 4x^2 - 6x - 5$

i) $y = at^4 + bt^3 - 7$

j) $y = 3x - 2x^{-2}$

k) $y = x^2 - a^2$

l) $y = \dfrac{t^4 - 3t^2 + 1}{2}$

m) $y = (3x + 1)^2$

n) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3}$

o) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

p) $y = \dfrac{2t^2}{3\sqrt{t}} + 2\sqrt{t} - 1$

2. Trouver $\left.\dfrac{dy}{d\theta}\right|_{\theta = 1}$ si $y = \dfrac{2\theta^3 - 3\theta - 1}{\theta}$

3. On prévoit que dans t mois, la population d'une ville sera de

$$P(t) = 2t + 4t\sqrt{t} + 5000 \text{ habitants}$$

Quel sera le taux de variation de la population dans 9 mois?

4. On lance une balle vers le bas du toit d'un édifice de 49 mètres. La distance parcourue par la balle en tout temps t (en secondes) est donnée par l'équation

$$s(t) = 14{,}7t + 4{,}9t^2 \text{ mètres}$$

a) Calculer la vitesse de la balle en tout temps t.
b) Quelle est la vitesse initiale de la balle?
c) Après combien de secondes la balle touchera-t-elle le sol?
d) Quelle sera la vitesse de la balle lorsqu'elle touchera le sol?

5. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la tangente à la courbe

$$y = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6$$

est horizontale.

6. Déterminer en quel point, la droite tangente à la courbe $y = x\sqrt{x}$ est parallèle à la droite $y = 3x + 6$.

7. Trouver l'équation de la droite tangente à chacune des fonctions

   a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ au point $(-1, 1)$,

   b) $g(t) = \frac{(t^2 - 1)(t + 1)}{t}$ lorsque $t = 1$.

8. Soit $f(x) = ax^2 + bx$; trouver les valeurs de a et b sachant que $f(-1) = 5$ et la pente de la tangente en $x = 1$ est 7.

9. Soit la courbe définie par l'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x} - 1$ et la droite tangente à cette courbe lorsque $x = 2$. Déterminer en quel point, cette droite tangente coupera

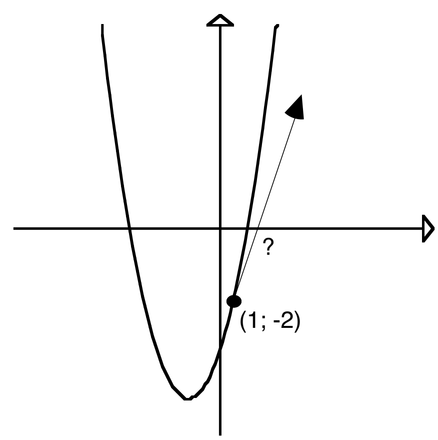
   a) l'axe des y ?
   b) l'axe des x ?

10. Une bille se déplace de gauche vers la droite sur la courbe définie par l'équation

$$y = x^2 + 3x - 6$$

Au point $(1, -2)$, elle quitte sa trajectoire selon la tangente à la courbe en ce point.

   a) Quel sera le point d'abscisse touché?
   b) En quel point doit-elle quitter sa trajectoire pour toucher le point $(2, 0)$ de l'axe des x ?



Réponses aux exercices 3.3.1

1. a) $3x^2$
   b) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
   c) $\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
   d) $-\dfrac{27}{x^{28}}$
   e) $-\dfrac{3}{x^4}$
   f) $\dfrac{11t^4\sqrt{t}}{2}$
   g) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$
   h) $24x^2 + 8x - 6$
   i) $4at^3 + 3bt^2$
   j) $\dfrac{3x^3 + 4}{x^3}$
   k) $2x$
   l) $2t^3 - 3t$
   m) $6(3x + 1)$
   n) $-\dfrac{(x^2 + 3)}{x^4}$
   o) $-\dfrac{(x + 4)}{4x\sqrt{x}}$
   p) $\dfrac{(t + 1)}{\sqrt{t}}$

2. 5

3. 20 hab./mois

4. a) $v(t) = 14{,}7 + 9{,}8t$
   b) 14,7 m/s
   c) 2 s
   d) 34,3 m/s

5. $x = -\dfrac{1}{3}$ et $x = 2$

6. (4, 8)

7. a) $y = -4x - 3$
   b) $y = 4t - 4$

8. $a = 4$; $b = -1$

9. a) (0, -3)
   b) (3, 0)

10. a) $\dfrac{7}{5}$
    b) (0, -6)

Pour obtenir la dérivée de $f(x) = (x^3 - 1)(2x + 3)$ on peut développer le produit et ainsi obtenir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)(2x + 3) &= \frac{d}{dx}(2x^4 + 3x^3 - 2x - 3)\\ &= 2\frac{d}{dx}x^4 + 3\frac{d}{dx}x^3 - 2\frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}3\\ &= 2(4x^3) + 3(3x^2) - 2(1) - (0)\\ &= 8x^3 + 9x^2 - 2\end{aligned}$$

Leibniz a eu beaucoup de difficulté à se persuader que la dérivée d'un produit n'était pas égale au produit des dérivées

Il est donc évident que

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 1)(2x + 3) \neq \frac{d}{dx}(x^3 - 1) . \frac{d}{dx}(2x + 3)$$

$$8x^3 + 9x^2 - 2 \neq (3x^2) . (2)$$

règle 5

dérivée d'un produit de fonctions

$$\boxed{\frac{d}{dx}\Big[g(x) \cdot h(x)\Big] = h(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}h(x)}$$

démonstration

$$\frac{d}{dx}\Big[g(x).h(x)\Big]$$

$f(x) = g(x) . h(x)$
$f(x+\Delta x) = g(x+\Delta x) . h(x+\Delta x)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) . h(x + \Delta x) - g(x) . h(x)}{\Delta x}$$

soustrayons et additionnons $g(x) . h(x+\Delta x)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) . h(x + \Delta x) - \boxed{g(x) . h(x + \Delta x)} + \boxed{g(x) . h(x + \Delta x)} - g(x) . h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x)\Big[g(x + \Delta x) - g(x)\Big] + g(x)\Big[h(x + \Delta x) - h(x)\Big]}{\Delta x}$$

la limite d'une somme est égale à la somme des limites et la limite d'un produit est égale au produit des limites si les limites existent

$$= \lim_{\Delta x \to 0} h(x + \Delta x)\left[\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] + g(x)\left[\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} h(x + \Delta x) . \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x \to 0} g(x) . \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}\right]$$

par définition de la dérivée

$$= h(x) . \frac{d}{dx}g(x) + g(x) . \frac{d}{dx}h(x)$$

exemple 3.3.7

Trouver $\frac{d}{dx}$ $(2x - 1)(x^2 + 1)$

a) en utilisant la règle 5,
b) en développant puis, en utilisant les règles 1 à 4.

---

il existe souvent plusieurs façons de dériver une fonction; à moins d'avis contraire, on choisira la méthode la plus rapide

a) $$\frac{d}{dx}(2x - 1)(x^2 + 1) = (x^2 + 1) \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(2x - 1)}_{2} + (2x - 1) \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 + 1)}_{2x}$$

$$= (x^2 + 1)(2) + (2x - 1)(2x)$$

$$= 2x^2 + 2 + 4x^2 - 2x$$

$$= 6x^2 - 2x + 2$$

b) $$\frac{d}{dx}(2x - 1)(x^2 + 1) = \frac{d}{dx}(2x^3 - x^2 + 2x - 1)$$

$$= 6x^2 - 2x + 2$$

exemple 3.3.8

Trouver $\frac{d}{dx}$ $(x^3 + 2x - 1)(3x^2 + 4)$ en utilisant la règle 5.

rép: $15x^4 + 30x^2 - 6x + 8$

La règle 5 se généralise à plus de deux fonctions. Par exemple la dérivée d'un produit de trois fonctions devient

à titre d'exercice, démontrer ce résultat

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\,h(x)\right] = g(x)\,h(x)\frac{d}{dx}f(x) \;+\; f(x)\,h(x)\frac{d}{dx}g(x) \;+\; f(x)\,g(x)\frac{d}{dx}h(x)$$

exemple 3.3.9

Trouver $\frac{d}{dx}$ (2 - x)(2x + 1)(5x + 3)

rép: $-30x^2 + 18x + 19$

Pour obtenir la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{3x+1}{x}$, la façon la plus simple est de procéder ainsi.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+1}{x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{d}{dx}\left(3+\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{d}{dx}\,3 \;+\; \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{d}{dx}\,3 \;+\; \frac{d}{dx}\,x^{-1}\\
&= 0 \;-\; x^{-2}\\
&= -\frac{1}{x^2}\,.
\end{aligned}$$

En conséquence,

la dérivée d'un quotient n'est pas égale au quotient des dérivées

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+1}{x}\right) \neq \frac{\frac{d}{dx}(3x+1)}{\frac{d}{dx}\,x}\,.$$

règle 6
dérivée d'un quotient de fonctions

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h(x)\frac{d}{dx}g(x) - g(x)\frac{d}{dx}h(x)}{[h(x)]^2}$$

démonstration Plutôt que d'utiliser la définition de la dérivée pour démontrer ce résultat, il est plus simple de le déduire à l'aide de la règle de dérivation d'un produit.

