Introduction

L'équation s'avère un outil très précieux en mathématiques. Elle sert de modèle à une multitude de situations concrètes.

Exemple 1.1

La responsable d'une manufacture de vêtements pour dames se rend chez un grossiste en tissus. Elle désire acheter pour 1000$ de tissus de coton et de soie. Le coton se vend 5$ le mètre tandis que la soie se vend 10$ le mètre. Quelle quantité de tissus de coton et de tissus de soie peut-elle acheter.

---

solution

Un problème comme celui-là pourrait être résolu plus facilement s'il était traduit en langage mathématique. L'équation s'avère ici un modèle de solution adéquat.

Soit x: la quantité achetée de coton (en mètres)
y: la quantité achetée de soie (en mètres)

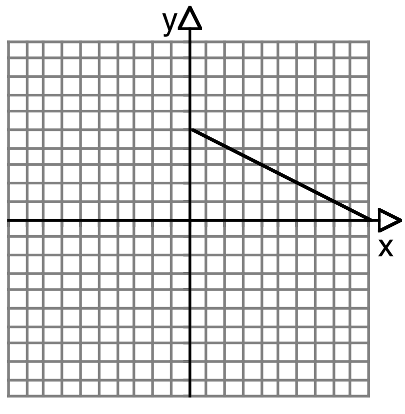
Le problème pourra être formulé de la façon suivante

$$5x + 10y = 1000$$

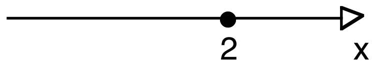
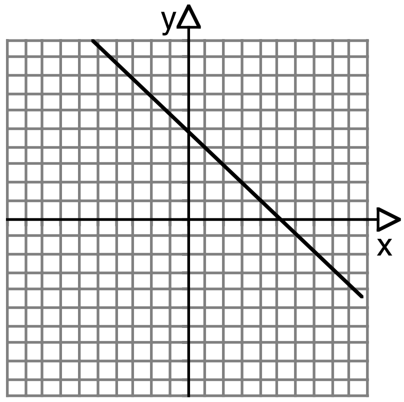
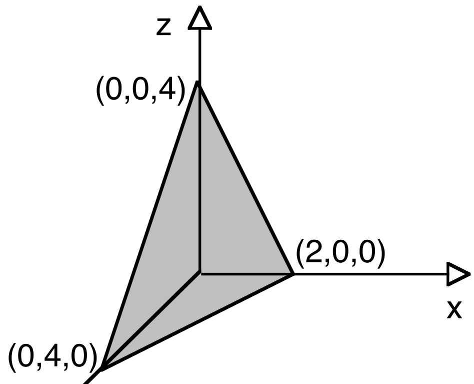
Ainsi si	$x = 50$	alors	$y = 75$	
	$x = 75$	alors	$y = 62{,}5$	
	$x = 100$	alors	$y = 50$	
	$x = 115{,}4$	alors	$y = 42{,}3$	
	$x = 150$	alors	$y = 25$	etc ...

Chacun de ces couples correspond à une possibilité d'achat. L'ensemble des couples constitue ce qu'on appelle *l'ensemble-solution* de l'équation.

Il est possible de visualiser cet ensemble-solution. Il suffit de placer dans un plan cartésien chaque couple d'achats possibles. On obtient un ensemble de points alignés sur une droite.



Lorsqu'une équation se présente sous la forme ax + by = c, la représentation graphique de cette équation est une droite et chacun des points de cette droite est une solution de l'équation. Une équation de cette forme porte le nom d'équation linéaire à deux variables. D'une façon plus générale, l'équation linéaire pourra posséder une ou plusieurs variables. Le graphique de l'ensemble-solution sera représenté par *un point*, *une droite*, *un plan* ou un *hyperplan** dépendant que l'équation linéaire possède 1 variable, 2 variables, 3 variables ou 4 variables et plus.

nombre de variables	exemples d'équations linéaires	représentation graphique de l'ensemble-solution	type de graphique
1	2x = 4		**point**
2	x+y = 5		**droite**
3	2x+y+z = 4		**plan**
4 ou plus	x-y+z+2r= -2	aucune représentation possible	**hyperplan**

* Terme utilisé pour désigner l'équivalent d'un plan dans un espace à plus de 3 dimensions.

Définition 1.1

On appelle *équation linéaire* toute équation de la forme

$$ax + by + cz + ... = k$$

où $x, y, z, ...$ sont les variables de l'équation,
$k, a, b, c, ...$ sont des nombres réels.

Exemple 1.2

Représenter graphiquement l'ensemble-solution des équations linéaires suivantes:

a) $3x = 12$

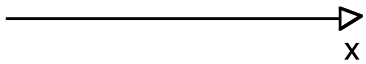
b) $5x + 2y = 20$

c) $3x + 4y + 2z = 12$

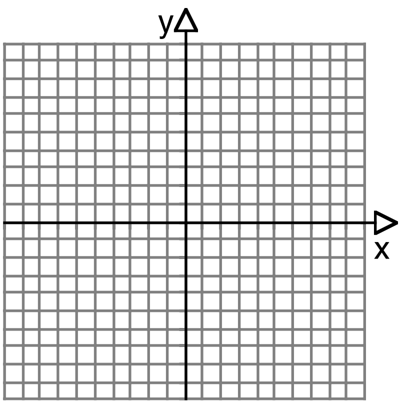
---

solution

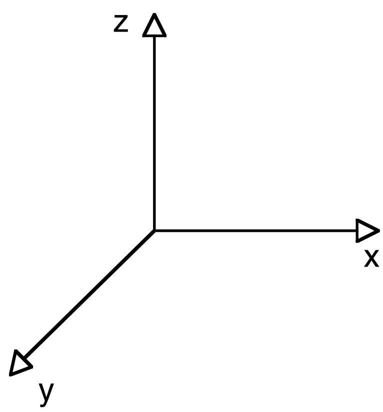
a)



b)



c)



1. Système d'équations linéaires à deux variables

Penchons nous maintenant sur le problème de la résolution d'un système d'équations linéaires de la forme

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Résoudre un système d'équations consiste à chercher la ou les valeurs des variables satisfaisant simultanément les équations. La solution d'un système d'équations linéaires à deux variables peut être obtenue:

a) graphiquement,

b) algébriquement $\begin{cases} \text{1) par la méthode de substitution ou,} \\ \text{2) par la méthode d'addition ou de soustraction.} \end{cases}$

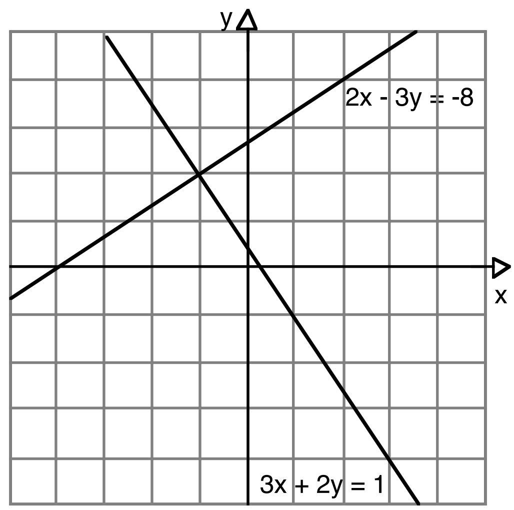
Exemple 1.3

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

---

a) Méthode graphique

L'ensemble-solution d'une équation linéaire à deux variables correspond graphiquement à une droite. Résoudre un système d'équations linéaires consiste à trouver le point d'intersection (s'il existe) des droites associées à chacune des équations.



x	y
-3	5
1	-1

x	y
-4	0
2	4

La solution semble être le point (-1,2). Vérifions-la pour plus de certitude!

b) Méthode algébrique

Définition 1.2

Deux systèmes d'équations sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble-solution.

1) Méthode de substitution

La méthode de substitution consiste à rechercher un système équivalent dans lequel une des équations contient une seule variable.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$$

On isole d'abord la variable x de la seconde équation. On obtient le système équivalent

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x = \dfrac{3y - 8}{2} \end{cases}$$

On substitue ensuite la variable x de la première équation pour obtenir une équation en y.

$$\begin{cases} 3\left(\dfrac{3y - 8}{2}\right) + 2y = 1 \\ x = \dfrac{3y - 8}{2} \end{cases}$$

La première équation devient

$$3\left(\frac{3y - 8}{2}\right) + 2y = 1$$

$$9y - 24 + 4y = 2$$

$$13y = 26$$

$$y = 2$$

On remplace finalement y par 2 dans la seconde équation et on obtient $x = -1$

La solution du système est donc (-1,2).

2) Méthode d'addition ou de soustraction

Cette méthode utilise le principe de base de la méthode précédente. On cherche encore à obtenir un système équivalent dans lequel une des équations contient une seule variable, mais on procède différemment.

Définition 1.3

On peut transformer un système d'équations en un système équivalent en effectuant les opérations suivantes:

a) remplacer une équation par un multiple non nul de cette équation,
b) remplacer une équation par l'équation obtenue de l'addition (ou la soustraction) de celle-ci avec une autre équation du système.

Revenons au problème de l'exemple 1.3

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$$

On multiplie la première équation par 2 et la seconde par -3 et on obtient les systèmes équivalents suivants

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 & \times\ 2 \\ 2x - 3y = -8 & \times\ (-3) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ -6x + 9y = 24 \end{cases}$$

On additionne ensuite la première équation avec la seconde équation et on obtient les systèmes équivalents suivants

$$\begin{cases} 6x + 4y = 2 & \\ -6x + 9y = 24 & \text{éq 1 + éq 2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x + 4y = 2 \\ \quad\ \ 13y = 26 \end{cases}$$

Finalement on obtient

$$13y = 26$$
$$y = 2$$

En substituant dans la première équation on a

$$x = -1$$

La solution du problème est bien (-1,2).

Définition 1.4

Un système d'équations linéaires est:

1. *consistant*
   a) lorsqu'il présente une solution unique (à deux variables, les droites se coupent en un point),
   b) lorsqu'il présente une infinité de solutions (à deux variables, les droites sont confondues),

2. *inconsistant*
   lorsqu'il ne présente pas de solution (à deux variables les droites sont parallèles).

Exemple 1.4

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

---

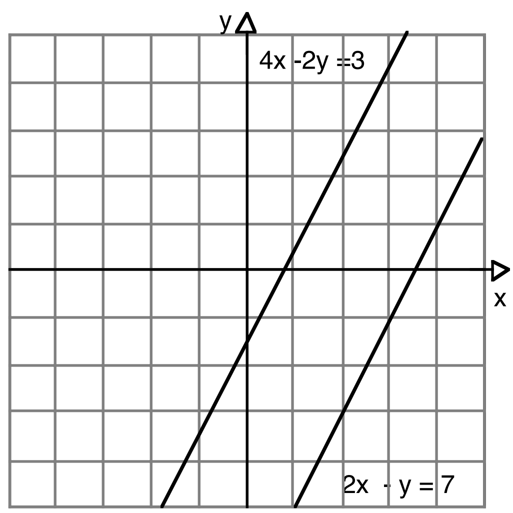
solution

$$\begin{cases} 2x - y = 7 & \times (-2) \\ 4x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -14 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$$

On additionne ensuite la première équation avec la seconde équation et on obtient les systèmes équivalents suivants

$$\begin{cases} -4x + 2y = -14 \\ 4x - 2y = 3 & \text{éq 1 + éq 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -14 \\ 0x + 0y = -11 \end{cases}$$

La deuxième équation est impossible. Le système ne possède pas de solution. Ce système est inconsistant.



Exemple 1.5

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 9x + 6y = 15 \end{cases}$

---

solution

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 & \times(-3) \\ 9x + 6y = 15 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 6y = -15 \\ 9x + 6y = 15 \end{cases}$$

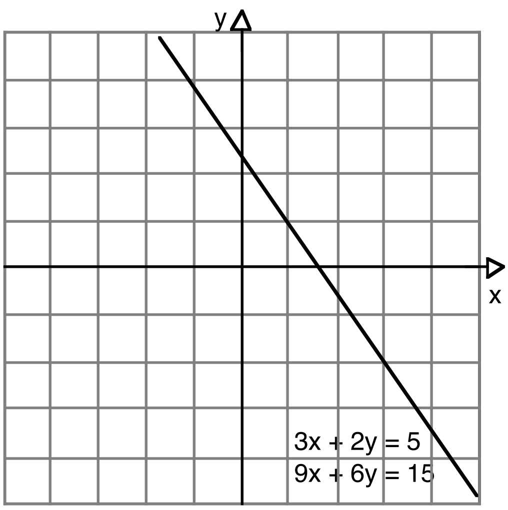
On additionne ensuite la première équation à la seconde et on obtient les systèmes équivalents

$$\begin{cases} -9x - 6y = -15 & \\ 9x + 6y = 15 & \text{éq } 1 + \text{éq } 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 6y = -15 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est toujours vraie. Le système possède donc une infinité de solutions. Chaque solution correspond à un point de l'équation $-9x - 6y = -15$.

Pour $x = a$ on a $y = \dfrac{5 - 3a}{2}$.

Tout point de la forme $\left(a , \dfrac{5 - 3a}{2}\right)$ est solution. Ce système est consistant.



Appliquons maintenant les notions qui viennent d'être développées à une classe spéciale de problèmes. D'abord nous construirons un modèle simple, plus ou moins adapté au problème présenté. Par la suite nous tenterons de raffiner ce modèle afin de le rendre plus conforme à la réalité. Evidemment le contexte mathématique exigera l'utilisation de notions un peu plus complexes.

Exemple 1.6

Une compagnie se spécialise dans le recyclage de papier. On y fabrique deux différentes qualités de papier à partir de rebuts de tissus et de rebuts de papier. Un lot de papier de qualité A est fabriqué à partir de 4 tonnes de tissus et de 18 tonnes de papier tandis qu'un lot de papier de qualité B est fabriqué à partir de 1 tonne de tissus et de 15 tonnes de papier. Si la compagnie possède en stock 10 tonnes de rebut de tissus et 66 tonnes de rebut de papier et *qu'elle désire utiliser la totalité de ses ressources*, combien de lots de chaque qualité de papier devra-t-elle fabriquer?