Soit $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, cherchons $\frac{d}{dx}f(x)$ (si cette dérivée existe)

Puisque $g(x) = f(x)\,h(x)$

par la règle 5

alors $\frac{d}{dx}g(x) = h(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}h(x)$

En isolant $\frac{d}{dx}f(x)$ on obtient,

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\frac{d}{dx}g(x) - f(x)\frac{d}{dx}h(x)}{h(x)}$$

Puisque $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ on a

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\frac{d}{dx}g(x) - \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]\frac{d}{dx}h(x)}{h(x)}$$

En simplifiant, l'expression devient

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{h(x)\frac{d}{dx}g(x) - g(x)\frac{d}{dx}h(x)}{[h(x)]^2}$$

exemple 3.3.10

Trouver $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-2x}{5x+1}\right)$ en utilisant la règle 6

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1-2x}{5x+1}\right) = \frac{(5x+1)\overbrace{\frac{d}{dx}(1-2x)}^{-2} - (1-2x)\overbrace{\frac{d}{dx}(5x+1)}^{5}}{(5x+1)^2}$$

$$= \frac{(5x+1)(-2) - (1-2x)(5)}{(5x+1)^2}$$

$$= \frac{-7}{(5x+1)^2}$$

exemple 3.3.11

Trouver $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2t^2 - 1}{1 + t^3}\right)$ en utilisant la règle 6

rép: $\dfrac{t(4 + 3t - 2t^3)}{(1 + t^3)^2}$

exemple 3.3.12

Trouver $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\sqrt{u}}{1 + 3u^2}\right)$ en utilisant la règle 6

rép: $\dfrac{1 - 9u^2}{2\sqrt{u}\,(1 + 3u^2)^2}$

Exercices 3.3.2

1. Trouver la dérivée de chacune des fonctions en appliquant la règle de dérivation d'un produit.

a) $y = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

b) $y = (2x + 1)(1 - 2x + x^2)$

c) $y = (x^3 + 1)(x^4 - x + 5)$

d) $y = (1 + 2t + 3t^2)(1 - t - 2t^2)$

e) $y = (3x^2 - 2x + 3)^2$

f) $y = \left(1 + \frac{2}{v}\right)\left(2 + \frac{1}{v}\right)$

g) $y = (u - 2)(u - 1)(u^2 - 4)$

h) $y = (2 - 3t)^3$

2. Trouver la dérivée de chacune des fonctions en appliquant la règle de dérivation d'un quotient (a et b sont des constantes).

a) $y = \dfrac{4x - 1}{3 - 5x}$

b) $y = \dfrac{ax + b}{ax - b}$

c) $y = \dfrac{-1}{6x^3 - x + 12}$

d) $y = \dfrac{t - 1}{t^2 - 2t + 2}$

e) $y = \dfrac{z^4 - 16}{z^4 + 16}$

f) $y = \dfrac{a^2 - t^2}{a^2 + t^2}$

g) $y = \dfrac{\sqrt{r}}{r - 1}$

h) $y = \dfrac{12(3x^3 - 16)}{4x - x^4}$

3. Trouver les équations des tangentes aux points d'intersection de la courbe d'équation

$$y = (x - 2)(3 + x)$$

avec l'axe des x. Tracer la courbe et les tangentes.

4. Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation

$$y = \frac{1}{x - 1} + 1$$

lorsque $x = 2$. Tracer la courbe et la tangente.

Réponses aux exercices 3.3.2

1. a) $3x^2$

   b) $6x(x - 1)$

   c) $7x^6 + 15x^2 - 1$

   d) $-24t^3 - 21t^2 - 2t + 1$

   e) $4(3x - 1)(3x^2 - 2x + 3)$

   f) $-\dfrac{(5v + 4)}{v^3}$

   g) $4u^3 - 9u^2 - 4u + 12$

   h) $-9(2 - 3t)^2$

2. a) $\dfrac{7}{(3 - 5x)^2}$

   b) $-\dfrac{2ab}{(ax - b)^2}$

   c) $\dfrac{18x^2 - 1}{(6x^3 - x + 12)^2}$

   d) $\dfrac{t(2 - t)}{(t^2 - 2t + 2)^2}$

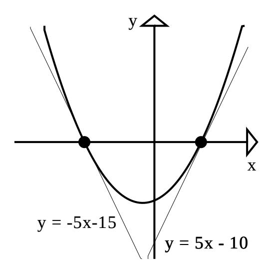
   e) $\dfrac{128z^3}{(z^4 + 16)^2}$

   f) $-\dfrac{4a^2t}{(a^2 + t^2)^2}$

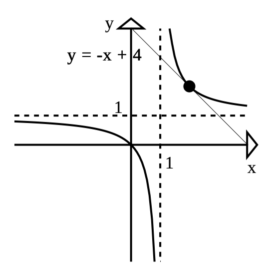
   g) $\dfrac{-(r + 1)}{2\sqrt{r}\,(r - 1)^2}$

   h) $\dfrac{12(3x^6 - 40x^3 + 64)}{(4x - x^4)^2}$

3. $y = 5x - 10$; $y = -5x - 15$



4. $y = -x + 4$



Toute fonction polynomiale ou rationnelle peut être dérivée en utilisant les règles précédentes. Pour couvrir l'ensemble des fonctions algébriques, il nous reste à considérer une dernière règle. Cette règle permettra entre autres de dériver les fonctions irrationnelles. Avant de donner cette règle, cherchons d'abord à trouver la dérivée de

$$f(x) = (2x - 1)^2$$

Présentement deux méthodes s'offrent à nous.

a) On développe l'expression avant de dériver.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x - 1)^2 &= \frac{d}{dx}(4x^2 - 4x + 1)\\ &= 8x - 4\\ &= 4(2x - 1)\end{aligned}$$

b) On considère l'expression comme un produit de fonctions.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x - 1)^2 &= (2x - 1)(2x - 1)\\ &= (2x - 1)\frac{d}{dx}(2x - 1) + (2x - 1)\frac{d}{dx}(2x - 1)\\ &= (2x - 1)(2) + (2x - 1)(2)\\ &= 4(2x - 1)\end{aligned}$$

Il existe une troisième méthode pour résoudre le problème. Elle est encore plus rapide que les deux premières. Pour l'utiliser, il faudra considérer l'expression comme une composition de fonctions.

règle 7

règle de dérivation en chaîne

Soit $y = g(h(x))$, le résultat de la composition de $\begin{cases} y = g(u) \\ u = h(x) \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

démonstration

par définition

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\Delta y = g(h(x+\Delta x)) - g(h(x))$ et $\Delta u = h(x+\Delta x) - h(x)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \quad \text{puisque} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

la limite d'un produit est égale au produit des limites

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

lorsque $\Delta x \to 0$, $\Delta u = h(x+\Delta x) - h(x) \to 0$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

par définition

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

exemple 3.3.13

Trouver $\frac{d}{dx}(2x-1)^2$ en utilisant la règle 7

$y = (2x-1)^2$ est le résultat de la composition de: $\begin{cases} y = u^2 \\ u = 2x-1 \end{cases}$

Par la règle de dérivation en chaîne (règle 7), nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}u^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x-1)$$

$$= (2u) \cdot (2)$$

puisque $u = 2x - 1$

$$= (2(2x-1)) \cdot (2)$$

$$= 4(2x-1)$$

exemple 3.3.14

Trouver $\frac{d}{dx}\sqrt{5-3x^2}$

$y = \sqrt{5-3x^2}$ est le résultat de la composition de: $\begin{cases} y = \sqrt{u} \\ u = 5-3x^2 \end{cases}$

Par la règle de dérivation en chaîne, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}\sqrt{u} \cdot \frac{d}{dx}(5-3x^2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}u^{-1/2}\right) \cdot (-6x)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) \cdot (-6x)$$

puisque $u = 5 - 3x^2$

$$= -\frac{3x}{\sqrt{5-3x^2}}$$

exemple 3.3.15

Trouver $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{(2t-1)^2}\right]$ (utiliser la règle de dérivation en chaîne)

---

rép: $-\dfrac{4}{(2t-1)^3}$

La règle 7 se généralise à plusieurs fonctions. Par exemple la fonction définie par $y = f(g(h(x)))$ peut être décomposée ainsi:

$$y = f(u), \quad u = g(v) \quad \text{et} \quad v = h(x).$$

Sa dérivée aura la même forme que celle de la règle 7.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

exemple 3.3.16

Trouver $\dfrac{d}{dx}\left(2+\sqrt{4-3x}\right)^5$

$y = \left(2+\sqrt{4-3x}\right)^5$ est le résultat de la composition de $\begin{cases} y = u^5 \\ u = 2+\sqrt{v} \\ v = 4-3x \end{cases}$

Par la règle de dérivation en chaîne, nous avons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}u^5 \,.\, \frac{d}{dv}(2+\sqrt{v}) \,.\, \frac{d}{dx}(4-3x)$$

$$= (5u^4) \,.\, \left(\frac{1}{2\sqrt{v}}\right) \,.\, (-3)$$

puisque $u = 2+\sqrt{v}$

$$= 5\left(2+\sqrt{v}\right)^4 \,.\, \frac{1}{2\sqrt{v}} \,.\, (-3)$$

puisque $v = 4-3x$

$$= 5\left(2+\sqrt{4-3x}\right)^4 \,.\, \frac{1}{2\sqrt{4-3x}} \,.\, (-3)$$

$$= -\frac{15\left(2+\sqrt{4-3x}\right)^4}{2\sqrt{4-3x}}$$

exemple 3.3.17

Si $y = 4u^2 - 1$ et $u = 3x^2 - 4x + 1$ alors trouver:

a) $\dfrac{dy}{du}$ b) $\dfrac{du}{dx}$ c) $\dfrac{dy}{dx}$ d) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = 1}$

au problème c), il est inutile de retrouver la dépendance fonctionnelle de y en terme de x puisque la règle de dérivation en chaîne permet de résoudre le problème directement

rép: a) $8u$; b) $6x - 4$; c) $8(3x^2 - 4x + 1)(6x - 4)$; d) 0

exemple 3.3.18

Si une montre se vend p dollars, la quantité Q de montres vendues à chaque mois sera

$$Q = \frac{10\,000}{p} \text{ unités}$$

On estime que dans t mois, le prix de la montre deviendra

$$p = 2t + 50 \text{ dollars}$$

Trouver le taux de variation de la quantité de montres vendues mensuellement par rapport au temps dans 25 mois.

rép: -2 montres/mois (la quantité vendue décroît de 2 montres par mois)

Lorsqu'on utilise la règle de dérivation en chaîne sur une fonction d'équation

$$y = \big(g(x)\big)^n \quad (n \in \mathbf{R}),$$

la réponse sera toujours de la même forme.

règle 8

règle de dérivation d'une puissance de fonction

$$\boxed{\frac{d}{dx}\big(g(x)\big)^n = n\big(g(x)\big)^{n-1}\frac{d}{dx}g(x) \qquad (n \in \mathbf{R})}$$

démonstration

$y = \big(g(x)\big)^n$ peut être décomposée ainsi: $\begin{cases} y = u^n \\ u = g(x) \end{cases}$

Par la règle de dérivation en chaîne, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}\,u^n \cdot \frac{d}{dx}\,g(x) \\ &= \left(nu^{n-1}\right) \cdot \frac{d}{dx}\,g(x) \\ &= n\big(g(x)\big)^{n-1}\frac{d}{dx}\,g(x) \end{aligned}$$

puisque $u = g(x)$

exemple 3.3.19

Trouver $\frac{d}{dx}(3 - 2x^5)^4$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(3 - 2x^5)^4 &= 4(3 - 2x^5)^3 \cdot \frac{d}{dx}(3 - 2x^5) \\ &= 4(3 - 2x^5)^3 \cdot (-10x^4) \\ &= -40x^4(3 - 2x^5)^3 \end{aligned}$$

exemple 3.3.20

Trouver $\frac{d}{dt}\sqrt{3t^2 - 1}$

rép: $\frac{3t}{\sqrt{3t^2 - 1}}$

En général plus d'une règle seront nécessaires pour dériver une fonction.

exemple 3.3.20

Trouver $\dfrac{d}{dx}\left[(x-1)^2(x+2)^3\right]$

$$\frac{d}{dx}\left[(x-1)^2(x+2)^3\right] = (x+2)^3\underbrace{\frac{d}{dx}(x-1)^2}_{2(x-1)(1)} + (x-1)^2\underbrace{\frac{d}{dx}(x+2)^3}_{3(x+2)^2(1)}$$

$$= 2(x-1)(x+2)^3 + 3(x+2)^2(x-1)^2$$

$$= (x-1)(x+2)^2\underbrace{\left[2(x+2) + 3(x-1)\right]}_{5x+1}$$

$$= (x-1)(x+2)^2(5x+1)$$

exemple 3.3.21

Trouver $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{t}{\sqrt{2-3t^2}}\right]$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{t}{\sqrt{2-3t^2}}\right] = \frac{\sqrt{2-3t^2}\overbrace{\frac{d}{dt}t}^{1} - t\overbrace{\frac{d}{dt}\sqrt{2-3t^2}}^{\frac{1}{2\sqrt{2-3t^2}}(-6t)}}{\left(\sqrt{2-3t^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2-3t^2} + \dfrac{3t^2}{\sqrt{2-3t^2}}}{2-3t^2}$$

$$= \frac{\dfrac{(2-3t^2) + 3t^2}{\sqrt{2-3t^2}}}{2-3t^2}$$

$$= \left(\frac{(2-3t^2) + 3t^2}{\sqrt{2-3t^2}}\right)\left(\frac{1}{2-3t^2}\right)$$

$$= \frac{2}{(2-3t^2)\sqrt{2-3t^2}}$$

exemple 3.3.22

Trouver $\frac{d}{ds}\sqrt{\frac{2-3s}{2+3s}}$

$$\frac{d}{ds}\sqrt{\frac{2-3s}{2+3s}} = \frac{d}{ds}\left(\frac{2-3s}{2+3s}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2-3s}{2+3s}\right)^{-1/2}\underbrace{\frac{d}{ds}\left(\frac{2-3s}{2+3s}\right)}$$

$$= \frac{(2+3s)\frac{d}{ds}(2-3s) - (2-3s)\frac{d}{ds}(2+3s)}{(2+3s)^2}$$

$$= \frac{(2+3s)(-3) - (2-3s)(3)}{(2+3s)^2}$$

$$= \frac{-12}{(2+3s)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2+3s}{2-3s}\right)^{1/2}\frac{-12}{(2+3s)^2}$$

$$= \frac{-6}{(2+3s)^2}\sqrt{\frac{2+3s}{2-3s}}$$

Exercices 3.3

1. Trouver la dérivée indiquée en appliquant la règle de dérivation en chaîne (règle 7).

a) $y = (3 - 2x)^4$; $\dfrac{dy}{dx}$

b) $s = (3t^3 - 4t + 1)^3$; $\dfrac{ds}{dt}$

c) $x = \sqrt{5y^2 + 3}$; $\dfrac{dx}{dy}$

d) $r = \dfrac{1}{(3t^2 - 4)^2}$; $\dfrac{dr}{dt}$

e) $u = \dfrac{1}{1 - v} + (1 - v)^2$; $\dfrac{du}{dv}$

f) $y = \sqrt{(3 - 2r)^2 + 1}$; $\dfrac{dy}{dr}$

2. Trouver la dérivée indiquée en appliquant la règle de dérivation en chaîne (règle 7).

a) $y = u^{10}$ et $u = x^2 + x$; $\dfrac{dy}{dx}$

b) $y = \sqrt{u}$ et $u = 7 - x^4$; $\dfrac{dy}{dx}$

c) $r = \dfrac{1}{y^2}$ et $y = t\sqrt{t} + 1$; $\dfrac{dr}{dt}$

d) $x = r + \dfrac{1}{r}$ et $r = \sqrt{y}$; $\dfrac{dx}{dy}$

e) $y = \dfrac{1}{u}$, $u = v^4$ et $v = x^2 - 1$; $\dfrac{dy}{dx}$

f) $x = \sqrt{r}$, $r = 2y^2 - 1$ et $y = 1 - 3t$; $\dfrac{dx}{dt}$

3. Trouver la dérivée en appliquant la règle de dérivation d'une puissance de fonction (règle 8).

a) $y = (x^2 + 2)^5$

b) $f(t) = (1 + t^2)^{-2}$

c) $g(x) = \sqrt{1 - 2x}$

d) $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x + 7}$

e) $f(y) = \dfrac{3}{(1 - 5y)^3}$

f) $y = \sqrt{r + \sqrt{r}}$

4. Le rayon r (en centimètres) d'un ballon augmente par rapport au temps t (en secondes) selon l'équation

$$r = \frac{t}{t+1} .$$

Sachant que le volume d'un ballon par rapport à son rayon r est

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 ,$$

trouver le taux de variation

a) du rayon r par rapport au temps t,
b) du volume V par rapport au rayon r,
c) du volume V par rapport au temps t,
d) du volume V à la 5[e] seconde.

5. Un importateur de café brésilien estime que les consommateurs d'une localité donnée achèteront à chaque mois une quantité Q de café équivalente à

$$Q = \frac{4000}{p} \text{ kilogrammes}$$

si le prix du café est fixé à p dollars le kilogramme. On prévoit que dans t mois, le prix d'un kilogramme de café brésilien sera de

$$p = \frac{2t\sqrt{t}}{3} \text{ dollars}$$

a) Quel sera dans 12 mois, le taux de variation par rapport au temps de la quantité de café vendue?
b) Les ventes seront-elles croissantes ou décroissantes à ce moment?

6. Trouver la dérivée puis simplifier chacune de vos réponses (a et b sont des constantes)

a) $f(x) = x(2 - x)^4$

b) $g(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

c) $y = \dfrac{1}{(5x^3 - 1)^4}$

d) $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$

e) $y = \left(\dfrac{x - 4}{2x - 3}\right)^2$

f) $f(r) = \sqrt{\dfrac{1 + 3r}{1 - 3r}}$

g) $h(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{4}{3}x\sqrt{x}$

h) $g(u) = (3u^2 + 2)\sqrt{1 + 5u^2}$

i) $y = \dfrac{x^2}{(x^2 + 1)^3}$

j) $h(x) = \dfrac{2}{3}(x - 6)\sqrt{x + 3}$

k) $y = (x - 2)^5(5x + 2)$

l) $f(x) = (1 - 3x)^3(5x - 3)^5$

m) $g(x) = \dfrac{(x + 1)^5}{(1 - x)^4}$

n) $h(x) = \dfrac{\left(2\sqrt{5} + 3\right)^2}{1 - \sqrt{2}}$

o) $y = (x + 3)\sqrt{(2x - 4)^3}$

p) $y = \sqrt{1 + \sqrt{2x^2 + x}}$

q) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 5)(x^2 + 5)}{x^3}$

r) $y = \sqrt{7 - 3x} - \dfrac{5}{\sqrt{7 - 3x}}$

s) $g(y) = \dfrac{\dfrac{2}{y} + \dfrac{y}{2}}{\dfrac{2}{y} - \dfrac{y}{2}}$

t) $g(x) = \dfrac{(1 + 3x)\sqrt{(1 - 2x)^3}}{15}$

u) $h(x) = \dfrac{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}{3x^3}$

v) $y = x\sqrt{1 - x^2}\,(1 - 2x^2)$

w) $r = \dfrac{2}{3a}\sqrt{ax - b}$

x) $f(x) = \sqrt{ax} + \dfrac{a}{\sqrt{ax}}$

y) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}\right)^3$

z) $y = \dfrac{(ax + b)^4(4ax - b)}{20a^2}$

7. Pour quelles valeurs de x, la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = (x - 3)(x + 3)^2$ est-elle horizontale?