---

solution

Ce genre de problème possède en général beaucoup de données. Il est souhaitable de tabuler ces données.

	rebut de tissus (tonnes)	rebut de papier (tonnes)	
qualité A	4	18	x: # de lots de qualité A
qualité B	1	15	y: # de lots de qualité B
	10	66	

Le problème peut être représenté à l'aide du système suivant

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ 18x + 15y = 66 \end{cases}$$

Résoudre algébriquement le système d'équations en utilisant la méthode de votre choix et interpréter les résultats obtenus.

Exemple 1.7

Une compagnie cinématographique fabrique des films de qualité supérieure ainsi que des films de qualité moyenne. Un film de qualité supérieure nécessite 15 000 heures-homme de temps et 3 000 000$ tandis qu'un film de qualité moyenne nécessite 10 000 heures-homme de temps et 1 000 000$. Combien de films de chaque catégorie peuvent être fabriqués si la compagnie dispose d'un budget de de 360 000 heures-homme et de 45 000 000$ et qu'elle désire utiliser la totalité de ses ressources?

---

solution

			x:
			y:

Exercices

1) Lesquelles parmi les équations suivantes sont linéaires?

a) $3y + 2x = 7$

b) $-2x = 0$

c) $x^2 + 3x - 4 = 0$

d) $x + y + z - r + s = -4$

e) $\sqrt{x} + y = 1$

2) Déterminer le type de graphique associé à chacune des équations (un point, une droite, un plan ou un hyperplan).

a) $y - 2x + 3 = 0$

b) $6x = 5$

c) $x + y = z + 5$

d) $2x + 4y - 2z = 8$

e) $x - 4y + z + r - 2t = 3$

3) Résoudre graphiquement chacun des systèmes.

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = -3 \\ -2x + 3y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 5x - 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 2y - 4x = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

4) Résoudre par la méthode de substitution chacun des systèmes.

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5x + 3y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - 9 = 0 \\ x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 5 = 2y \\ 4y + 1 = 15x - 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2y + 6 = 4x \end{cases}$

5) Résoudre par la méthode d'addition ou de soustraction chacun des systèmes.

a) $\begin{cases} 6x - 5y = 15 \\ 3x + 2y = 21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 12x - 6y - 18 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y + 2(x+1) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 5x - 26y = 20 \end{cases}$

6) Une ébénisterie fabrique deux sortes de tables à café en utilisant une machine A et une machine B. Une table de fantaisie demande 15 minutes d'utilisation de la machine A et 24 minutes de la machine B tandis qu'une table ordinaire nécessite 10 minutes d'utilisation de la machine A et 18 minutes de la machine B. Chaque jour, la capacité maximale d'utilisation de la machine A est de 320 minutes tandis que la capacité maximale d'utilisation de la machine B est de 540 minutes. En utilisant les machines A et B au maximum, combien devrait-on fabriquer de tables de chaque sorte?

7) Une teinturerie est à créer deux teintes de pourpre pour la période de Pâques. Un sachet de pourpre foncé est créé à partir d'un mélange de 1 g de poudre à teinture rouge avec 2 g de poudre à teinture bleue. Le pourpre pâle demande un mélange de 2 g de poudre à teinture rouge avec 3 g de poudre à teinture bleue. La compagnie possède une quantité de 5000 g de poudre à teinture rouge et de 8500 g de poudre à teinture bleue. Quelle quantité de chacune des teintes devrait être produite si la compagnie espère utiliser toute sa poudre à teinture rouge et bleue?

8) Un camp de vacance pour jeunes possède 30 moniteurs et 204 enfants. On projette organiser une course en canots ainsi qu'une régate de voiliers pour célébrer le 10^{e} anniversaire de fondation du camp de vacance. A cause d'un règlement du camp, un canot doit contenir 4 enfants et 2 moniteurs et un voilier, 30 enfants et 3 moniteurs. Si les organisateurs désirent que tous participent aux célébrations, combien de canots et de voiliers seront nécessaires?

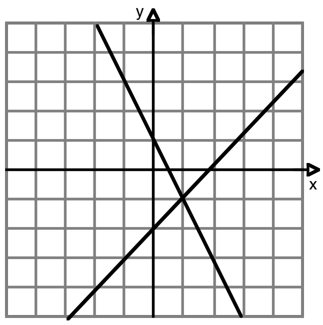
9) Un collège possède 6000 unités (heures-homme) de temps professeurs et 400 000 unités de plancher pour des classes et des laboratoires de recherche. Le collège désire calculer le nombre d'unités (heures-homme) de professeurs qui seront affectés à l'enseignement et à la recherche. Pour chaque unité (heures-homme) assignée à la recherche, 50 unités de plancher sont nécessaires et pour chaque unité (heures-homme) assignée à l'enseignement, 75 unités de plancher sont nécessaires. Si le collège désire utiliser tout son personnel ainsi que tout l'espace de plancher, combien d'unités (heures-homme) doit-on assigner à l'enseignement et à la recherche?

Réponses

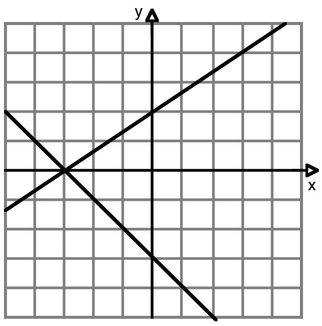
1) a) fonction linéaire
b) fonction linéaire
c) pas une fonction linéaire
d) fonction linéaire
e) pas une fonction linéaire

2) a) droite (à deux dimensions)
b) point (à une dimension)
c) plan (à trois dimensions)
d) plan (à trois dimensions)
e) hyperplan (à cinq dimensions)

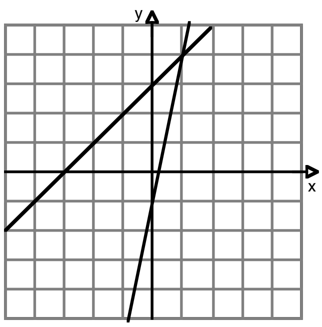
3) a) $(1, -1)$



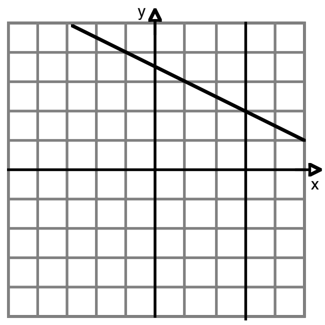
b) $(-3, 0)$



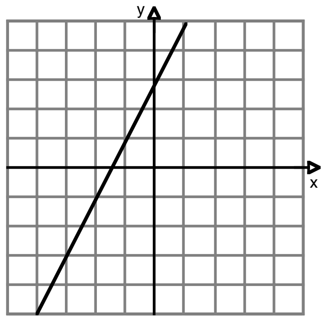
c) $(1, 4)$



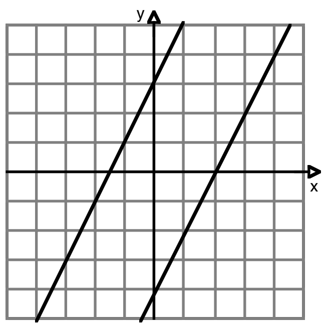
d) $(3, 2)$



e) infinité de solutions



f) aucune solution



4) a) $(2, -1)$
b) $(4, 1)$
c) $(2, \frac{7}{2})$
d) infinité de solutions

5) a) (5,3)
b) (1, -1)
c) aucune solution
d) (4,0)

6) 12 tables de fantaisie et 14 tables ordinaires

7) 2000 sachets de pourpre foncé et 1500 sachets de pourpre pâle

8) 6 canots et 6 voiliers

9) 4000 unités (heures-homme) pour l'enseignement et 2000 unités (heures-homme) pour la recherche

2. Système d'équations linéaires à trois variables

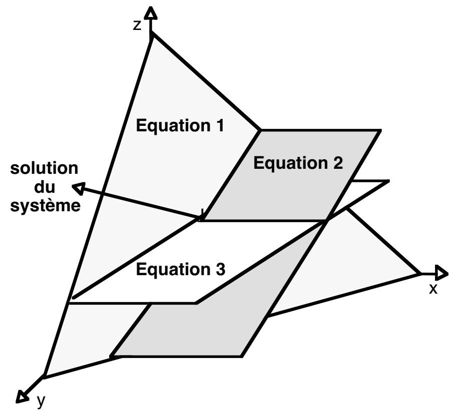
Les systèmes d'équations linéaires qui ont été étudiés jusqu'à présent comportaient deux variables. Généralement, la complexité des situations courantes requiert l'utilisation de plus de deux variables. Il est indispensable d'élargir notre étude aux systèmes d'équations linéaires à plusieurs variables.

On a vu que dans un espace à trois dimensions, une équation linéaire à trois variables correspond à un plan. Graphiquement, résoudre un système d'équations linéaires à trois variables est équivalent à trouver le point de rencontre (s'il existe) de trois plans.

Comme pour les systèmes d'équations linéaires à deux variables, les systèmes d'équations linéaires à trois variables peuvent présenter trois types de solutions.

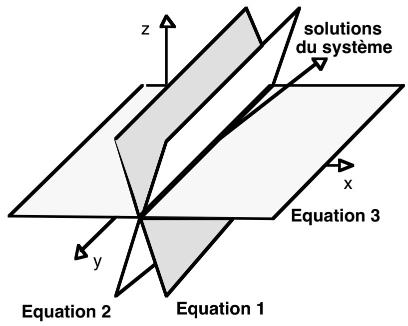
a) *solution unique*

(système consistant)



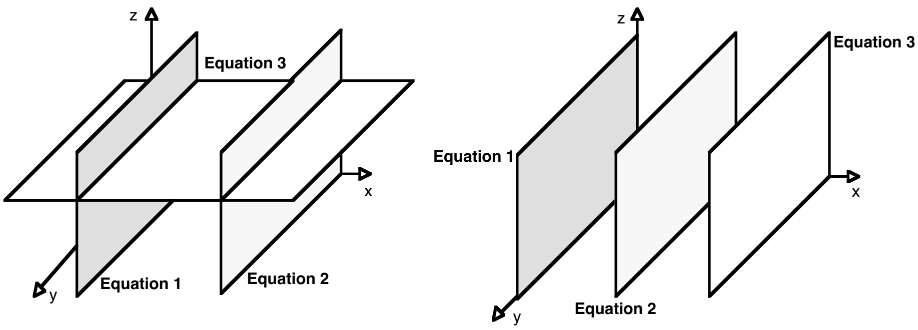
b) *solutions multiples*

(système consistant)



c) *aucune solution*

(système inconsistant)



Même s'il est possible de visualiser dans un espace à trois dimensions l'ensemble-solution d'un système d'équations linéaires à trois variables, il serait évidemment très difficile de résoudre graphiquement de tels systèmes. A plus de deux variables, seules les méthodes algébriques (substitution, addition ou soustraction) seront utilisées.

Exemple 2.1

Résoudre algébriquement le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$$

---

solution

Exemple 2.2

Résoudre algébriquement le système d’équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y - z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$$

---

solution

Remarque: Lorsqu’un système de trois équations linéaires à trois variables présente une équation de la forme $0x + 0y + 0z = 0$ alors le système possède une infinité de solutions; il est consistant. S’il présente une équation de la forme $0x + 0y + 0z = c$ (où $c \neq 0$) alors le système ne possède aucune solution; il est inconsistant.

Exemple 2.3

Une confiserie possède trois mélanges de noix différents:

le mélange A contient 500g d'arachides, 400g de pacanes et 100g de noisettes,
le mélange B contient 400g d'arachides, 200g de pacanes et 400g de noisettes,
le mélange C contient 600g d'arachides, 100g de pacanes et 300g de noisettes.

Si la confiserie possède 6100g d'arachides, 2500g de pacanes et 3400g de noisettes et qu'elle désire utiliser tout son stock de noix, combien de sacs de chaque mélange devra-t-elle faire?

---

solution

x:

y:

z:

Exercices

1) Résoudre algébriquement les systèmes d'équations linéaires.

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + z = 7 \\ y - z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 12 \\ 2x + y + 3z = -7 \\ 4x + 3y + z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ x - 3y + 2z = 3 \\ 3x - 5y + 4z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ x - 3y + 4z = 8 \\ 2x - 2y + 3z = 14 \end{cases}$

2) Pour fabriquer les trois produits P_1, P_2 et P_3, on doit leur faire subir successivement des opérations sur trois machines, M_1, M_2 et M_3. Les temps d'exécution sur chacune des machines sont fournis dans le tableau suivant.

	M_1 (minutes)	M_2 (minutes)	M_3 (minutes)
P_1	11	12	16
P_2	22	12	16
P_3	11	24	16

Par exemple on peut noter que le temps d'exécution de la pièce P_1 sur la machine M_2 est de 12 minutes. On suppose que les machines n'ont pas de temps mort par suite d'une attente d'un produit en opération sur une autre machine. Les heures disponibles de chaque machine pour une activité d'un mois sont:

165 heures pour la machine M_1
140 heures pour la machine M_2
160 heures pour la machine M_3

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P_1, P_2 et P_3 si l'on désire utiliser les trois machines à pleine capacité? (Avant de commencer le problème assurez-vous que toutes vos données sont exprimées avec la même unité de mesure)

3) Trois types de camions sont disponibles pour la location. Une compagnie possède trois sortes de produits qu'elle désire acheminer vers son entrepôt. La charge maximale de chacun des camions est représentée par le tableau ci-dessous.

	produit A	produit B	produit C
camion 1	2	1	1
camion 2	1	2	1
camion 3	0	2	1

Par exemple la charge maximale du camion 2 est:

1 produit A, 2 produit B et 1 produit C.

Si la compagnie désire aucune perte d'espace dans les camions, combien de camions devront être loués pour le transport d'exactement:

11 produits A
9 produits B
7 produits C

Réponses

1) a) (1, 1, 1)
b) (-4, 7, -2)
c) (1, 2, -3)
d) (6, 1, 1)
e) aucune solution
f) infinité de solutions

2) 200 produits P_1
300 produits P_2
100 produits P_3

3) 5 camions de type 1
1 camion de type 2
1 camion de type 3

3. Système d'inéquations linéaires

Penchons nous maintenant sur la notion d'inéquation linéaire et plus particulièrement sur la résolution des systèmes d'inéquations linéaires.