8. Trouver pour quelles valeurs de x la dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{3}{(x^2 - 6x + 5)^5}$

a) est nulle,
b) n'existe pas,
c) est positive,
d) est négative.

9. Trouver pour quelles valeurs de x la dérivée de la fonction $f(x) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + 1}\right)^3$

a) est nulle,
b) n'existe pas,
c) est positive,
d) est négative.

Réponses aux exercices 3.3

1. a) $-8(3 - 2x)^3$

   b) $3(9t^2 - 4)(3t^3 - 4t + 1)^2$

   c) $\dfrac{5y}{\sqrt{5y^2 + 3}}$

   d) $\dfrac{-12t}{(3t^2 - 4)^3}$

   e) $\dfrac{1}{(1 - v)^2} - 2(1 - v)$

   f) $\dfrac{-2(3 - 2r)}{\sqrt{(3 - 2r)^2 + 1}}$

2. a) $10(x^2 + x)^9(2x + 1)$

   b) $\dfrac{-2x^3}{\sqrt{7 - x^4}}$

   c) $\dfrac{-3\sqrt{t}}{(t\sqrt{t} + 1)^3}$

   d) $\dfrac{y - 1}{2y\sqrt{y}}$

   e) $\dfrac{-8x}{(x^2 - 1)^5}$

   f) $\dfrac{-6(1 - 3t)}{\sqrt{2(1 - 3t)^2 - 1}}$

3. a) $10x(x^2 + 2)^4$

   b) $\dfrac{-4t}{(1 + t^2)^3}$

   c) $\dfrac{-1}{\sqrt{1 - 2x}}$

   d) $\dfrac{3x^2 - 2}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x + 7)^2}}$

   e) $\dfrac{45}{(1 - 5y)^4}$

   f) $\dfrac{2\sqrt{r} + 1}{4\sqrt{r}\sqrt{r + \sqrt{r}}}$

4. a) $\dfrac{1}{(t + 1)^2}$

   b) $4\pi r^2$

   c) $\dfrac{4\pi t^2}{(t + 1)^4}$

   d) 0,24 cm^3/s

5. a) -18,04 kg/mois

   b) décroissantes

6. a) $(2 - 5x)(2 - x)^3$

b) $\dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

c) $\dfrac{-60x^2}{(5x^3 - 1)^5}$

d) $\dfrac{1}{(1 - t^2)\sqrt{(1 - t^2)}}$

e) $\dfrac{10(x - 4)}{(2x - 3)^3}$

f) $\dfrac{3}{(1 - 3r)^2}\sqrt{\dfrac{1 - 3r}{1 + 3r}}$

g) $\dfrac{1 + 2x}{\sqrt{x}}$

h) $\dfrac{u(45u^2 + 16)}{\sqrt{1 + 5u^2}}$

i) $\dfrac{2x(1 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^4}$

j) $\dfrac{x}{\sqrt{x + 3}}$

k) $30x(x - 2)^4$

l) $4(1 - 3x)^2(5x - 3)^4(13 - 30x)$

m) $\dfrac{(9 - x)(x + 1)^4}{(1 - x)^5}$

n) 0

o) $5(x + 1)\sqrt{2x - 4}$

p) $\dfrac{4x + 1}{4\sqrt{2x^2 + x}\sqrt{1 + \sqrt{2x^2 + x}}}$

q) $\dfrac{x^4 + 75}{x^4}$

r) $\dfrac{9(x - 4)}{2(7 - 3x)\sqrt{7 - 3x}}$

s) $\dfrac{16y}{(4 - y^2)^2}$

t) $- x\sqrt{1 - 2x}$

u) $- \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^4}$

v) $\dfrac{8x^4 - 8x^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$

w) $\dfrac{1}{3\sqrt{ax - b}}$

x) $\dfrac{a(x - 1)}{2x\sqrt{ax}}$

y) $\dfrac{12a^2x(x^2 - a^2)^2}{(x^2 + a^2)^4}$

z) $x(ax + b)^3$

7. $x = -3$ ou $x = 1$

8. a) $x = 3$ b) $x = 1,\ x = 5$ c) $\forall\ x \in\ ]-\infty, 3[\ \setminus \{1\}$ d) $\forall\ x \in\ ]3, \infty[\ \setminus \{5\}$

9. a) $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$ b) aucune valeur c) $\forall\ x \in\ ]-1, 1[\ \setminus \{0\}$ d) $\forall\ x \in\ ]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, \infty[$

3.4 Dérivées d'ordre supérieur

Si $f(x)$ est une fonction dérivable alors sa dérivée est aussi une fonction; elle peut donc être dérivable. La dérivée de la fonction $f'(x)$ lorsqu'elle existe s'appelle la *dérivée seconde* ou *dérivée d'ordre 2* de $f(x)$. Lorsqu'on dérive à nouveau, on obtient la *dérivée troisième* ou *dérivée d'ordre 3* de $f(x)$. De la même façon on peut dériver plusieurs fois une même fonction.

Plusieurs notations existent pour désigner l'ordre d'une dérivée.

Soit $y = f(x)$

dérivée d'ordre	notations	
1	$\frac{dy}{dx} = y'$	$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$
2	$\frac{d^2y}{dx^2} = y''$	$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''(x)$
3	$\frac{d^3y}{dx^3} = y'''$	$\frac{d^3}{dx^3} f(x) = f'''(x)$
4	$\frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)}$	$\frac{d^4}{dx^4} f(x) = f^{(4)}(x)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$	$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x)$

exemple 3.4.1

Soit $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 5$,

trouver a) $\frac{dy}{dx}$, b) $\frac{d^2y}{dx^2}$, c) $\frac{d^3y}{dx^3}$, d) $\frac{d^4y}{dx^4}$, e) $\frac{d^5y}{dx^5}$

---

a) $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 7$,

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 12x + 6$,

c) $\frac{d^3y}{dx^3} = 24x - 12$,

d) $\frac{d^4y}{dx^4} = 24$,

e) $\frac{d^5y}{dx^5} = 0$.

noter que $\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ pour $n > 4$

exemple 3.4.2

Trouver $\dfrac{d^4}{du^4}\left[\dfrac{2}{u^3}\right]$

$$\frac{d}{du}(2u^{-3}) = -6u^{-4}$$

$$\frac{d^2}{du^2}(2u^{-3}) = \frac{d}{du}(-6u^{-4}) = 24u^{-5}$$

$$\frac{d^3}{du^3}(2u^{-3}) = \frac{d}{du}(24u^{-5}) = -120u^{-6}$$

$$\frac{d^4}{du^4}(2u^{-3}) = \frac{d}{du}(-120u^{-6}) = 720u^{-7} = \frac{720}{u^7}$$

exemple 3.4.3

Trouver $f'''(3)$ si $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{5x}$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{5x}$$

$$= \left[\frac{2x^2}{5x} - \frac{3}{5x}\right]$$

$$= \left[\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}x^{-1}\right]$$

$$f'(x) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}x^{-2}$$

$$f''(x) = 0 - \frac{6}{5}x^{-3}$$

$$f'''(x) = \frac{18}{5x^4}$$

$$\Rightarrow \quad f'''(3) = \frac{18}{5(3)^4} = \frac{2}{45}$$

Exercices 3.4

1. Trouver la dérivée indiquée.

   a) $y = 3x^4 - 2x^2 + x - 5$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$

   b) $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$; $\dfrac{d^4}{dt^4} f(t)$

   c) $v = 5s^3 - \dfrac{2}{s^2}$; v'''

   d) $r = \dfrac{u}{u + 1}$; $r^{(40)}$

2. Trouver $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

   a) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x}$

   b) $y = x^4(1 - x^4)$

   c) $y = x^{5/3} + 5x^{2/3}$

   d) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2}$

   e) $y = \dfrac{3}{1 - 2x}$

   f) $y = (x - 1)^2(x + 1)^2$

   (s'il y a lieu, transformer d'abord l'expression afin d'accélérer le calcul des dérivées)

3. Trouver $f''(x)$.

   a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

   b) $f(x) = \dfrac{x}{(x + 1)^2}$

   c) $f(x) = \left(\dfrac{x + 2}{x + 3}\right)^2$

   d) $f(x) = \dfrac{2x\sqrt{x + 3}}{3}$

4. Trouver $\left.\dfrac{d^3}{dt^3}\left(\dfrac{3}{t - 1}\right)\right|_{t = 0}$

5. Soit $y = ax + \dfrac{b}{x}$ (a et b sont des constantes). Démontrer que $x^2y'' + xy' - y = 0$.

6. À l'instant t (en secondes), la distance y (en centimètres) parcourue par une particule est donnée par l'équation

$$y = \sqrt{3t^2 + 4} - 2.$$

Calculer la vitesse et l'accélération de la particule à l'instant $t = 2$ secondes.