A deux variables, une inéquation linéaire a la forme

$$ax + by \leq c \quad \text{ou} \quad ax + by \geq c$$

Graphiquement l'ensemble-solution de l'inéquation linéaire à deux variables $ax + by \leq c$ ($ax + by \geq c$) est constitué des points sur la droite $ax + by = c$ ainsi que tous les points d'un côté de cette droite. L'ensemble-solution correspond à un *demi-plan* fermé limité par une droite.

Exemple 3.1

Représenter graphiquement l'ensemble-solution associé à l'inéquation linéaire $y - 2x \leq 4$

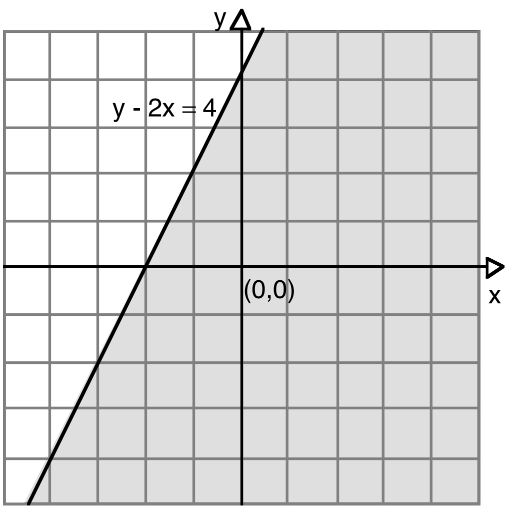
---

solution

Pour déterminer graphiquement l'ensemble-solution d'une inéquation linéaire à deux variables,

a) on commence par tracer la droite frontière $y - 2x = 4$ qui fait partie de l'ensemble-solution puis,
b) on détermine de quel côté de la frontière se situent les autres points satisfaisant l'inéquation.

Ceci peut se faire facilement en choisissant un point qui n'est pas sur la droite frontière. On choisit généralement le point (0,0) et on vérifie s'il satisfait l'inéquation. S'il la satisfait, la région contenant ce point est dans l'ensemble-solution, sinon l'ensemble-solution est de l'autre côté.



Au point (0,0) , l'inéquation

$$y - 2x \leq 4$$

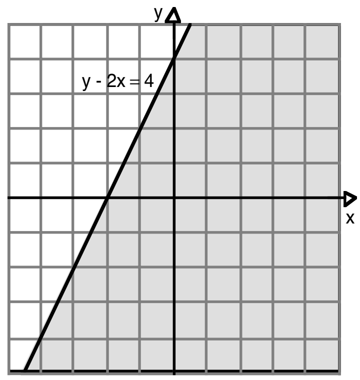
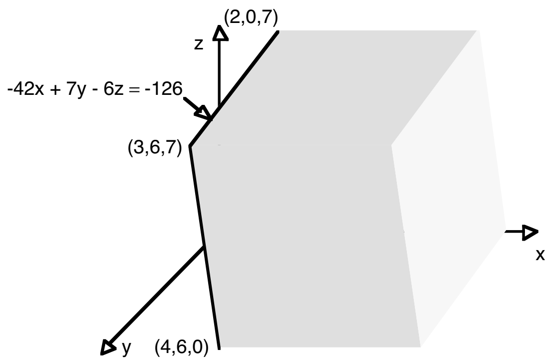
devient

$$0 - 2(0) \leq 4$$
$$0 \leq 4$$

L'inégalité étant toujours vraie, on conclut que l'ensemble-solution est sur le demi-plan contenant (0,0).

Lorsque l'origine est sur la droite frontière, on utilise un autre point.

D’une façon générale, l’inéquation linéaire pourra posséder une ou plusieurs variables. Le graphique de l’ensemble-solution sera représenté par une *demi-droite limitée par un point*, *un demi-plan limité par une droite*, *un demi-espace limité par un plan* ou un *demi-espace limité par un hyperplan* dépendant que l’inéquation possède 1 variable, 2 variables, 3 variables ou 4 variables et plus.

nombre de variables	exemples d’inéquations	représentation graphique de l’ensemble-solution	type de graphique
1	$2x \leq 4$		*demi-droite limitée par un point*
2	$y - 2x \leq 4$		*demi-plan limité par une droite*
3	$-42x+7y-6z \leq -126$		*demi-espace limité par un plan*
4 ou plus	$x - y + z + 2r \leq 2$	aucune représentation possible	*demi-espace limité par un hyperplan*

Résoudre un système d'équations linéaires à deux variables, consiste à trouver un ensemble-solution satisfaisant simultanément toutes les inéquations que possède le système. Graphiquement, l'ensemble-solution correspond à l'intersection de demi-plans.

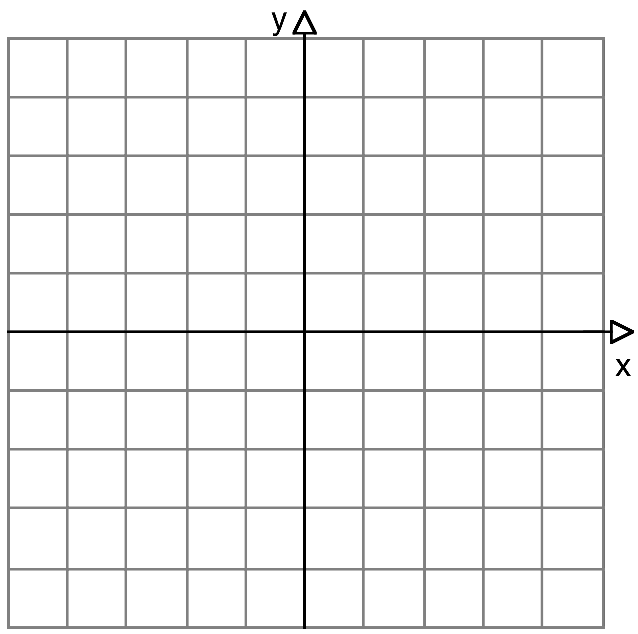
Exemple 3.2

Représenter graphiquement l'ensemble-solution associé au système d'inéquations linéaires suivant:

$$\begin{cases} y - 3x \leq -2 \\ y + x \leq 1 \end{cases}$$

---

solution



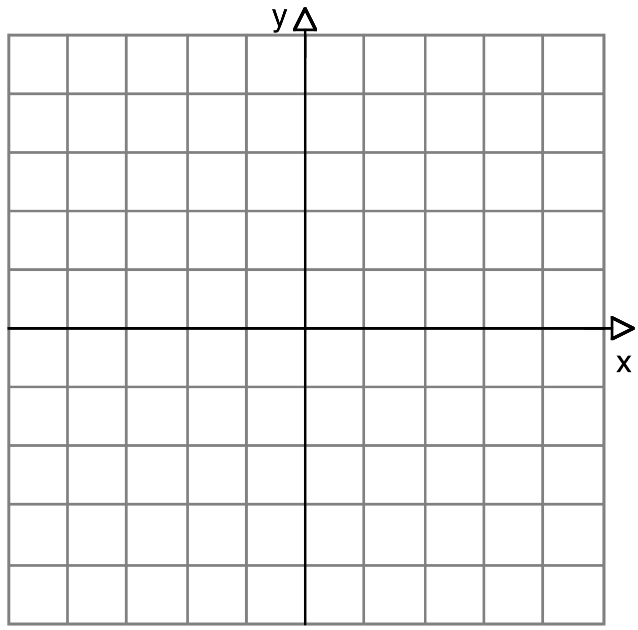
Exemple 3.3

Représenter graphiquement l'ensemble-solution associé au système d'inéquations linéaires suivant:

$$\begin{cases} x - 4y \geq 4 \\ 2x + y \leq 4 \\ y \leq x \\ y \geq -4 \end{cases}$$

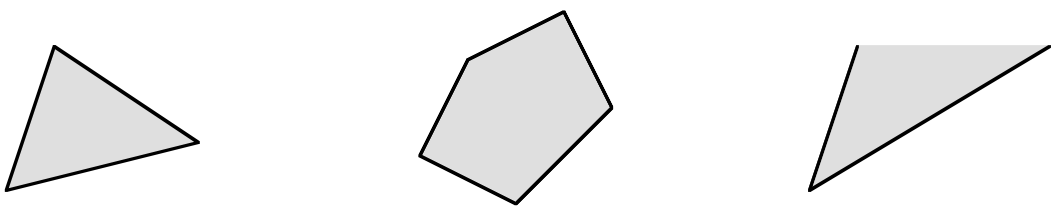
---

solution



> **Définition 3.1**
>
> L'intersection d'un nombre fini de demi-plans est un *ensemble convexe*.

Les figures suivantes sont des ensembles convexes.



L'ensemble convexe peut être *borné* ou *non borné* selon qu'il s'étend ou non jusqu'à l'infini. Les deux premières figures sont des ensembles convexes bornés tandis que la dernière figure est un ensemble convexe non borné.

Les *sommets* d'un ensemble convexe sont les points de rencontre des droites frontières qui le constituent.

Lorsqu'on résout un système d'inéquations linéaires, l'ensemble-solution correspond toujours à un ensemble convexe.

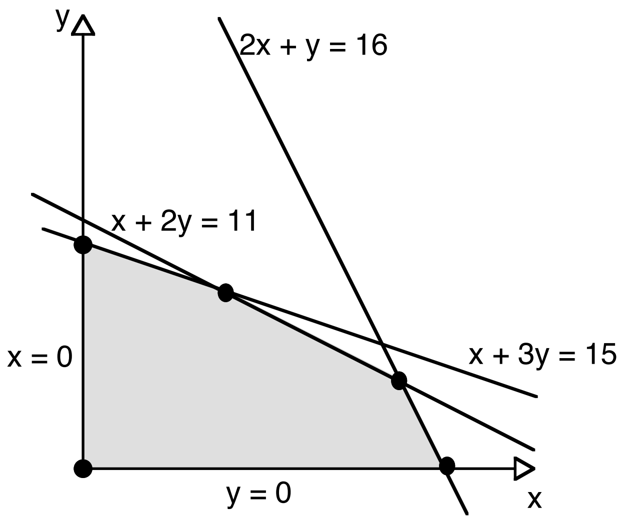
Exemple 3.4

Le graphique ci-dessous représente l'ensemble convexe des solutions du système suivant:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 11 \\ x + 3y \leq 15 \\ x \geq 0 \text{ , } y \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer les sommets de cet ensemble convexe.

solution



Lorsque le système d'équations linéaires est à trois variables, l'ensemble solution correspond à l'intersection de demi-espaces fermés.

La définition d'ensemble convexe peut être généralisé à des espaces à plus de deux dimensions. Ainsi l'intersection de demi-espaces fermés s'appelle aussi un ensemble convexe. L'intersection des plans frontières qui le constituent forme les sommets de l'ensemble convexe.

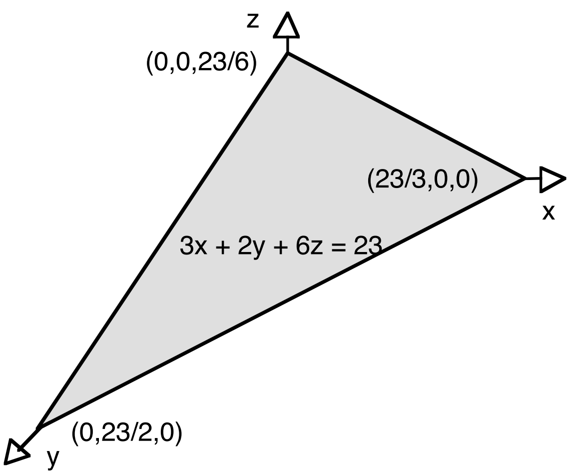
Exemple 3.5

Représenter dans un espace à trois dimensions l'ensemble convexe des solutions associées au système d'inéquations linéaires suivant:

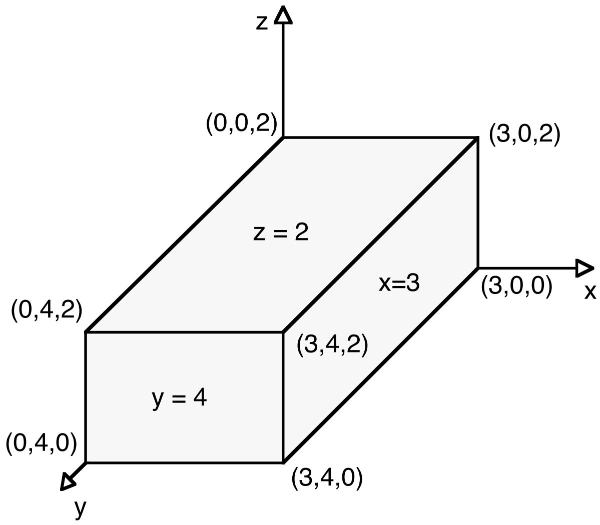
$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z \leq 23 \\ x \leq 3 \\ y \leq 4 \\ z \leq 2 \\ x \geq 0, \; y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

---

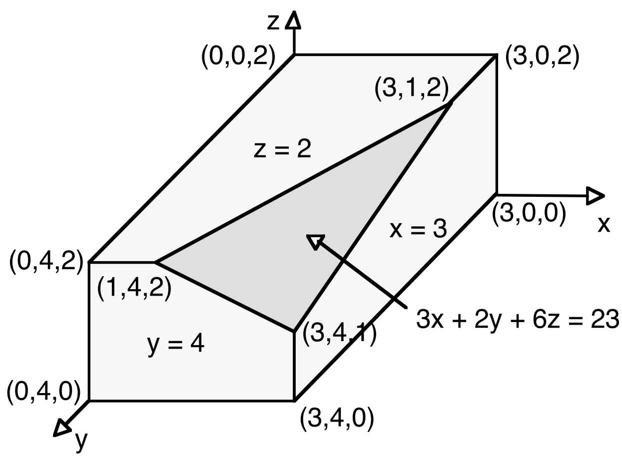
solution



La première inéquation correspond à un demi-espace derrière le plan représenté ici par la zone grise.



Les six dernières inéquations ont pour ensemble-solution l'espace fermé représenté ici par le parallélipipède.



L'intersection des deux ensembles-solution du haut nous donne l'ensemble convexe du bas (chaque sommet de l'ensemble convexe correspond à l'intersection de trois plans).

Exercices

1) Représenter dans un espace à deux dimensions, l'ensemble-solution associé à chacune des inéquations.

a) $3x - 4y \leq 12$
b) $2x + 5y \geq 10$
c) $y \leq 2x$
d) $x \leq -3$
e) $y \geq 1$

2) Représenter dans un espace à deux dimensions, l'ensemble-solution associé à chacun des systèmes d'inéquations.

a) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - y \geq 5 \\ x \leq y + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + y \geq 4 \\ y \leq -4x \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ y \geq x - 1 \\ x \leq 2 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

3) Une compagnie fabrique deux différents modèles d'un produit: le modèle A et le modèle B. Chacun de ces modèles est réalisé par deux machines: la machine x et la machine y. Pour terminer une unité du modèle A, la machine x doit travailler 2 heures et la machine y doit travailler 4 heures. Par ailleurs, pour terminer une unité du modèle B, la machine x doit travailler 4 heures et la machine y doit travailler 2 heures. Un syndicat impose la restriction suivante: aucune machine ne doit fonctionner plus de 12 heures par jour. Représenter dans un espace à deux dimensions l'ensemble des possibilités de fabrication quotidienne de chacun des deux modèles.

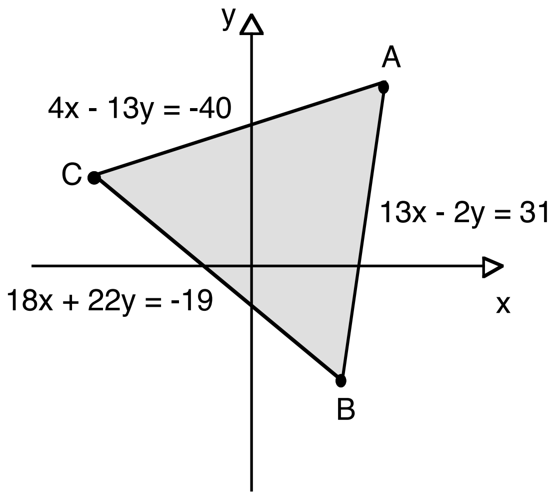
4) Représenter dans un espace à deux dimensions l'ensemble convexe associé à la solution du système d'inéquations linéaires suivant et trouver ses sommets.

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ y + 2x \geq 2 \\ y \geq 3x - 8 \\ x \leq 3 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

5) Le graphique de droite représente l'ensemble convexe des solutions du système suivant:

$$\begin{cases} 4x - 13y \geq -40 \\ 13x - 2y \leq 31 \\ 18x + 22y \geq -19 \end{cases}$$

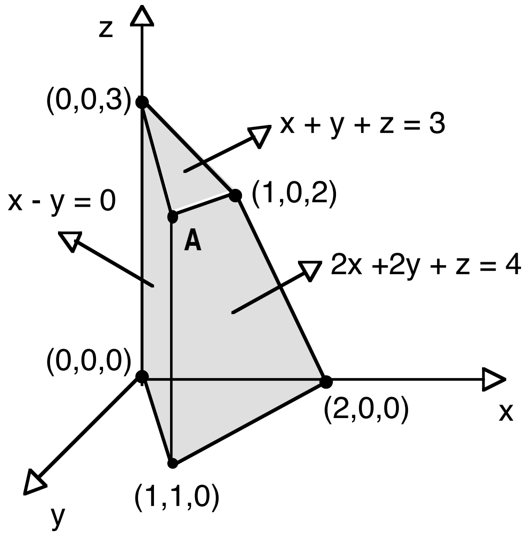
Déterminer les sommets A, B et C de cet ensemble convexe.



6) Le graphique de droite représente l'ensemble convexe des solutions du système suivant:

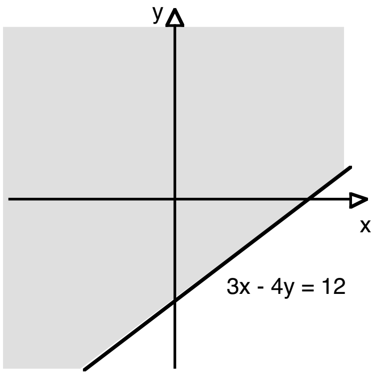
$$\begin{cases} x + y + z \leq 3 \\ 2x + 2y + z \leq 4 \\ x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer le sommet A de cet ensemble convexe.

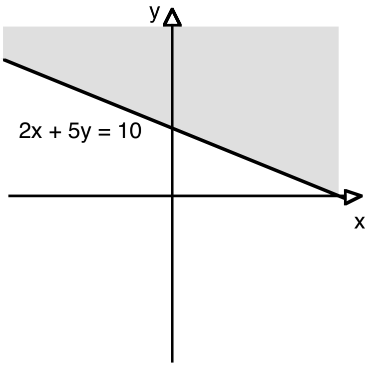


Réponses

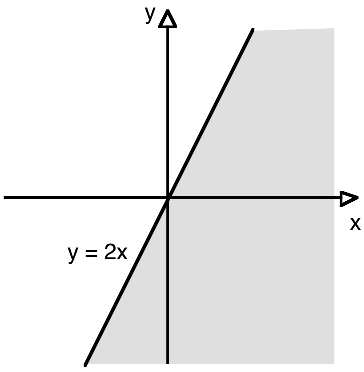
1) a)



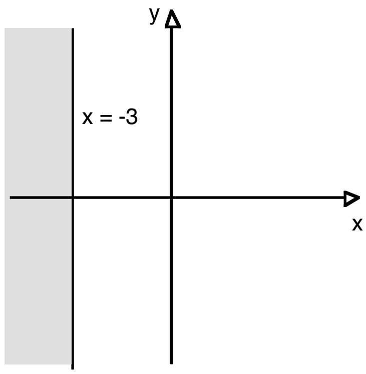
b)



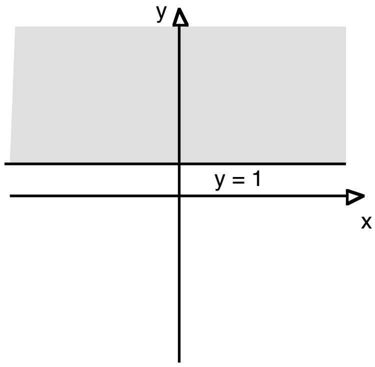
c)



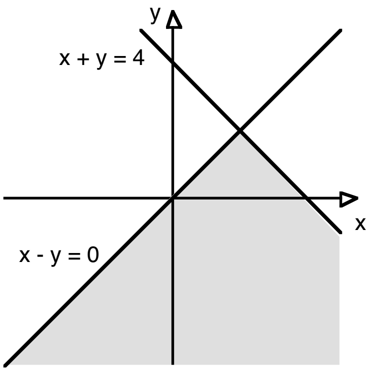
d)



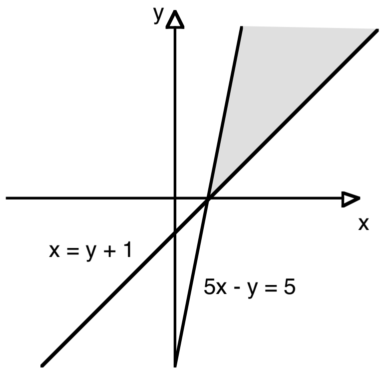
e)



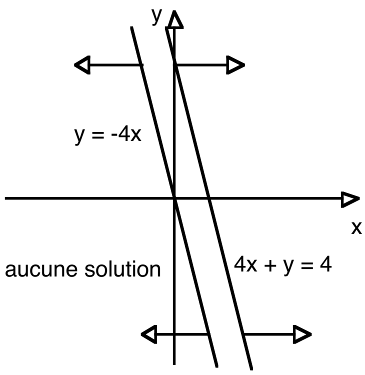
2) a)



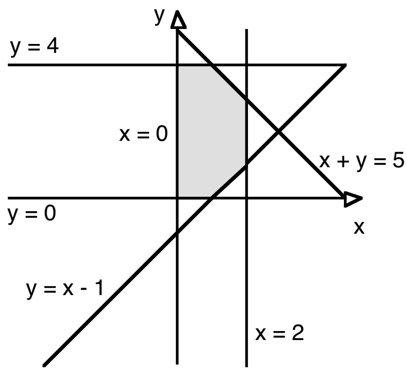
b)



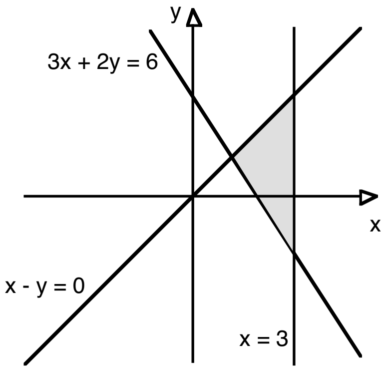
c)



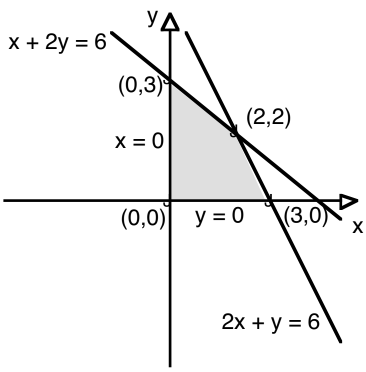
e)



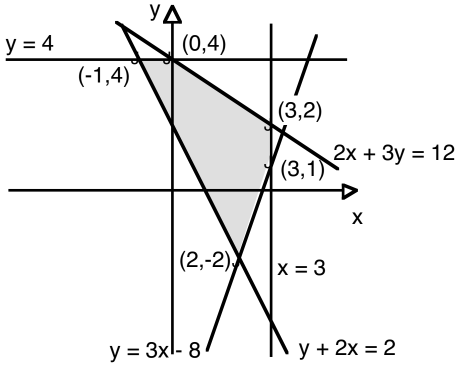
d)



3)



4)



5) A = (3, 4) ; B = (2, -5/2) ; C = (-7/2, 2)
6) A = (1/2, 1/2, 2)

4. La programmation linéaire

Nous présentons dans cette section une approche différente et en même temps plus réaliste aux situations qui ont été étudiées aux sections précédentes.

Exemple 4.1

Le directeur d'une manufacture de meubles décide de fabriquer deux nouveaux modèles de bibliothèque; le modèle A et le modèle B. Le modèle A nécessite 1 heure de sciage, 2 heures d'assemblage et 1 heure de finition. Le modèle B nécessite 2 heures de sciage, 1 heure d'assemblage et 1 heure de finition. La manufacture dispose quotidiennement de 20 heures à l'atelier de sciage, de 22 heures à l'atelier d'assemblage et de 12 heures à l'atelier de finition. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun des modèles sont de 200$ pour le modèle A et de 300$ pour le modèle B. Le directeur désire déterminer le nombre de bibliothèques de chaque modèle qu'il doit fabriquer par jour pour obtenir un profit maximal.

---

solution

On abandonne maintenant l'hypothèse d'utilisation de tout le stock et on cherche une solution parmi celles qui sont réalisables qui amènerait un profit maximal pour la manufacture.

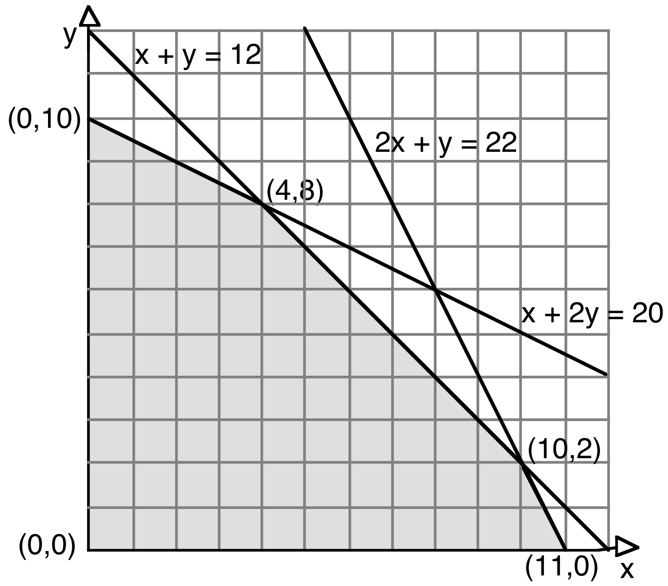
profit		sciage (heures)	assemblage (heures)	finition (heures)	
200$	modèle A	1	2	1	x: # d'unités du modèle A
300$	modèle B	2	1	1	y: # d'unités du modèle B
	ressources	20	22	12	

L'hypothèse d'utilisation de toutes les ressources disponibles étant disparue, le problème peut être représenté sous la forme d'un système d'inéquations.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Les deux dernières inéquations sont dues au fait que le nombre d'unités de chacun des modèles ne peut être négatif.

L'ensemble-solution que l'on appelle, *ensemble des solutions réalisables* du problème, est représenté par la zone grise sur le graphique ci-dessous.