7. Trouver le taux de variation de la pente de la droite tangente à la courbe de $f(x) = x(3 - 2x)^3$ lorsque $x = 0$.

Réponses aux exercices 3.4

1. a) $72x$

   b) $\dfrac{105}{16t^4\sqrt{t}}$

   c) $\dfrac{6(5s^5 + 8)}{s^5}$

   d) $\dfrac{-40\times 39\times 38\times 37\ \ldots\ \times 2\times 1}{(u + 1)^{41}}$

2. a) $\dfrac{2(x^4 + 1)}{x^3}$

   b) $4x^2(3 - 14x^4)$

   c) $\dfrac{10(x - 1)}{9x\sqrt[3]{x}}$

   d) $\dfrac{2(2x - 9)}{x^4}$

   e) $\dfrac{24}{(1 - 2x)^3}$

   f) $4(3x^2 - 1)$

3. a) $f''(x) = \dfrac{16(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$ $\left(f'(x) = \dfrac{-16x}{(x^2 - 4)^2}\right)$

   b) $f''(x) = \dfrac{2(x - 2)}{(x + 1)^4}$ $\left(f'(x) = \dfrac{1 - x}{(x + 1)^3}\right)$

   c) $f''(x) = -\dfrac{2(2x + 3)}{(x + 3)^4}$ $\left(f'(x) = \dfrac{2(x + 2)}{(x + 3)^3}\right)$

   d) $f''(x) = \dfrac{(x + 4)}{2(x + 3)\sqrt{x + 3}}$ $\left(f'(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x + 3}}\right)$

4. -18

5.

6. $v(2) = \dfrac{3}{2}$ cm/s et $a(2) = \dfrac{3}{16}$ cm/s^2

7. -108

3.5 Dérivée implicite et dérivée des fonctions réciproques

dérivée implicite Jusqu'à présent, toutes les fonctions étudiées l'ont été à partir d'équations où la variable dépendante y était exprimée d'une *façon explicite* en terme de la variable indépendante x. Les équations avaient toujours la forme $y = f(x)$. Ainsi

$$y = 3x^2 + 5 \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$$

définissent toutes les deux une fonction sous une forme explicite.

Il arrive cependant que l'équation ne soit pas donnée sous cette forme. C'est le cas de l'équation

$$xy - 3y - 4 = 0.$$

Elle définit aussi une fonction mais au premier coup d'oeil, ce n'est pas tout à fait évident. L'équation est présentée sous la forme $f(x,y) = 0$. On dit alors que la variable y est exprimée d'une *façon implicite* en terme de la variable x.

Pour passer de la forme implicite à la forme explicite, on résout l'équation par rapport à la variable y.

$$xy - 3y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad xy - 3y = 4$$

$$\Rightarrow \quad y(x - 3) = 4$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{4}{x - 3}.$$

L'équation définit à présent une fonction sous une forme explicite. On peut maintenant la dériver en utilisant les règles précédentes.

définition 3.5.1

forme implicite et forme explicite

a) Une fonction est sous *forme explicite* lorsqu'elle est définie à l'aide d'une équation du type $y = f(x)$.

b) Une fonction est sous *forme implicite* lorsqu'elle est définie à l'aide d'une équation du type $f(x,y) = 0$.

exemple 3.5.1

Une fonction définie par l'équation

a) $y = \dfrac{x^4 - 3x + 1}{y}$ est sous forme implicite,

b) $x = 3y^2 - x^2 + 1$ est sous forme implicite,

c) $y = \sqrt{x - 1}$ est sous forme explicite.

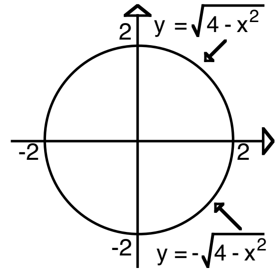
Une équation peut définir implicitement plus d'une fonction. Elle pourrait aussi ne pas en définir.

Par exemple l'équation du cercle de rayon 2 centré à l'origine

$$x^2 + y^2 = 4$$

définit implicitement les deux fonctions (demi-cercles) d'équations

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$



Par ailleurs l'équation $x^2 + y^2 = -1$ définit implicitement aucune fonction (aucune valeur de x et de y vérifie l'équation).

L'équation $y^3 - 2xy - 3y^2 = 1$ définit peut-être implicitement une ou plusieurs fonctions. Malheureusement il est difficile de les expliciter.

Une équation peut donc définir implicitement 0, 1, 2, 3 ou plusieurs fonctions. Même si on est assuré de l'existence de ces fonctions, il est souvent difficile voire même impossible de les expliciter. Heureusement, on peut obtenir la dérivée d'une telle fonction en utilisant une technique appelée *technique de dérivation implicite*. Mais avant, complétons le problème suivant.

exemple 3.5.2

Si y est fonction de x, effectuer chacune des dérivées suivantes:

a) $\frac{d}{dx}\,x^3$ b) $\frac{d}{dx}\,y^3$ c) $\frac{d}{dx}\,x^3y^3$

---

a) $\frac{d}{dx}\,x^3 = 3x^2$

Puisque y est fonction de x, on remplace y par $f(x)$ dans chacune des deux dernières dérivées.

par la suite, on dérivera directement sans au préalable transformer y par $f(x)$

ainsi,

$\frac{d}{dx}\,y^3 = 3y^2\frac{dy}{dx}$

et

\f(d,dx) $x^3y^3 = 3x^2y^3 + 3x^3y^2\frac{dy}{dx}$

b) $\frac{d}{dx}\,y^3 = \frac{d}{dx}\,(f(x))^3 = 3(f(x))^2\,\frac{d}{dx}f(x) = 3y^2\,\frac{dy}{dx}$

c) $$\frac{d}{dx}\,x^3y^3 = \frac{d}{dx}\,x^3(f(x))^3$$

$$= \underbrace{(f(x))^3\,\frac{d}{dx}x^3}_{3x^2} + x^3\,\underbrace{\frac{d}{dx}\,(f(x))^3}_{3(f(x))^2\frac{d}{dx}f(x)}$$

$$= 3x^2y^3 + 3x^3y^2\,\frac{dy}{dx}$$

Voyons maintenant comment on procède pour appliquer la techni-que de dérivation implicite.

technique de dérivation implicite

a) D'abord on suppose qu'il existe au moins une fonction dérivable qui vérifie l'équation.

b) On dérive ensuite les deux membres de l'équation.

c) Puis, on résout par rapport à la dérivée cherchée.

exemple 3.5.3

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y^3 - 2xy - 3x^2 = 1$

On dérive les deux membres de l'équation en supposant que y est une fonction de x.

$$\frac{d}{dx}\left(y^3 - 2xy - 3x^2\right) = \frac{d}{dx}1$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}y^3}_{\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)} - \underbrace{\frac{d}{dx}2xy}_{\left(y\frac{d}{dx}2x + 2x\frac{dy}{dx}\right)} - \underbrace{\frac{d}{dx}3x^2}_{6x} = \underbrace{\frac{d}{dx}1}_{0}$$

On obtient
$$3y^2\frac{dy}{dx} - \left[2y + 2x\frac{dy}{dx}\right] - 6x = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 2y - 2x\frac{dy}{dx} - 6x = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} = 2y + 6x$$

$$(3y^2 - 2x)\frac{dy}{dx} = 2(y + 3x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y + 3x)}{3y^2 - 2x}$$

La dérivée obtenue est différente de celles habituellement rencontrées. Elle contient la variable x mais également la variable y. Pour calculer un taux de variation à partir d'une dérivée obtenue implicitement, on doit en général fournir l'abscisse et l'ordonnée du point. Ainsi à l'exemple précédent

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\,1)} = \left.\frac{2(y + 3x)}{3y^2 - 2x}\right|_{(0,\,1)}$$

$$= \frac{2(1 + 3(0))}{3(1)^2 - 2(0)} = \frac{2}{3}$$

exemple 3.5.4

Trouver par dérivation implicite: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ si $xy - y^3 = 8 + 3x$

On dérive les deux membres de l'équation en supposant que y est une fonction de x.

$$\frac{d}{dx}\left(xy - y^3\right) = \frac{d}{dx}\left(8 + 3x\right)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\,xy}_{\left(y\frac{d}{dx}x + x\frac{dy}{dx}\right)} - \underbrace{\frac{d}{dx}\,y^3}_{\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right)} = \underbrace{\frac{d}{dx}\,8}_{0} + \underbrace{\frac{d}{dx}\,3x}_{3}$$

$$y + x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 3$$

$$x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = 3 - y$$

$$(x - 3y^2)\frac{dy}{dx} = 3 - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - y}{x - 3y^2}$$

puisque $xy - y^3 = 8 + 3x$, pour $x = 0$ on a

$(0)y - y^3 = 8 + 3(0)$

donc $-y^3 = 8$

$y^3 = -8$

$y = -2$

par conséquent $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0,\,y=-2} = \left.\frac{3 - y}{x - 3y^2}\right|_{x=0,\,y=-2}$$

$$= \frac{3 - (-2)}{0 - 3(-2)^2}$$

$$= -\frac{5}{12}$$

Ce qui semble bizarre avec la technique de dérivation implicite c'est qu'on obtient une seule réponse même lorsque l'équation $f(x,y) = 0$ définit implicitement plus d'une fonction. Comment doit-on interpréter le résultat?

Pour mieux comprendre, reprenons l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 4$.