Les points (2,5), (8,3), (2,8), (0,9) .... sont autant de solutions possibles au problème. Le problème consiste maintenant à trouver parmi les solutions réalisables du problème celle(s) qui procure(nt) à la manufacture, un profit maximal. On cherche donc à

maximiser le profit P
où $P = 200x + 300y$

$$\text{si} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Voici quelques profits associés aux solutions du haut:

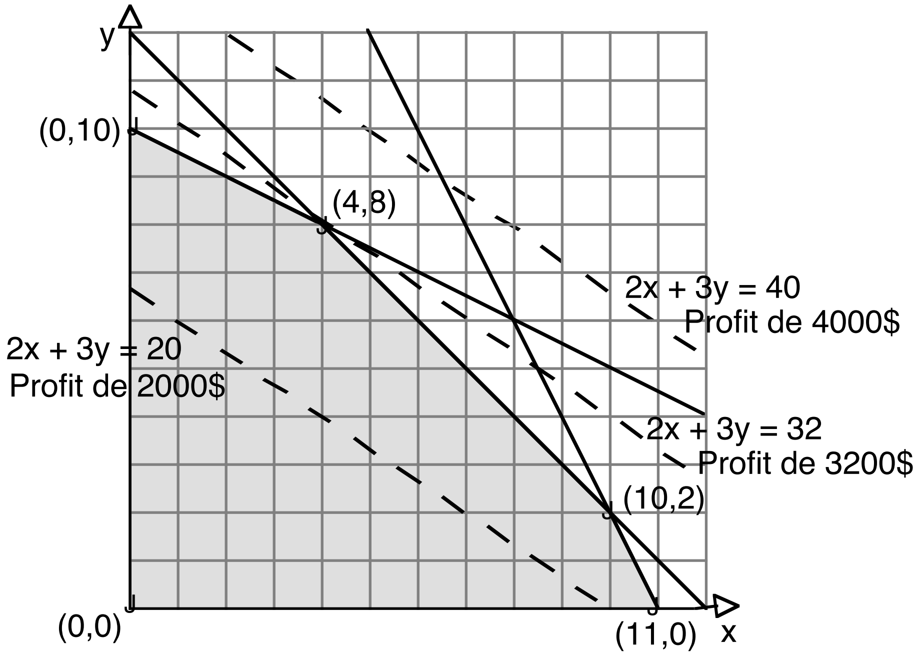
modèle A	modèle B	profit
2	5	200\$(2) + 300\$(5) = 1900\$
8	3	200\$(8) + 300\$(3) = 2500\$
2	8	200\$(2) + 300\$(8) = 2800\$
0	9	200\$(0) + 300\$(9) = 2700\$

Il ne saurait être question de calculer le profit de la manufacture pour chacun des points de l'ensemble des solutions réalisables du problème. Approchons ce problème différemment et posons-nous la question suivante: la manufacture peut-elle faire un profit de

a) 4000\$ par jour? b) 2000\$ par jour? c) 3200\$ par jour?

Pour obtenir les profits mentionnés, on cherche à trouver une quantité x et une quantité y qui, tout en étant une solution réalisable, satisfassent les équations suivantes:

a) $4000 = 200x + 300y \quad \Leftrightarrow \quad 40 = 2x + 3y$
b) $2000 = 200x + 300y \quad \Leftrightarrow \quad 20 = 2x + 3y$
c) $3200 = 200x + 300y \quad \Leftrightarrow \quad 32 = 2x + 3y$



En examinant le graphique associé au problème, on se rend compte

a) qu'un profit de 4000$ ne peut être réalisé car aucun des points de la droite en pointillés coupe la région des solutions réalisables,
b) qu'un profit de 2000$ peut être réalisé de plusieurs façons,
c) qu'un profit de 3200$ peut être réalisé d'une seule façon.

Cette dernière possibilité s'avère être la solution optimale car toutes les droites en pointillés associées aux différents profits sont des droites parallèles. Ces droites glissent vers le haut ou vers le bas dépendant que le profit augmente ou diminue. D'une façon évidente le profit ne peut excéder 3200$ si l'on veut que la droite associée coupe la région des solutions réalisables du problème. Le profit maximal sera donc de 3200$ pour une production de 4 unités du modèle A et de 8 unités du modèle B.

L'ensemble des solutions réalisables de ce problème est un ensemble convexe puisqu'il provient de la solution d'un système d'inéquations linéaires. A cause de la forme d'un ensemble convexe (intersection de demi-plans) la solution du problème sera nécessairement atteinte au dernier point rencontré par la droite en pointillés sur l'ensemble des solutions réalisables à la condition bien entendu que l'ensemble convexe soit borné. *La solution optimale du problème est atteinte en un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables*.

La programmation linéaire peut se définir comme un outil mathématique permettant de solutionner des problèmes du même type que le problème précédent. A l'aide de cet outil, on obtient la solution optimale (maximale ou minimale) d'un tel problème à la condition que la fonction à optimiser soit de la forme linéaire et les contraintes du problème soient toutes des inéquations (ou équations) de forme linéaire. Le mot linéaire est donc très spécifique à ces problèmes. Le mot programmation pour sa part signifie dans notre contexte, un processus ordonné par lequel nous résolvons un problème. Aucun rapport avec la programmation d'un ordinateur comme peuvent l'associer plusieurs personnes. Par ailleurs, l'ordinateur sera d'une grande utilité pour résoudre les problèmes de programmation linéaire.

La forme générale d'un programme linéaire est

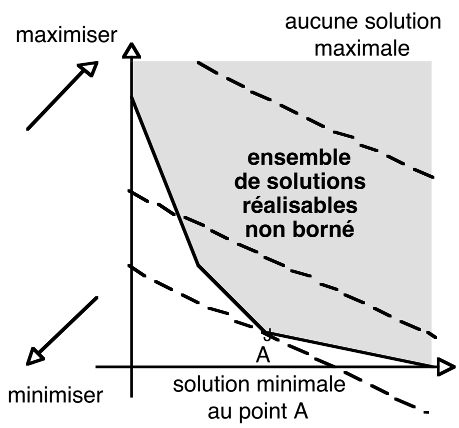
$$\left.\begin{array}{l}\text{maximiser (minimiser) } \omega \text{ où}\\ \omega = a_0x + b_0y + c_0z + \ldots\end{array}\right\}\text{fonction objectif}$$

$$\text{si}\ \left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a_1x + b_1y + c_1z + \ldots \leq k_1\\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots \leq k_2\\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots \leq k_3\\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{contraintes}\\ \text{du problème}\end{array}\\ \left.x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0\ ,\ \ldots\right\}\begin{array}{l}\text{contraintes de}\\ \text{non-négativité}\end{array}\end{array}\right.$$

<u>Proposition 4.1</u>

La valeur maximale (minimale) de la fonction objectif d'un problème de programmation linéaire est obtenue à l'un des sommets de l'ensemble convexe des solutions réalisables si cet ensemble existe et est borné.

Lorsque l'ensemble convexe des solutions réalisables n'est pas borné la proposition précédente n'offre pas de garanties quant à l'existence d'une solution optimale. Cependant si une solution optimale existe, cette solution se retrouve parmi les sommets de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème. Une façon de s'assurer de l'existence de la solution optimale est d'utiliser la technique (droites en pointillés) de l'exemple 4.1.



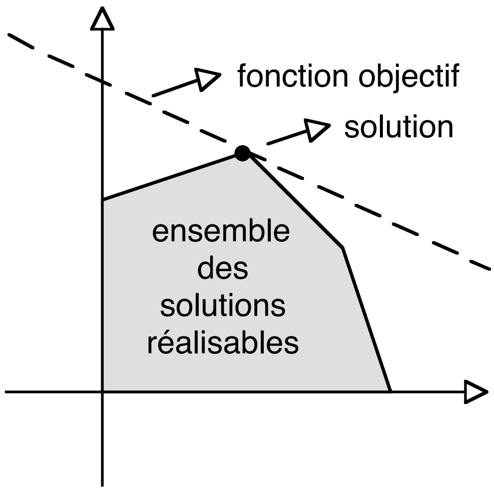
Proposition 4.2

La solution optimale d'un problème de programmation linéaire lorsqu'elle existe est constituée

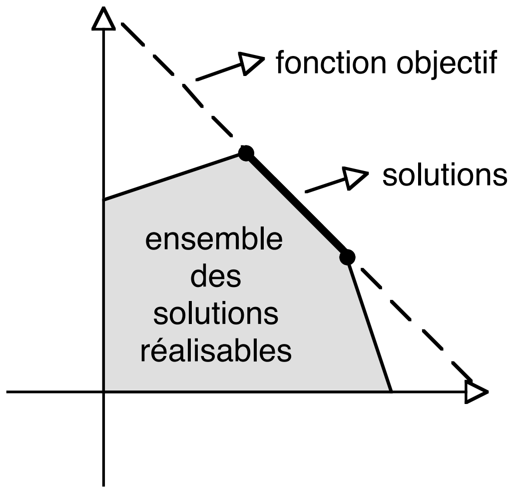
a) d'un seul point (un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème) ou
b) d'une infinité de points (dont deux sommets adjacents de l'ensemble onvexe des solutions réalisables du problème)

Exemple 4.2

a) Une seule solution



b) Une infinité de solutions



Exemple 4.3

Un fermier dispose d'un champ de 120 hectares, de 480$ destinés à l'achat de semences et de 2400 heures-homme en main-d'oeuvre agricole pour effectuer son travail. Il doit utiliser son champ pour deux cultures: l'une (A) pour laquelle la semence revient à 5$ par hectare et qui nécessite 8 heures-homme par hectare pour la main-d'oeuvre et l'autre (B) pour laquelle la semence coûte 3$ par hectare et qui nécessite 24 heures-homme par hectare pour la main-d'oeuvre. Le fermier devra consacrer combien d'hectares à chacune des cultures pour obtenir un profit maximal si

a) la culture A rapporte 100$ par hectare et la culture B rapporte 150$?
b) la culture A rapporte 50$ par hectare et la culture B rapporte 150$?

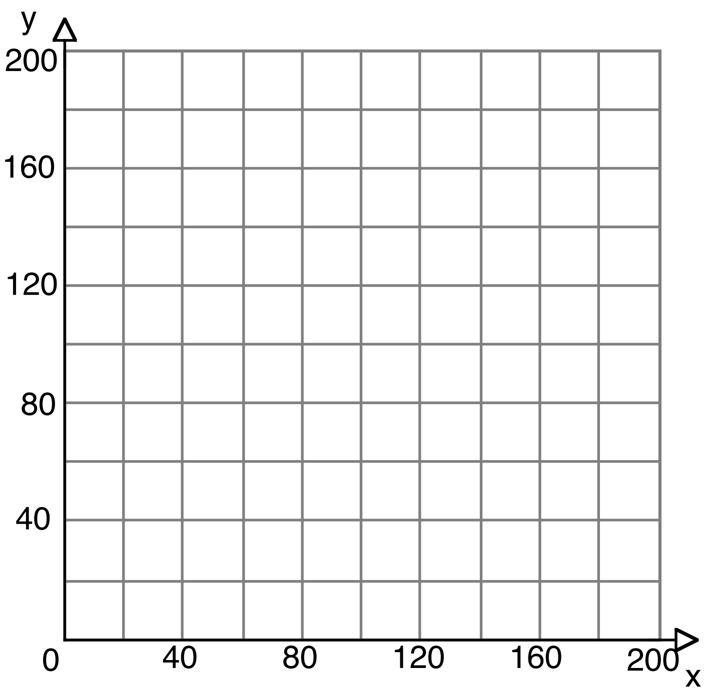
solution

On formule le programme linéaire associé au problème.

Maximiser

si

On représente graphiquement l'ensemble des solutions réalisables du problème puis pour chacun des sommets de cet ensemble, on trouve la valeur de la fonction objectif.



a)

sommets de l'ensemble convexe	valeurs de la fonction objectif P =

b)

sommets de l'ensemble convexe	valeurs de la fonction objectif P =

On détermine la solution du problème.

a)
b)

Exemple 4.4

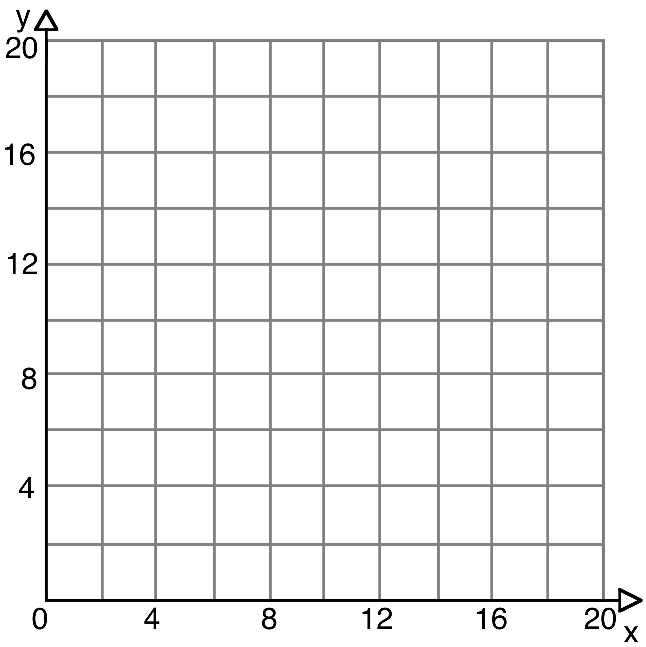
On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, alimentation qui contienne obligatoirement quatre sortes de composants nutritifs; les composants A, B, C et D. L'industrie alimentaire produit deux aliments qui contiennent ces composants; les aliments M et N. Une portion d'aliment M contient 100 g de A, 200 g de C et 100 g de D tandis qu'une portion d'aliment N contient 100 g de B, 300 g de C et 100 g de D. Un animal doit consommer quotidiennement au moins, 0,4 kg de A; 0,5 kg de B; 3,5 kg de C; 1,4 kg de D. L'aliment M coûte 0,30$ la portion et l'aliment N coûte 0,40$ la portion. Combien de portions d'aliments M et d'aliments N doit-on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse?

---

solution

Minimiser

si



sommets de l'ensemble convexe	valeurs de la fonction objectif C =

Exemple 4.5

$$\text{Maximiser } \omega = 2x + y + 3z$$

$$\text{si } \begin{cases} x + 2y + z \leq 25 & (1) \\ 3x + 2y + 2z \leq 30 & (2) \\ x \geq 0 & (3) \\ y \geq 0 & (4) \\ z \geq 0 & (5) \end{cases}$$

---

solution

Nous pouvons utiliser la méthode précédente pour solutionner ce problème mais nous ne pouvons pas compter sur l'aide du graphique. Un problème de ce genre est long à résoudre car on doit trouver tous les sommets de l'ensemble convexe des solutions réalisables sans utiliser un graphique.

Pour cela, nous devons

1. résoudre $C_3^5 = 10$ systèmes de trois équations à trois variables,
2. vérifier si les solutions obtenues sont des sommets de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème,
3. si oui, calculer la valeur de la fonction objectif en ces sommets,
4. choisir la solution optimale.