Cherchons d'abord à trouver $\dfrac{dy}{dx}$ implicitement.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}\,4$$

inutile de poser avant chaque problème de dérivation implicite que y est une fonction de x ;

$$\underbrace{\frac{d}{dx}x^2}_{2x} + \underbrace{\frac{d}{dx}y^2}_{2y\frac{dy}{dx}} = \underbrace{\frac{d}{dx}4}_{0}$$

lorsqu'on cherche $\frac{dy}{dx}$ on suppose que pendant le calcul de la dérivée, la variable indépendante est x, la réponse aura un sens seulement si l'équation définit implicitement une fonction ;

On obtient

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

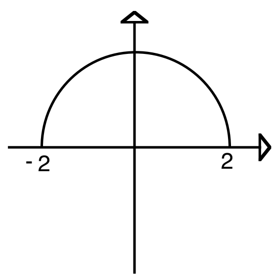
de même quand on cherche $\frac{dx}{dy}$ on suppose que pendant le calcul la variable indépendante est y

Mais l'équation $x^2 + y^2 = 4$ définit implicitement les deux fonc-tions d'équations

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

En dérivant chacune des équations on obtient

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

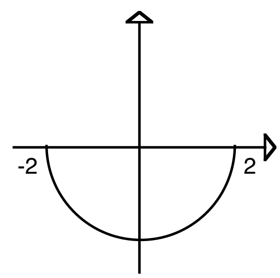


$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$= -\frac{x}{y} \quad (\text{ car } y = \sqrt{4 - x^2})$$

$$y = -\sqrt{4 - x^2}$$



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \frac{x}{-y} \quad (\text{ car } y = -\sqrt{4 - x^2})$$

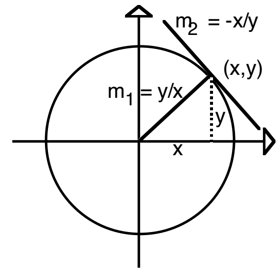
$$= -\frac{x}{y}$$

Dans les deux cas on retrouve la même dérivée, soit celle obtenue implicitement. Lorsqu'on peut passer à la forme explicite, il est en général préférable de le faire. Cependant dans certains cas, la forme implicite sera plus facilement dérivable ou aura l'avantage de mettre en évidence des relations entre les variables x et y qui ne sauraient être obtenues autrement.

Par exemple, la dérivée obtenue implicitement à partir de l'équation

$$x^2 + y^2 = 4$$

permet d'affirmer que toute droite tangen-te au cercle est toujours perpendiculaire à son rayon. En effet le produit de la pente des tangentes par la pente des rayons est toujours égal à -1.



$$m_1 m_2 = \left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{x}{y}\right) = -1$$

Dans les autres disciplines, en particulier en physique, les variables d'une équation sont rarement x et y. Avant d'utiliser le procédé de dérivation implicite, il est important de reconnaître la variable indépendante ainsi que la ou les variables dépendantes du problème.

exemple 3.5.5

Soit l'équation $v^2 - 3v^3u^2 = 1$ trouver:

a) $\dfrac{dv}{du}$ b) $\dfrac{du}{dv}$

lorsqu'on demande de trouver $\dfrac{dv}{du}$, on supposera que la variable indépendante est u et que v est une fonction de u

mais si la dérivée cherchée est $\dfrac{du}{dv}$, on supposera alors que la variable indépendante est v et que u est une fonction de v

rép: a) $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{6uv^2}{2 - 9u^2v}$; b) $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{2 - 9u^2v}{6uv^2}$

Au problème précédent, on remarque que

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dv}}$$

Ce résultat n'est pas le fruit du hasard, il existe bien une règle qui relie les deux dérivées.

règle 9

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad \left(\text{si } \frac{dx}{dy} \text{ existe et n'est pas nulle}\right)}$$

démonstration

par définition

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

car par hypothèse $\frac{dx}{dy}$ existe et n'est pas nulle

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \right]$$

la limite d'un quotient est égale au quotient des limites

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} 1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

lorsque $\Delta x \to 0$ on a $\Delta y \to 0$ car $\frac{dx}{dy}$ existe et n'est pas nulle

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} 1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

par définition

$$= \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

dérivée des fonctions réciproques

$x = \varphi(y)$ et $y = f(x)$ sont des fonctions réciproques

Lorsqu'on cherche dy/dx et que l'équation fournie est sous la forme $x = \varphi(y)$ au lieu de $y = f(x)$, la proposition précédente permet d'obtenir une réponse rapide à notre problème.

Par exemple si $x = 5 - y^3 + 2y^4$

on aura $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$= \frac{1}{\frac{d}{dy}(5 - y^3 + 2y^4)} = \frac{1}{-3y^2 + 8y^3}$$

exemple 3.5.6

Soit l'équation $x = y^2 - 2y + 3$. Montrer que la tangente à cette courbe au point (3, 2) est perpendiculaire à la droite $y = 1 - 2x$.

---

deux droites sont perpendiculaires si le produit de leur pente est -1

Puisque la pente de la droite $y = 1 - 2x$ est -2, il suffit de montrer que la pente de la droite tangente à la courbe au point (3, 2) est $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ au point (3, 2).

Par la proposition 3.5.1, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y - 2}$$

Au point (3, 2),

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = 3,\, y = 2} = \left.\frac{1}{2y - 2}\right|_{x = 3,\, y = 2} = \frac{1}{2(2) - 2} = \frac{1}{2}.$$

exemple 3.5.7

Trouver $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t = 1}$ si $x = t - t^2$ et $y = t - t^3$

---

les équations

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

sont appelées équations paramétriques de la fonction $y = f(x)$;

il est parfois plus aisé d'étudier les fonctions sous une forme paramétrique que sous la forme de la dépendance directe $y = f(x)$

Par la règle de dérivation en chaîne on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{d}{dt}(t - t^3) \;.\; \frac{1}{\frac{d}{dt}(t - t^2)} = (1 - 3t^2) \;.\; \frac{1}{(1 - 2t)}$$

donc $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t = 1} = \left.\frac{(1 - 3t^2)}{(1 - 2t)}\right|_{t = 1} = 2$.

Exercices 3.5

1. Si y est une fonction de x, trouver:

a) $\frac{d}{dx}(x^4)$

b) $\frac{d}{dx}(y^2)$

c) $\frac{d}{dx}(x^2y^3)$

d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$

2. Trouver $\frac{dy}{dx}$ implicitement.

a) $x^3 + y^3 = 6x^2$

b) $y + 2x^2 - y^2 = 0$

c) $xy = x - 3y$

d) $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$

e) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

f) $(x + y)^3 - 3x^2 + 4 = 0$

g) $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = c^2$ (a, b et c sont des constantes)

h) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (a est une constante)

3. Trouver $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}$ si $xy + \sqrt{y} - x^2 = 1$.

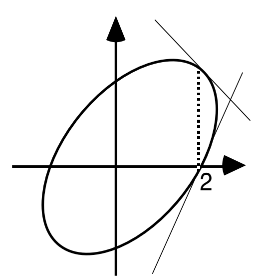
4. Trouver $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$ si $x^2y + xy^2 = 30$.

5. Quelle est la pente de la tangente à la courbe définie par l'équation $x^2 + 3xy - 2y^2 + 1 = 0$ au point $(1, 2)$?

6. Trouver les équations des deux droites tangentes à la courbe définie par l'équation

$$x^2 - xy + y^2 = 4$$

lorsque $x = 2$.



7. Soit $3s^2 - 4r^3 = 5$, trouver

a) $\frac{ds}{dr}$

b) $\frac{dr}{ds}$

8. Soit $3uv^2 - 4u^2v = 1$, trouver

a) $\dfrac{du}{dv}$ b) $\dfrac{dv}{du}$

9. Soit l'équation $T^2g = 4\pi^2 l$ où g est une constante; calculer $\dfrac{dT}{dl}$.

10. Trouver la dérivée indiquée en utilisant la règle 9

a) $x = 2\sqrt{y} - y$; $\dfrac{dy}{dx}$

b) $u = \dfrac{1 - v}{1 + v}$; $\dfrac{dv}{du}$

c) $r = t(2t^2 - 3)^3$; $\dfrac{dt}{dr}$

d) $y = \dfrac{1}{1 - 2t}$ et $x = \dfrac{2}{3}t\sqrt{t}$; $\dfrac{dy}{dx}$

e) $u = (t - 1)^2$ et $v = \dfrac{2}{(t - 1)^3}$; $\dfrac{dv}{du}$

11. Soit h la hauteur et r le rayon d'un cône droit à base circulaire dont le volume V est constant. Sachant que

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

a) trouver $\dfrac{dh}{dr}$ b) trouver $\dfrac{dr}{dh}$

12. Sachant que le volume d'une sphère de rayon r est $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ et que l'aire d'un cercle de rayon r est $A = \pi r^2$, trouver $\left.\dfrac{dV}{dA}\right|_{A = \pi}$.

13. Soit x la base et y la hauteur d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est 5. Selon la relation de Pythagore $x^2 + y^2 = 5^2$. Si x et y sont fonctions du temps t, trouver $\dfrac{dx}{dt}$.

14. Un triangle rectangle a une base b et une hauteur h. L'aire A du triangle est $A = \dfrac{bh}{2}$. Si A est constant et que les variables b et h varient en fonction du temps t, trouver $\dfrac{dh}{dt}$.