Le tout sans être assuré que la solution optimale existe puisque sans graphique rien ne nous assure que l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème est un ensemble borné.

contraintes	solution	vérification	valeur de ω
1, 2, 3	(0,10,5)	oui	25
1, 2, 4	(-20,0,45)	non	
1, 2, 5	(5/2,45/4,0)	oui	65/4
1, 4, 5	(25,0,0)	non	
2, 3, 4	(0,0,15)	oui	**45**
2, 3, 5	(0,15,0)	non	
1, 3, 4	(0,0,25)	non	
1, 3, 5	(0,25/2,0)	oui	25/2
2, 4, 5	(10,0,0)	oui	20
3, 4, 5	(0,0,0)	oui	0

La solution maximale, si elle existe est $\omega = 45$ pour $x = 0$, $y = 0$ et $z = 15$.

A ce stade-ci, il est évident qu'une méthode plus efficace est nécessaire pour résoudre ce genre de problème. Le reste du chapitre sera consacré à l'étude d'une méthode très efficace pour résoudre des problèmes de programmation linéaire.

Exercices

1) La Corporation des Vêtements Unis fait des robes ainsi que des blouses. Les profits sur une robe sont de 8$ tandis qu'ils sont de 6$ sur une blouse. La conception d'une robe requiert en moyenne 4 heures d'une dessinatrice tandis qu'une blouse, environ 2 heures. Un tailleur prend 2 heures à faire une robe et 4 heures à faire une blouse. La Corporation dispose à chaque jour de 60 heures de temps pour des-siner les vêtements et de 48 heures de temps pour coudre ces vêtements. Combien de robes et de blouses doit-on fabriquer quotidiennement pour que le profit de la compagnie soit maximal?

2) Un industriel désire ajouter deux nouveaux produits à sa gamme de production, des bibliothèques et des tables de nuit. Ces meubles seront en contreplaqué et acrylique. Les quantités nécessaires de ces matériaux en unités de superficie ainsi que les quantités disponibles hebdomadairement et les temps de réalisation ainsi que les temps disponibles sont donnés dans le tableau suivant.

	tables de nuit	bibliothèques	disponibilité
contreplaqué	1	4	24
acrylique	3	1	21
temps	1	1	9
profits	24$	60$	

Trouver le nombre d'articles à produire hebdomadairement pour maximiser le profit.

3) Le département sanitaire d'une ville dispose de 180 camions ainsi que d'un groupe de 480 hommes pour faire la cueillette des déchets. Une équipe de 3 hommes assignés à un camion ramasse l'équivalent de 6 tonnes de déchets par jour tandis qu'une équipe de 2 hommes assignés à un camion ramasse l'équivalent de 5 tonnes de déchets par jour. Combien d'équipes de 2 hommes et d'équipes de 3 hommes doit-on former afin de maximiser la quantité de déchets ramassés par jour?

4) Un fabicant de bonbons possède en inventaire 90 livres de chocolat, 80 livres de noix et 50 livres de fruits. Il produit deux sortes de bonbons. La boîte de bonbons de type A est confectionnée à partir de 2 livres de chocolat, 1 livre de noix et 1 livre de fruits et elle se vend 12$. La boîte de bonbons de type B est confectionnée à partir de 1 livre de chocolat, 2 livres de noix et 1 livre de fruits et elle se vend 10$.

a) Combien de boîtes de chaque sorte doit-on fabriquer pour maximiser les profits?
b) Est-ce que toutes les quantités de chocolat, noix et fruits sont utilisées pour cette solution maximale? Sinon quelles sont les quantités non utilisées?

5) On désire extraire trois éléments nutritifs de deux types d'aliments. Une unité de l'aliment A contient 1 g d'aliments nutritifs R, 1 g d'aliments nutritifs S et 2 g d'aliments nutritifs T. Une unité de l'aliment B contient 3 g d'aliments nutritifs R, 1 g d'aliments nutritifs S et 1 g d'aliments nutritifs T. L'aliment A coûte 3$ l'unité et l'aliment B coûte 5$ l'unité. On désire obtenir au moins 9 g d'aliments nutritifs R, au moins 5 g d'aliments nutritifs S et au moins 6 g d'aliments nutritifs T. Combien d'unités d'aliments A et d'unités d'aliments B doit-on utiliser de façon à satisfaire les exigences précédentes à un coût minimum?

6) Une compagnie de location dispose de deux types de camions. Le type supérieur possède 20 mètres cube d'espace réfrigéré et 30 mètres cube d'espace non réfrigéré. Le type standard possède 20 mètres cube d'espace réfrigéré et 10 mètres cube d'espace non réfrigéré. Un client désire louer un certain nombre de camions pour se rendre en un lieu précis. La marchandise qu'il doit transporter nécessite au moins 160 mètres cube d'espace réfrigéré et au moins 120 mètres cube d'espace non réfrigéré. Le coût de location d'un camion de type supérieur est de 300$ tandis que celui d'un camion de type standard est de 200$. Trouver le nombre de camions de chaque sorte pouvant satisfaire le client pour un coût minimum.

7) Une station de radio fait face à un problème que vous pouvez sûrement résoudre. On a remarqué qu'une émission A constituée de 20 minutes de musique et de 1 minute de commerciaux attire 30 000 auditeurs tandis qu'une émission B constituée de 10 minutes de musique et de 1 minute de commerciaux attire 10 000 auditeurs. Les commenditaires insistent pour qu'au moins 6 minutes par semaine soient consacrées aux commerciaux de leurs produits tandis que le patron de la station ne peut se permettre de diffuser plus de 80 minutes de musique par semaine.

a) Dans ces conditions, combien doit-on diffuser d'émissions de chaque catégorie par semaine si on veut satisfaire les exigences des commenditaires et du patron de la station tout en maximisant le nombre d'auditeurs à cette station?
b) Si maintenant l'émission A n'attirait que 20 000 auditeurs tandis que l'émission B en attirait toujours 10 000, que deviendrait la réponse?

8) L'entreprise VIDEO TV fabrique des téléviseurs couleurs. Le programme actuel de fabrication est de 500 unités du modèle "*modular SS900*" et 400 unités du modèle "*modular SS1200*". Les bénéfices de l'entreprise sont de 100$ par unité du modèle "*modular SS900*" et 120$ par unité du modèle "*modular SS1200*". Le vice-président à la fabrication veut déterminer si les bénéfices de l'entreprise peuvent être augmentés en modifiant le programme actuel de la fabrication. Il a l'information suivante concernant le nombre d'heures exigées pour fabriquer chaque modèle ainsi que le temps disponible (en heures) pour les différentes phases de la fabrication:

	modèle SS900	modèle SS1200	disponibilité
assemblage	3	4	4200
menuiserie	1	3	2400
vérification	2	2	2600

a) Déterminer le programme optimal de fabrication.
b) De combien le programme optimal de fabrication augmenterait-il la contribution aux bénéfices de l'entreprise?
c) Est-ce que les différents départements sont utilisés à pleine capacité? (justifier votre réponse)
d) Supposer que les bénéfices du "*modèle SS900*" subissent une réduction de 10$ l'unité; quel serait le programme optimal de fabrication ? Est-ce que le vice-président à la fabrication peut suggérer un programme optimal équivalent, si oui, quel serait ce programme?

9) Un fermier possède 400 hectares de terre sur laquelle il cultive du blé et des pommes de terre. Les règles gouvernementales limitent la culture du blé à au plus 300 hectares et celle des pommes de terre à au plus 200 hectares. Par ailleurs, le fermier doit produire au moins autant d'hectares de blé que d'hectares de pommes de terre. Si le profit retiré des pommes de terre est de 100$ l'hectare et le profit retiré du blé est de 200$ l'hectare, combien d'hectares de blé et d'hectares de pommes de terre, le fermier doit-il cultiver pour maximiser son profit?

10) Un champion cycliste prépare son entraînement en vue d'une importante compétition. Son entraînement doit se composer à chaque semaine d'un certain nombre d'heures de travail en salle et d'un certain nombre d'heures de travail sur route. Au total, il doit s'entraîner au moins 20 heures chaque semaine et son nombre d'heures de travail sur route doit être au moins égal au tiers du nombre d'heures de travail en salle. Pour s'entraîner en salle, il retient les services d'un entraîneur spécialisé qui lui coûte 15$ l'heure; cependant, cet entraîneur sera disponible que s'il est engagé pour au moins 10 heures par semaine. Pour s'entraîner sur route, il retient les services d'un spécialiste qui lui coûte 12$ l'heure; ce spécialiste ne peut pas être disponible pour plus de 15 heures par semaine. Comment notre homme doit-il planifier son entraînement hebdomadaire pour que cela lui coûte le moins cher possible?

11) M Lepingre a un maximum de 12 000$ à investir dans des obligations. Les obligations A rapportent 10% d'intérêts tandis que les obligations B (plus risquées) rapportent 12%. Etant donné que les obligations B sont plus risquées, M Lepingre insiste pour que son investissement dans ces obligations n'excède pas la moitié de son investissement dans les obligations A. De plus, il désire investir au moins 5000$ dans les obligations A et au moins 2000$ dans les obligations B. Quelle somme doit-il investir dans chaque type d'obligation pour maximiser l'intérêt de son placement?

12) La compagnie Ragal manufacture deux modèles d'appareils électroniques: le modèle AX500 et le modèle AX100. Un contrat requiert à chaque mois, au moins 100 appareils AX500 et au moins 300 appareils AX100. La politique de la manufacture est de produire au moins deux appareils AX100 pour un appareil AX500. 100 heures-homme sont nécessaires à la fabrication d'un appareil AX500 tandis que 200 heures-homme sont nécessaires pour fabriquer l'appareil AX100. La compagnie peut compter sur une main-d'oeuvre d'au moins 600 hommes et d'au plus 1000 hommes. Un homme travaille 150 heures par mois. Les profits sur un appareil AX500 sont de 1000$ tandis que les profits sur un appareil AX100 sont de 2000$. La compagnie Ragal doit produire mensuellement combien d'appareils de chaque modèle pour maximiser ses profits?

Réponses

1) 12 robes et 6 blouses pour un profit de 132$

2) 4 tables de nuit et 5 bibliothèques pour un profit de 396$

3) 120 équipes de trois hommes et 60 équipes de deux hommes pour une quantité de déchets ramassés de 1020 tonnes

4)
a) 40 boîtes de type A et 10 boîtes de type B pour un profit de 580$
b) il restera 20 livres de noix

5) 3 éléments de type A et 2 éléments de type B pour un coût de 19$

6) 6 camions standards et 2 camions supérieurs pour un coût de 1800$

7)
a) 2 émissions A et 4 émissions B pour 100 000 auditeurs
b) 0 émission A et 8 émissions B ou 2 émissions A et 4 émissions B ou toute valeur de l'ensemble des solutions réalisables respectant l'équation $80\,000 = 20\,000x + 10\,000y$ pour 80 000 auditeurs

8)
a) 1000 appareils SS900 et 300 appareils SS1200
b) 38 000$
c) Les départements d'assemblage et de vérification sont utilisés à pleine capacité mais il y a 500 heures encore disponibles dans le département de menuiserie.

9) 300 hectares de blé et 100 hectares de pommes de terre pour un profit de 70 000$

10) 10 heures en salle et 10 heures sur route pour un coût de 270$

11) 8000$ dans les obligations A et 4000$ dans les obligations B pour un intérêt de 1280$

12) 100 appareils AX500 et 700 appareils AX1000 ou 300 appareils AX500 et 600 appareils AX1000 ou toute valeur de l'ensemble des solutions réalisables respectant l'équation $150\,000 = 100x + 200y$ pour un profit de 1 500 000$

5. La méthode du simplexe

a) Approche algébrique à la méthode du simplexe

La méthode de résolution d'un programme linéaire est très simple d'un point de vue intuitif cependant, cette méthode devient pratiquement inapplicable lorsque le nombre de variables du problème dépasse deux. Nous allons développer dans cette section une méthode permettant d'obtenir algébriquement la solution d'un programme linéaire sans d'abord avoir à trouver les sommets de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème.

Exemple 5.1

Une compagnie fabrique des laveuses et des sécheuses automatiques. Elle utilise 3 heures-homme à la fabrication des morceaux d'une laveuse automatique et 2 heures-homme à l'assemblage de ces morceaux. Les morceaux d'une sécheuse prennent 2 heures-homme à fabriquer et 1 heure-homme à assembler. Certaines contraintes font que la production quotidienne des sécheuses ne doit jamais excéder celle des laveuses par plus de 30 unités. La compagnie dispose à chaque jour de 120 heures-homme pour la fabrication des morceaux et de 72 heures-homme pour l'assemblage. Une laveuse rapporte un profit de 50$ et une sécheuse un profit de 60$. Combien de laveuses et de sécheuses devraient être fabriquées chaque jour par la compagnie pour que celle-ci retire un profit maximal?

---

solution

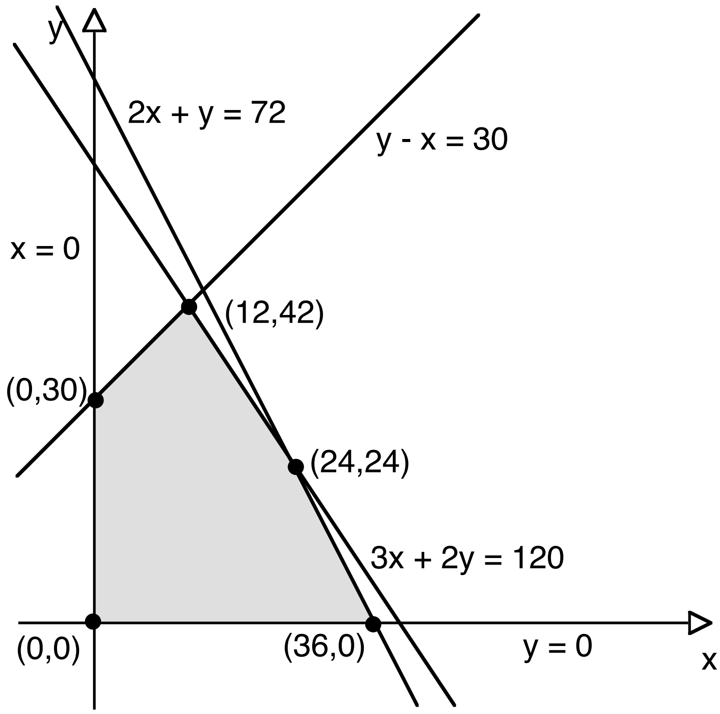
profit		morceaux (heures-homme)	assemblage (heures-homme)	
50$	laveuses	3	2	x: # de laveuses fabriquées
60$	sécheuses	2	1	y: # de sécheuses fabriquées
	ressources	120	72	

On obtient le programme linéaire suivant.

maximiser le profit $P = 50x + 60y$

$$\text{si} \quad \begin{cases} 3x + 2y \leq 120 & \text{(contrainte de fabrication)} \\ 2x + y \leq 72 & \text{(contrainte d'assemblage)} \\ y - x \leq 30 & \text{(contrainte de surplus permis)} \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & \text{(contraintes de non négativité)} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions réalisables du problème est représenté par la zone grise sur le graphique ci-dessous.