Réponses aux exercices 3.5

1. a) $4x^3$

   b) $2y\dfrac{dy}{dx}$

   c) $2xy^3 + 3x^2y^2\dfrac{dy}{dx}$

   d) $\dfrac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}$

2. a) $\dfrac{x(4 - x)}{y^2}$

   b) $\dfrac{-4x}{1 - 2y}$

   c) $\dfrac{1 - y}{x + 3}$

   d) $\dfrac{y^2 - 2x - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}$

   e) $\dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$

   f) $\dfrac{2x - (x + y)^2}{(x + y)^2}$

   g) $\dfrac{ay^2}{bx^2}$

   h) $-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

3. $\dfrac{2}{3}$

4. $-\dfrac{21}{16}$ et $\dfrac{5}{16}$

5. $\dfrac{8}{5}$

6. $y = 2x - 4$ et $y = -x + 4$

7. a) $\dfrac{2r^2}{s}$

   b) $\dfrac{s}{2r^2}$

8. a) $\dfrac{2u(2u - 3v)}{v(3v - 8u)}$

   b) $\dfrac{v(3v - 8u)}{2u(2u - 3v)}$

9. $\dfrac{2\pi^2}{gT}$

10. a) $\dfrac{\sqrt{y}}{1 - \sqrt{y}}$

    b) $-\dfrac{(1 + v)^2}{2}$

    c) $\dfrac{1}{(2t^2 - 3)^2(14t^2 - 3)}$

    d) $\dfrac{2}{\sqrt{t}\,(1 - 2t)^2}$

    e) $\dfrac{-3}{(t - 1)^5}$

11. a) $-\frac{2h}{r}$ ou $\frac{-6V}{\pi r^3}$ b) $-\frac{r}{2h}$ ou $\frac{-\pi r^3}{6V}$

12. 2

13. $-\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$

14. $-\frac{h}{b}\frac{db}{dt}$

Exercices de révision

1. Trouver $\left.\dfrac{dv}{dr}\right|_{r = -2}$ si $v = \dfrac{r}{1 + r^2}$

2. En utilisant la définition de la dérivée (définition 3.2.1) trouver $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1 - 3x}$

3. En utilisant la définition de la dérivée (définition 3.2.2) trouver

   a) $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t = -1}$ si $y = 2 - \dfrac{3}{t}$

   b) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = 0}$ si $y = \begin{cases} 2x + 1 & x \leq 0 \\ 1 + x & x > 0 \end{cases}$

4. Un bloc glisse sur un plan incliné. Au bout de t secondes, le bloc est à une distance de
$$s(t) = 4t^2\sqrt{t} \text{ centimètres}$$
de son point de départ. Déterminer

   a) la vitesse moyenne du bloc du temps $t = 0$ seconde au temps $t = 4$ secondes,
   b) la vitesse du bloc à la 4^e seconde.

5. Deux produits chimiques, A et B, réagissent pour former un produit C. Après t heures, la quantité du produit C (en grammes) est donnée par
$$Q(t) = 1 - \frac{1}{2t + 1}$$
   a) Quel est le taux de variation de la quantité Q après 1 heure?
   b) Après combien d'heures le taux de variation sera-t-il de 0,02 g/h?

6. Trouver l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation
$$y = 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$$
lorsque $x = 1$.

7. Du haut d'un pont, Éric lance une pierre vers le bas. La distance parcourue par la pierre en tout temps t (en secondes) est donnée par l'équation

$$s(t) = 5t^2 + 2t \text{ mètres}$$

Dans sa chute, la pierre atteint un oiseau volant à 16 mètres plus bas. Calculer la vitesse de la pierre au moment de l'impact.

8. Trouver la dérivée (a est une constante)

a) $\dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{\sqrt{v} + v^2}{3\sqrt{v}}\right)$

b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x}\right)$

c) $\dfrac{d}{dr}\left[\dfrac{2}{(r^2 - 3r + 4)^5}\right]$

d) $\dfrac{d}{d\theta}\sqrt{\dfrac{3\theta^2 - 5}{8 + 2\theta^2}}$

e) $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{t^2 - 1}{\sqrt{(2t+1)^3}}\right]$

f) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{3(3x^2 - 4)\sqrt{2 - x^2}}{4}\right]$

g) $\dfrac{d}{du}\left[\dfrac{(u^2 + 1)^5}{(3 - u)^4}\right]$

h) $\dfrac{d}{dv}\left[(4v^2 - 1)^2 (2 - v^2)^4\right]$

i) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a^2x^2 - 4}{a^2x^2 + 2}\right)^4$

j) $\dfrac{d}{dt}\sqrt{2t + \sqrt{2t^2 + 1}}$

9. Trouver chacune des dérivées.

a) $y = 2\sqrt{u^3}$ et $u = 5 + 2\sqrt{x}$; $\dfrac{dy}{dx}$

b) $v = 4u^2 + 1$, $u = 2\sqrt{x}$ et $x = \dfrac{1}{t^2}$; $\dfrac{dv}{dt}$

c) $y = \dfrac{1}{x}$ et $x = \dfrac{\sqrt{3t^2 + 1}}{3}$; $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=1}$

d) $x = \dfrac{t^5 - 2t^3 + 5}{3t^2}$; $\dfrac{d^3x}{dt^3}$

e) $u^2 - 2uv^2 + v^3 = 1$; $\dfrac{du}{dv}$

f) $r = \dfrac{1 - s}{\sqrt{2 + 3s}}$; $\dfrac{ds}{dr}$

g) $x = \dfrac{t}{1 + t}$ et $y = t - \dfrac{1}{t}$; $\dfrac{dy}{dx}$

10. Pour quelle(s) valeur(s) de x la tangente à la courbe d'équation $y = x^3(2 - 3x)^4$ sera-t-elle horizontale?

11. Trouver les valeurs qui annulent les dérivées première et seconde de

$$f(x) = \frac{2 - x}{(3x - 4)^2}$$

12. Trouver les équations des droites tangentes à la courbe définie par l'équation

$$x^2 + x^2y + y^2 = 3$$

lorsque $x = 1$.

13. Si $\dfrac{1}{\pi} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ calculer: a) $\dfrac{dp}{dq}$, b) $\dfrac{dq}{dp}$.

Réponses aux exercices de révision

1. $-\dfrac{3}{25}$

2. $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{où} \quad f(x) = \sqrt{1 - 3x} \quad \text{et} \quad f(x + \Delta x) = \sqrt{1 - 3(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1 - 3(x + \Delta x)} - \sqrt{1 - 3x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1 - 3(x + \Delta x)} - \sqrt{1 - 3x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{1 - 3(x + \Delta x)} + \sqrt{1 - 3x}}{\sqrt{1 - 3(x + \Delta x)} + \sqrt{1 - 3x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[1 - 3(x + \Delta x)] - (1 - 3x)}{\Delta x\left[\sqrt{1 - 3(x + \Delta x)} + \sqrt{1 - 3x}\right]} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{\Delta x\left[\sqrt{1 - 3(x + \Delta x)} + \sqrt{1 - 3x}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{\left[\sqrt{1 - 3(x + \Delta x)} + \sqrt{1 - 3x}\right]}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{1 - 3x} + \sqrt{1 - 3x}} = \frac{-3}{2\sqrt{1 - 3x}}$$

3. a) $$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t = -1} = \lim_{t \to -1} \frac{f(t) - f(-1)}{t - (-1)} \quad \text{où} \quad f(t) = 2 - \frac{3}{t} \quad \text{et} \quad f(-1) = 5$$

$$= \lim_{t \to -1} \frac{\left[2 - \frac{3}{t}\right] - 5}{t + 1}$$

$$= \lim_{t \to -1} \frac{-3 - \frac{3}{t}}{t + 1}$$

$$= \lim_{t \to -1} \frac{-3(1 + t)}{t(t + 1)} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$= \lim_{t \to -1} -\frac{3}{t} = 3$$

3.b) $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{(2x + 1) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} 2 = 2 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(1 + x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \end{cases}$$

par conséquent $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} \nexists$

4. a) 32 cm/s b) 80 cm/s

5. a) 0,22 g/h b) 4,5 h

6. $y = -2x + 6$

7. 18 m/s

8. a) $\dfrac{\sqrt{v}}{2}$

f) $\dfrac{3x(16 - 9x^2)}{4\sqrt{2 - x^2}}$

b) $-\dfrac{(2x + 1)}{x^2 (x + 1)^2}$

g) $\dfrac{2(u^2 + 1)^4(2 + 15u - 3u^2)}{(3 - u)^5}$

c) $\dfrac{10(3 - 2r)}{(r^2 - 3r + 4)^6}$

h) $8v(5 - 6v^2)(4v^2 - 1)(2 - v^2)^3$

d) $\dfrac{34\theta}{(8 + 2\theta^2)^2}\sqrt{\dfrac{8 + 2\theta^2}{3\theta^2 - 5}}$

i) $\dfrac{48a^2x(a^2x^2 - 4)^3}{(a^2x^2 + 2)^5}$

e) $\dfrac{t^2 + 2t + 3}{\sqrt{(2t + 1)^5}}$

j) $\dfrac{t + \sqrt{2t^2 + 1}}{\sqrt{2t + \sqrt{2t^2 + 1}}\ \sqrt{2t^2 + 1}}$

9. a) $3\sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{x}}{x}}$

b) $-\dfrac{32}{t^3}$

c) $-\dfrac{9}{8}$

d) $\dfrac{2(t^5 - 20)}{t^5}$

e) $\dfrac{v(4u - 3v)}{2(u - v^2)}$

f) $-\dfrac{2(2 + 3s)\sqrt{2 + 3s}}{7 + 3s}$

g) $\dfrac{(t^2 + 1)(1 + t)^2}{t^2}$

10. $x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = \dfrac{2}{7}$

11. $x = \dfrac{8}{3}$ annule la dérivée première et $x = \dfrac{10}{3}$ annule la dérivée seconde.

12. $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$ et $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{7}{3}$.

13. a) $-\dfrac{p^2}{q^2}$

b) $-\dfrac{q^2}{p^2}$

Annexe

Analyse marginale

En économie, l'expression *analyse marginale* est une technique qui permet d'étudier l'effet que produit sur une fonction (coût, revenu, demande, production, ...) un accroissement d'une unité de la variable indépendante.

exemple 1

coût marginal

On estime que le coût de production total (en \$) de x chandails est:

$$C(x) = 500 + 3x + 40\sqrt{x} \text{ dollars}$$

Si présentement on fabrique 100 chandails

a) déterminer le coût total de cette production,
b) déterminer ce qu'il en coûterait pour produire le 101^e chandail.