Pour obtenir algébriquement la solution optimale du programme linéaire on transforme d'abord les inéquations (sauf les contraintes de non-négativité) en équations. Pour cela, on ajoute une *variable d'écart* non négative à la partie la plus petite de chacun des membres des inéquations. Le problème devient

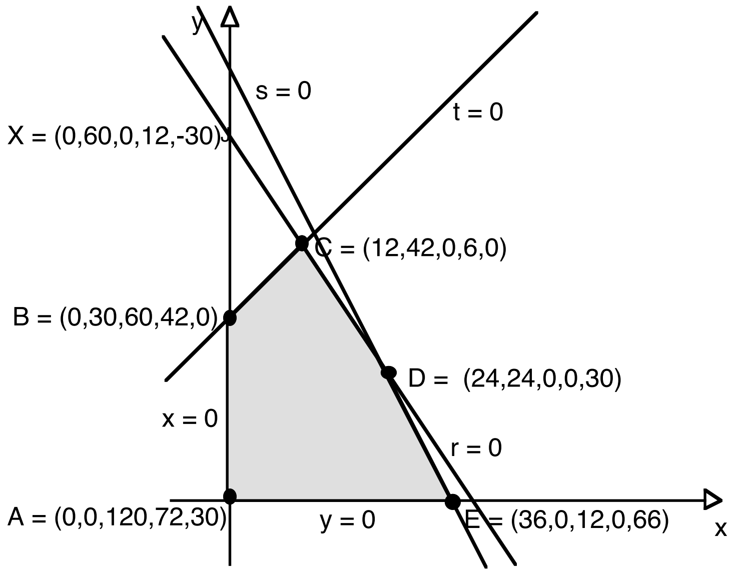
maximiser le profit $P = 50x + 60y$

$$\text{si} \quad \begin{cases} 3x + 2y + r = 120 \\ 2x + y + s = 72 \\ y - x + t = 30 \\ x \geq 0 \;, y \geq 0 \;, r \geq 0 \;, s \geq 0 \;, t \geq 0 \end{cases}$$

où r: représente la main-d'oeuvre non utilisée à la fabrication,
s: représente la main-d'oeuvre non utilisée à l'assemblage,
t: représente le surplus permis non utilisé des sécheuses sur les laveuses.

Les nouvelles variables d'écart r, s et t ne peuvent prendre des valeurs négatives (une quantité non utilisée ne peut pas être négative).

Un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du programme linéaire est un point pour lequel *deux variables sont nulles et les autres sont non négatives*.



La valeur limite d'une contrainte est atteinte lorsque la variable d'écart qu'elle contient est nulle.

Considérons les trois équations contenant les variables d'écart.

$$3x + 2y + r = 120$$
$$2x + y + s = 72$$
$$y - x + t = 30$$

si	$x = 0$	et	$y = 0$	$\Rightarrow$	$r = 120$	$s = 72$	$t = 30$	(A)
	$x = 0$	et	$t = 0$	$\Rightarrow$	$y = 30$	$r = 60$	$s = 42$	(B)
	$r = 0$	et	$t = 0$	$\Rightarrow$	$x = 12$	$y = 42$	$s = 6$	(C)
	$r = 0$	et	$s = 0$	$\Rightarrow$	$x = 24$	$y = 24$	$t = 30$	(D)
	$y = 0$	et	$s = 0$	$\Rightarrow$	$x = 36$	$r = 12$	$t = 66$	(E)

On remarque que chaque point est un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables et dans tous les cas deux variables sont nulles et les autres non négatives.

si $x = 0$ et $r = 0$ $\Rightarrow$ $y = 60$ $s = 12$ $t = -30$ (X)

On remarque maintenant que ce point n'est pas un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables et dans ce cas deux variables sont nulles mais les autres ne sont pas toutes non négatives.

Ce principe peut être généralisé à plusieurs variables.

La méthode du simplexe est un procédé itératif permettant d'atteindre progressivement sans l'aide d'un graphique la solution optimale d'un programme linéaire. Par cette méthode, on choisit un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème en annulant deux variables, les autres variables étant non négatives. On vérifie ensuite si ce sommet maximise la fonction objectif. Lorsque la fonction objectif n'est pas optimale, on se déplace vers un sommet adjacent au premier de façon à augmenter le plus possible la valeur de la fonction objectif. Si aucun sommet adjacent n'augmente la valeur de la fonction objectif, la solution optimale du problème est atteinte.

En général, on commence la recherche à l'origine en posant $x = 0$ et $y = 0$ à la condition bien entendu que l'origine soit un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème.

D'abord il faut écrire la fonction objectif ainsi que les contraintes du problème en fonction des deux variables que l'on désire rendre nulles. Les trois autres variables sont appelées les *variables de base*. Lorsque l'origine est un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables, les variables de base sont les variables d'écart.

$$P = 50x + 60y$$

$$\begin{aligned} r &= 120 - 3x - 2y \\ s &= 72 - 2x - y \\ t &= 30 + x - y \end{aligned}$$

Après avoir isolé les variables d'écart, on note que l'origine est un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème car en annulant les variables x et y, les trois autres variables prennent des valeurs non négatives

$$x = 0,\ y = 0,\ r = 120,\ s = 72,\ t = 30$$

A l'origine la fonction objectif $P = 50x + 60y$ a une valeur de 0. La solution n'est sûrement pas maximale. Il faut choisir un autre sommet. Nous choisirons un sommet adjacent à l'origine susceptible d'augmenter le plus possible la fonction objectif $P = 50x + 60y$.

Une augmentation de 1 unité de la variable x engendre une augmentation de 50 unités de la fonction objectif et une augmentation de 1 unité de la variable y a pour effet d'augmenter la fonction objectif de 60 unités. La méthode du simplexe ne permet pas d'augmenter en même temps les deux variables. On doit choisir entre augmenter la variable x ou augmenter la variable y. Evidemment on choisira celle qui augmente le plus rapidement la fonction objectif, soit la variable y.

On a avantage à augmenter le plus possible la valeur de y. Le plus possible signifie jusqu'à ce qu'une variable de base devienne nulle, sans qu'aucune autre ne devienne négative.

La variable x demeurant nulle, on peut augmenter la valeur de y

	jusqu'à
$r = 120 - 3x - 2y$	60
$s = 72 - 2x - y$	72
$t = 30 + x - y$	**30**

On choisit la plus petite augmentation permise de la variable y de façon à ce qu'aucune autre variable ne devienne négative. On augmente y de 0 jusqu'à 30. La variable t devient nulle.

Les nouvelles variables de base sont maintenant r, s et y. Afin d'être en mesure d'interpréter les résultats, écrivons à nouveau la fonction objectif ainsi que les contraintes du problème en fonction des deux variables nulles x et t. A partir de la troisième équations, on a

$$\begin{aligned} & t = 30 + x - y \\ \Rightarrow \quad & y = 30 + x - t \end{aligned}$$

Puis, en remplaçant y par $30 + x - t$ dans la fonction objectif et dans les autres équations, on obtient:

$$P = 50x + 60(30 + x - t)$$

$$\begin{aligned} r &= 120 - 3x - 2(30 + x - t) \\ s &= 72 - 2x - (30 + x - t) \\ y &= 30 + x - t \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient finalement

$$P = 1800 + 110x - 60t$$

$$\begin{aligned} r &= 60 - 5x + 2t \\ s &= 42 - 3x + t \\ y &= 30 + x - t \end{aligned}$$

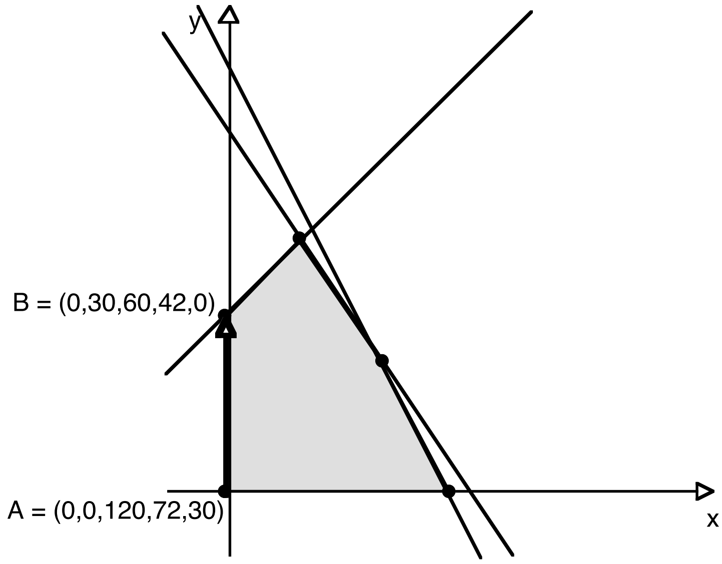
Etant donné que les variables x et t sont nulles, on conclut en examinant le système d'équations que les autres variables auront pour valeurs:

$$r = 60, s = 42 \text{ et } y = 30$$

1. Nous sommes sur un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème puisque deux variables sont nulles $x = 0$ et $t = 0$ et les autres sont non négatives $r = 60$, $s = 42$ et $y = 30$. On est au point (0,30,60,42,0).

2. A ce sommet, la valeur de la fonction objectif est $P = 1800$.

3. Ce n'est pas la solution maximale puisque la fonction objectif P = 1800 + 110x - 60t peut encore être augmentée. Chaque augmentation de 1 unité de la valeur de x aura pour effet d'augmenter la valeur de P de 110 unités. Par contre, à cause du coefficient négatif de la variable t, toute augmentation de cette variable a pour effet de diminuer la valeur de la fonction objectif.



Nous étions initialement à l'origine soit au point A, nous passons maintenant au point B.

Il faut donc choisir un autre sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème. Pour faire ce choix, on reprend la technique du début. On cherche maintenant à augmenter la valeur de la variable x. La variable t demeure nulle. On peut augmenter la valeur de x

	jusqu'à
r = 60 - 5x + 2t	**12**
s = 42 - 3x + t	14
y = 30 + x - t	∞

On choisit la plus petite augmentation permise de la variable x de façon qu'aucune autre variable ne devienne négative. On augmente x de 0 jusqu'à 12. La variable r devient nulle.

Les nouvelles variables de base sont maintenant x, s et y. Afin d'être en mesure d'interpréter les résultats, écrivons la fonction objectif ainsi que les contraintes du problème en fonction des deux variables nulles r et t.

A partir de la première équation, on a

$$r = 60 - 5x + 2t$$
$$\Rightarrow \quad x = 12 - \frac{1}{5}r + \frac{2}{5}t$$

En remplaçant x par $12 - \frac{1}{5}r + \frac{2}{5}t$ dans la fonction objectif, on obtient

$$P = 1800 + 110(12 - \frac{1}{5}r + \frac{2}{5}t) - 60t$$

$$x = 12 - \frac{1}{5}r + \frac{2}{5}t$$
$$s = 42 - 3(12 - \frac{1}{5}r + \frac{2}{5}t) + t$$
$$y = 30 + (12 - \frac{1}{5}r + \frac{2}{5}t) - t$$

En simplifiant, on a

$$P = 3120 - 22r - 16t$$

$$x = 12 - \frac{1}{5}r + \frac{2}{5}t$$
$$s = 6 + \frac{3}{5}r - \frac{1}{5}t$$
$$y = 42 - \frac{1}{5}r - \frac{3}{5}t$$

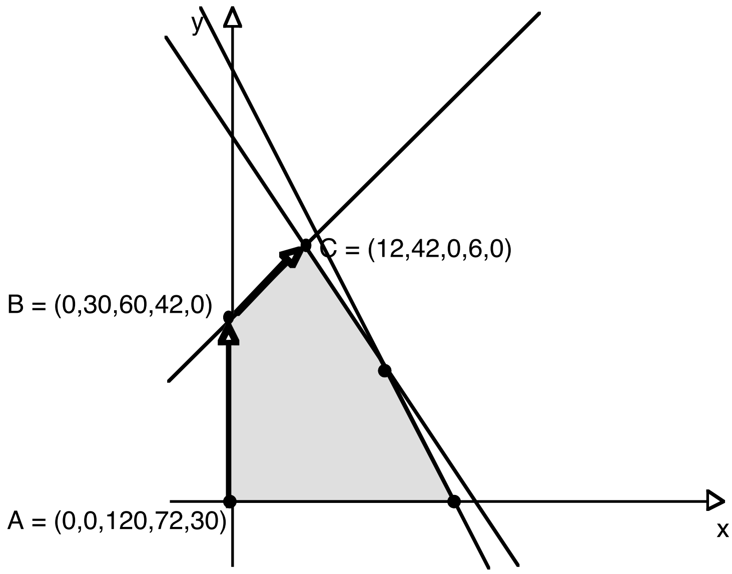
Etant donné que les variables t et r sont nulles, on conclut en examinant le système d'équations que les autres variables auront pour valeurs:

$$x = 12,\ s = 6 \text{ et } y = 42$$

1. Nous sommes sur un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème puisque deux variables sont nulles r = 0 et t = 0 et les autres sont non négatives x = 12, s = 6 et y = 42. On est au point (12, 42, 0, 6, 0).

2. A ce sommet, la valeur de la fonction objectif est P = 3120.

3. La fonction objectif P = 3120 - 16t - 22r *est maximale* puisque les coefficients des variables t et r sont négatifs. Toute augmentation des valeurs de ces variables entraine une diminution de la valeur de P.



On est passé du sommet B au sommet C.