---

solution

Évaluons d'abord le coût de production total de 100 chandails. Pour cela, il suffit de remplacer x par 100 dans l'équation du coût de production des chandails.

$$\begin{aligned} C(100) &= 500 + 3(100) + 40\sqrt{100} \\ &= \boxed{1200 \text{ \$}} \end{aligned}$$

On obtient le coût pour produire le 101^e chandail en effectuant la différence suivante:

$$\begin{aligned} C(101) - C(100) &= \left(500 + 3(101) + 40\sqrt{101}\right) - \left(500 + 3(100) + 40\sqrt{100}\right) \\ &= 3(101) + 40\sqrt{101} - 3(100) - 40\sqrt{100} \\ &= 303 + 401{,}995 - 300 - 400 \\ &= 4{,}99 \text{ \$} \end{aligned}$$

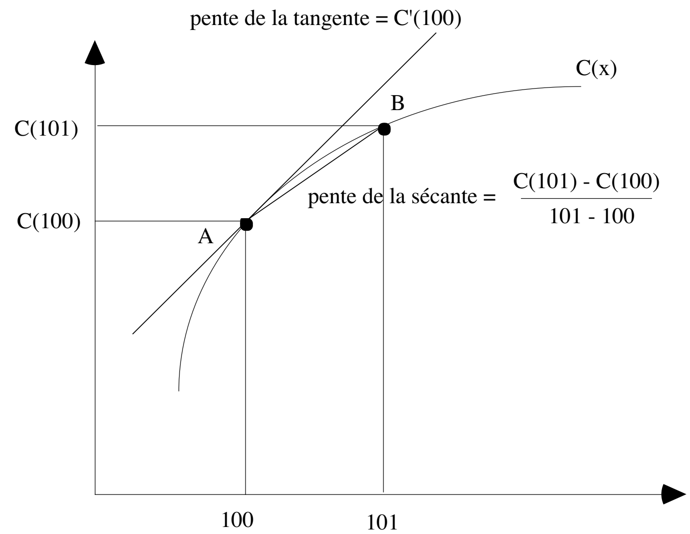
Le coût de production du 101^e chandail est donc $\boxed{4{,}99 \text{ \$}}$.

Les économistes disposent d'une technique beaucoup plus rapide pour obtenir cette valeur ou du moins pour obtenir une approximation de cette valeur. Ils utilisent la dérivée.

$$\begin{aligned} C(101) - C(100) &= \frac{C(101) - C(100)}{101 - 100} \\ &\sim \lim_{x \to 100} \frac{C(x) - C(100)}{x - 100} \\ &\sim C'(100) \\ &\sim 3 + 20\frac{1}{\sqrt{100}} \\ &\sim \boxed{5 \text{ \$}}. \end{aligned}$$

$C'(x) = 3 + 20\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

C'(100) est appelé par les économistes le *coût marginal* pour une production de 100 chandails ou encore. Ce coût représente une bonne approximation de ce qu'il en coûterait pour augmenter d'une unité la production.



Graphiquement le coût réel pour produire le 101^{e} chandail correspond à la pente de la droite sécante passant par les points A et B.

$$\text{coût du } 101^{e} \text{ chandail} = \frac{C(101) - C(100)}{101 - 100}$$

Les économistes obtiennent une bonne approximation de ce coût en utilisant la pente de la tangente au point A

$$\text{coût du } 101^{e} \text{ chandail} \sim C'(100)$$

La dérivée constitue un moyen rapide d'obtenir les coûts engendrés par la production du x^{e} chandail. Ainsi le coût du

$$201^{e} \text{ chandail est} \sim \left.\frac{dC}{dx}\right|_{x = 200} = 3 + 20\frac{1}{\sqrt{200}} = 4{,}41\ \$$$

$$401^{e} \text{ chandail est} \sim \left.\frac{dC}{dx}\right|_{x = 400} = 3 + 20\frac{1}{\sqrt{400}} = 4{,}00\ \$$$

$$1001^{e} \text{ chandail est} \sim \left.\frac{dC}{dx}\right|_{x = 1000} = 3 + 20\frac{1}{\sqrt{1000}} = 3{,}63\ \$$$

Le concept peut être appliqué à plusieurs autres types de fonctions.

- À la fonction revenu d'un produit, on parlera de revenu marginal.
- À la fonction profit d'un produit, on parlera du profit marginal.
- À la fonction demande d'un produit, on parlera de la demande marginale, etc.

exemple 2

profit marginal

Après étude, une petite entreprise fabriquant des chaises a déterminé qu'il lui en coûte

$$C(x) = 700 + 9x - \frac{x^2}{100} \text{ dollars}$$

pour fabriquer x chaises. Si le prix de vente est de 15 $ la chaise,

a) quels sont les profits de l'entreprise lorsqu'elle produit et vend 200 chaises ?
b) Si la compagnie décidait d'augmenter sa production d'une unité, déterminer à l'aide de l'analyse marginale, l'augmentation du profit de l'entreprise qu'il en résulterait.

solution

profit = revenu - coût

rép: a) 900 $; b) 10 $

Dans l'exemple suivant, l'analyse marginale est utilisée pour évaluer l'effet sur la production d'un accroissement de la main-d'oeuvre d'une unité.

exemple 3

production marginale

On estime que la production hebdomadaire d'une usine est de

$$Q(x) = -x^3 + 60x^2 + 1200x \text{ unités}$$

où x est le nombre de travailleurs employés à l'usine. Présentement l'usine dispose de 30 employés. A l'aide de l'analyse marginale, calculer la variation de la production hebdomadaire résultant de l'embauche d'un travailleur supplémentaire.

solution

rép: 2100 unités

Problèmes supplémentaires

1. Pour fabriquer x ensembles de patio, la compagnie des BOIS ROND estime ses coûts (en dollars) à

$$C(x) = 20 + 500x - x^2$$

   a) Déterminer la fonction coût marginal.
   b) Quel est le coût marginal de la compagnie lorsqu'elle produit 50 ensembles de patio (interpréter votre réponse) ?

2. Le coût de production de x calculatrices est de

$$C(x) = 1000 + 5x - \frac{x^2}{200} \text{ dollars} \quad \text{si} \quad x \leq 400$$

   a) Déterminer la fonction coût marginal.
   b) Quel est le coût approximatif engendré par la fabrication de la 201e calculatrice ?

3. On estime que dans une usine, la production hebdomadaire est de

$$Q(x) = -x^2 + 500x \text{ unités}$$

   où x représente le nombre de travailleurs employés à l'usine. Présentement ce nombre est de 200. A l'aide de l'analyse marginale, évaluer l'effet sur la production hebdomadaire de l'embauche d'un travailleur supplémentaire.

4. Une entreprise fabrique des appareils électroniques. Elle estime que le coût de fabrication de x appareils est donné par la fonction

$$C(x) = 20\,000 + \frac{25\,000}{x} + \frac{5x}{2} \text{ dollars}$$

   Déterminer le coût marginal de l'entreprise lorsque sa production est de

   a) 80 appareils,
   b) 110 appareils,

   (interpréter les réponses obtenues)

5. Le directeur d'une société prédit que le revenu total de la vente de x articles sera

$$R(x) = 600 - \frac{300}{x} \text{ dollars} \quad x \geq 1$$

   a) Trouver la fonction revenu marginal.
   b) Le revenu marginal est-il plus grand pour 25 articles ou pour 50 articles ?
   c) Une augmentation du niveau des ventes aura quel effet sur le revenu marginal?

6. On estime que la production hebdomadaire d'une usine est de

$$P(x) = -x^2 + 60x + 1200 \text{ unités}$$

où x représente le nombre de travailleurs employés à l'usine .

a) Sachant que ce nombre est présentement de 20, évaluer à l'aide de l'analyse marginal, l'augmentation de la production hebdomadaire résultant de l'embauche d'un nouveau travailleur.
b) À partir de combien de travailleurs, l'embauche n'est plus rentable pour la compagnie.

7. Un fabricant estime que pour une production de x unités son revenu est donné par

$$R(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2} \text{ dollars}$$

tandis que les coûts occasionnés par la production des x articles sont donnés par

$$C(x) = 1000 + 10x + 12\sqrt{x} \text{ dollars}$$

a) Déterminer le profit du fabricant pour une production de 400 articles ; 900 articles.
b) Déterminer la fonction profit marginal.
c) Déterminer le profit approximatif que rapporte le 401^e article ; le 901^e article.

Réponses aux problèmes supplémentaires

1. a) $\frac{dC}{dx} = 500 - 2x$

   b) 400 \$ (le 51e ensemble de patio fabriqué coûte approximativement 400\$ à la compagnie)

2. a) $\frac{dC}{dx} = 5 - \frac{x}{100}$

   b) 3 \$

3. la production augmentera de 100 unités par semaine

4. a) -1,41 \$ (le 81e appareil coûte à l'entreprise approximativement 1,41 \$; les coûts de l'entreprise sont alors décroissants)

   b) 0,43 \$ (le 111e appareil coûte à l'entreprise approximativement 0,43 \$; les coûts de l'entreprise sont alors croissants)

5. a) $\frac{300}{x^2}$

   b) pour 25 articles le revenu marginal est 0,48 \$ tandis que pour 50 articles le revenu marginal est 0,12 \$

   c) le revenu marginal diminue lorsque le niveau des ventes augmente

6. a) 20 unités

   b) 30 employés

7. a) -1240 \$ (perte) ; 3140 \$ (gain)

   b) $\frac{dP}{dx} = \frac{3\sqrt{x}}{4} - 10 - \frac{6}{\sqrt{x}}$

   c) 4,70 \$; 12,30 \$