Le profit maximal de la compagnie est de 3120$ pour une production de 12 laveuses (x = 12) et de 42 sécheuses (y = 42).

Exemple 5.2

Résoudre le programme linéaire suivant

Maximiser $\omega = x + 2y$

$$\text{si} \begin{cases} x + y \leq 3 \\ x - y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) par la méthode du simplexe en utilisant l'approche algébrique de l'exemple précédent,
b) graphiquement en utilisant la méthode utilisée à la section précédente.

---

solution

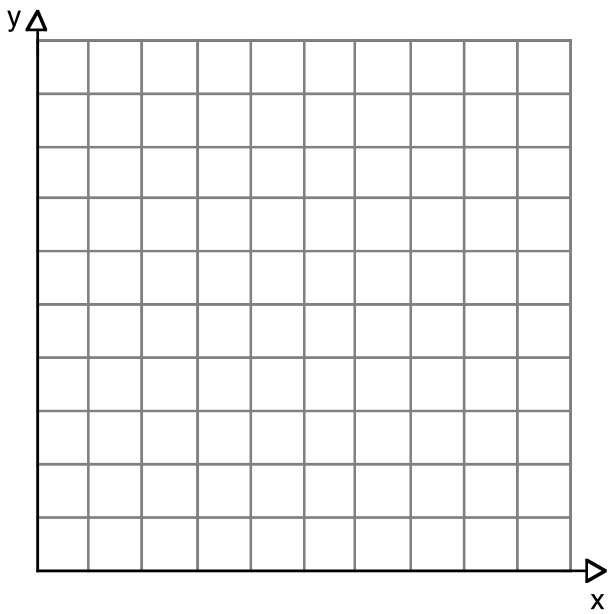
a) solution algébrique (méthode du simplexe)

1. On transforme les inéquations sauf les contraintes de non négativité en équations.

2. On isole les variables d'écart.

3. On applique la méthode du simplexe

b) solution graphique



sommets de l'ensemble convexe	valeurs de la fonction objectif

b) Méthode du pivot

Les transformations algébriques que l'on doit effectuer après chacune des itérations de la méthode précédente sont de nature à effrayer. Heureusement, il est possible d'éviter ces longs calculs en utilisant des règles très simples.

Considérer le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} r = a + bx \\ s = c + dx \end{cases} \quad \text{où } a, b, c \text{ et } d \text{ sont des constantes}$$

Dans ce système, les variables r et s sont définies en fonction de la variable x. Supposons que l'on veuille réécrire ces équations de façon à avoir les variables s et x définies en fonction de la variable r.

Algébriquement, il suffit de considérer la première équation et d'isoler la variable x de cette équation.

$$\begin{aligned} & r = a + bx \\ \Rightarrow \quad & x = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b} r \end{aligned}$$

Ensuite, on remplace x par $-\frac{a}{b} + \frac{1}{b} r$ dans la seconde équation.

$$\begin{aligned} & s = c + d\left(-\frac{a}{b} + \frac{1}{b} r\right) \\ \Rightarrow \quad & s = c - \frac{ad}{b} + \frac{d}{b} r \end{aligned}$$

On obtient finalement le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{b} + \frac{1}{b} r \\ s = c - \frac{ad}{b} + \frac{d}{b} r \end{cases}$$

Il est à noter que les positions des variables x et r ont été interchangées par rapport au système initial.

Afin de mieux saisir les relations qui existent entre les deux systèmes, considérons uniquement les constantes ainsi que les coefficients de chacun des systèmes d'équations à l'intérieur de deux tableaux.

Le premier système $\begin{cases} r = a + bx \\ s = c + dx \end{cases}$ est associé au tableau suivant.

$$\begin{array}{c|cc|} & & x \\ \hline r & a & \boxed{b} \\ s & c & d \\ \hline \end{array}$$

TABLEAU 1

Le second système $\begin{cases} x = -\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{b}r \\ s = c - \dfrac{ad}{b} + \dfrac{d}{b}r \end{cases}$ est associé au tableau suivant.

$$\begin{array}{c|cc|} & & r \\ \hline x & -\dfrac{a}{b} & \dfrac{1}{b} \\ s & c - \dfrac{ad}{b} & \dfrac{d}{b} \\ \hline \end{array}$$

TABLEAU 2

Il existe une relation entre les deux tableaux que l'on peut résumer à l'aide de 4 règles. Ces règles utilisent un élément important du TABLEAU 1 que l'on appelle l'*élément pivot.* L'élément pivot correspond à l'élément du premier tableau à l'intersection de la ligne et de la colonne contenant les variables à interchanger. L'élément pivot est l'élément b du premier tableau.

Pour passer du TABLEAU 1 au TABLEAU 2, on doit remplacer

1) l'élément pivot par $\dfrac{1}{\text{pivot}}$

2) les éléments de la ligne contenant le pivot par $-\dfrac{\text{élément}}{\text{pivot}}$

3) les éléments de la colonne contenant le pivot par $\dfrac{\text{élément}}{\text{pivot}}$

4) les éléments qui sont hors de la ligne et de la colonne contenant le pivot par

$$\text{élément} - \frac{\text{produit des éléments diagonalement opposés à l'élément et au pivot}}{\text{pivot}}$$

Exemple 5.3

En utilisant la méthode du pivot, transformer le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} r = 1 - 3x \\ s = 5 + 2x \end{cases}$$

de façon à exprimer les variables r et x en fonction de la variable s.

---

solution

On construit d'abord le tableau associé au système d'équations.

$$\begin{array}{c|cc|} & & x \\ \hline r & 1 & -3 \\ s & 5 & \boxed{2} \\ \hline \end{array}$$

Pour résoudre ce problème, on doit transformer le tableau de façon à interchanger la position des variables x et s. L'élément pivot de la transformation est l'élément 2.

D'abord, on interchange la position des variables x et s dans le tableau qui sera associé à la réponse du problème.

$$\begin{array}{c|cc|} & & \mathbf{s} \\ \hline r & & \\ \mathbf{x} & & \\ \hline \end{array}$$

Ensuite on remplace,

a) l'élément pivot par $\dfrac{1}{\text{pivot}} = \dfrac{1}{2}$,

$$\begin{array}{c|cc|} & & s \\ \hline r & & \\ x & & \mathbf{\dfrac{1}{2}} \\ \hline \end{array}$$

b) les éléments de la ligne contenant le pivot par $-\dfrac{\text{élément}}{\text{pivot}} = -\dfrac{5}{2}$,

$$\begin{array}{c|cc|}
 & & s \\
\hline
r & & \\
x & \mathbf{-\frac{5}{2}} & \frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}$$

c) les éléments de la colonne contenant le pivot par $\dfrac{\text{élément}}{\text{pivot}} = \dfrac{-3}{2}$

$$\begin{array}{c|cc|}
 & & s \\
\hline
r & & \mathbf{-\frac{3}{2}} \\
x & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}$$

d) les autres éléments par

$$\text{élément} - \frac{\text{produit des éléments diagonalement opposés à l'élément et au pivot}}{\text{pivot}} = 1 - \frac{(-3)(5)}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\begin{array}{c|cc|}
 & & s \\
\hline
r & \mathbf{\frac{17}{2}} & -\frac{3}{2} \\
x & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}$$

Le système d'équations cherché est $\begin{cases} r = \dfrac{17}{2} - \dfrac{3}{2}\,s \\ x = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}\,s \end{cases}$

La méthode du pivot pourra être utilisée quel que soit le nombre d'équations et de variables du système pourvu que chaque équation soit linéaire.

Exemple 5.4

L'élément encadré dans le tableau ci-dessous correspond à l'élément pivot de la transformation d'un système.

$$\begin{array}{c|ccc|} & & x & y \\ \hline \omega & 0 & 4 & -2 \\ r & 3 & -1 & 2 \\ s & 5 & \boxed{1} & -3 \\ \hline \end{array}$$

a) Quel est le système d'équations initial?
b) Quel est le système d'équations transformé?

---

solution

c) L'algorithme du simplexe

La méthode du simplexe est un algorithme qui utilise conjointement l'approche algébrique de la section a) et la méthode du pivot de la section b). Afin de simplifier les manipulations algébriques, toutes les données seront tabulées. Pour illustrer l'algorithme du simplexe, reprenons le programme linéaire de l'exemple 5.1.

$$\text{Maximiser } P = 50x + 60y$$

$$\text{si } \begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ 2x + y \leq 72 \\ y - x \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

1) On transforme les contraintes du problème (sauf celles de non-négativité) en équations. Pour cela, on introduit des variables d'écart.

$$\text{Maximiser } P = 50x + 60y$$

$$\text{si } \begin{cases} 3x + 2y + r = 120 \\ 2x + y + s = 72 \\ y - x + t = 30 \\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ r \geq 0\ ,\ s \geq 0\ ,\ t \geq 0 \end{cases}$$

2) On isole les variables d'écart en alignant les constantes ainsi que les variables du problème (on considère seulement la fonction objectif et les contraintes du problème).

$$\begin{array}{rcrcrcr} P & = & & & 50x & + & 60y \\ \\ r & = & 120 & - & 3x & - & 2y \\ s & = & 72 & - & 2x & - & y \\ t & = & 30 & + & x & - & y \end{array}$$

3) On place les données dans un tableau.

		x	y
P	0	50	60
r	120	-3	-2
s	72	-2	-1
t	30	1	-1

TABLEAU 1

On commence notre recherche en en annulant deux variables de façon à ce que les trois autres prennent des valeurs non négatives. L'origine est le premier point qui sera sondé.

a) Lorsque $x = 0, y = 0$ on a $r = 120, s = 72$ et $t = 30$. L'origine est donc un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème puisque deux variables sont nulles et les autres prennent des valeurs non négatives.
b) A l'origine $P = 0$.
c) Ce n'est pas la solution maximale car en augmentant la valeur de x ou la valeur de y, le profit augmentera (les coefficients de ces variables sont tous les deux positifs).

On se déplace vers un sommet adjacent à l'origine de façon à augmenter le plus possible la fonction objectif.

		x	y	
P	0	50	60	
r	120	-3	-2	$\left\lvert\frac{120}{-2}\right\rvert = 60$
s	72	-2	-1	$\left\lvert\frac{72}{-1}\right\rvert = 72$
t	30	1	$\boxed{-1}$	$\left\lvert\frac{30}{-1}\right\rvert = 30$

On choisit d'augmenter la variable y puisque c'est la variable qui augmente le plus rapidement la valeur de P.

On augmente la variable y jusqu'à 30. La variable t devient nulle.

On transforme le tableau en utilisant la méthode du pivot de façon à interchanger la position des variables y et t. L'élément à l'intersection des variables à interchanger est l'élément pivot de la transformation (l'élément encadré). Après transformation on obtient le tableau suivant.

		x	**t**
P	1800	110	-60
r	60	-5	2
s	42	-3	1
y	30	1	-1

TABLEAU 2

On poursuit notre recherche en en annulant la variable t (la variable x demeure égale à 0).

a) Lorsque x = 0, t = 0 on a r = 60, s = 42 et y = 30. C'est un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème puisque deux variables sont nulles et les autres prennent des valeurs non négatives.
b) A ce sommet, P = 1800.
c) Ce n'est pas la solution maximale car en augmentant la valeur de x, le profit augmentera (le coefficient de la variable est positif).

On se déplace vers un sommet adjacent au précédent, de façon à augmenter le plus possible la fonction objectif.

		x	t	
P	1800	110	-60	
r	60	$\boxed{-5}$	2	$\left\lvert\frac{60}{-5}\right\rvert = 12$
s	42	-3	1	$\left\lvert\frac{42}{-3}\right\rvert = 14$
y	30	1	-1	∞

On choisit d'augmenter la variable x puisque c'est la seule variable avec un coefficient positif .

On augmente la variable x jusqu'à 12. La variable r devient nulle.

On transforme le tableau en utilisant la méthode du pivot de façon à interchanger la position des variables x et r. L'élément à l'intersection des variables à interchanger est l'élément pivot de la transformation (l'élément encadré). Après transformation on obtient le tableau suivant.

		r	t
P	3120	-22	-16
x	12	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
s	6	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$
y	42	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$

TABLEAU 3

On poursuit notre recherche en en annulant la variable r (la variable t demeure égale à 0).

a) Lorsque $r = 0, t = 0$ on a $x = 12, s = 6$ et $y = 42$. C'est un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème puisque deux variables sont nulles et les autres prennent des valeurs non négatives.
b) A ce sommet, $P = 3120$.
c) C'est la solution maximale car en augmentant la valeur de r ou de t le profit diminuera (les coefficients de ces variables sont tous les deux négatifs).

On a atteint la solution maximale du problème

$$P = 3120 \text{ si } x = 12 \text{ et } y = 42.$$

La méthode du simplexe peut être utilisée quel que soit le nombre de variables ou d'inéquations au problème. Evidemment plus le problème sera complexe, plus la méthode sera longue à utiliser. L'ordinateur est un outil essentiel à l'utilisation de cette méthode. L'algorithme du simplexe est facilement programmable et en une fraction de seconde l'ordinateur solutionne ces problèmes.

Notons qu'à trois dimensions un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables d'un programme linéaire c'est un point pour lequel, trois variables sont nulles et les autres variables prennent des valeurs non négatives.

Exemple 5.5

$$\text{Maximiser } \omega = x + 2y + 3z$$

$$\text{si} \quad \begin{cases} x + 2y - z \leq 400 \\ 2x - y + z \leq 600 \\ x \geq 0 \text{ , } y \geq 0 \text{ , } z \geq 0 \end{cases}$$

---

solution

1) On transforme les contraintes du problème en équations en introduisant des variables d'écart.

2) On isole les variables d'écart, puis on tabule les données pour obtenir le TABLEAU 1.

3) On commence notre recherche pour obtenir la solution maximale.

Exercices

1) L'élément encadré dans les tableaux ci-dessous correspond à l'élément pivot de la transformation d'un système d'équations. On demande d'écrire le système d'équations initial ainsi que le système d'équations transformé.

a)

$$\begin{array}{c|cc|} & & z \\ \hline x & 5 & \boxed{-1} \\ y & -3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c|cc|} & & t \\ \hline r & 2 & 1 \\ s & 6 & \boxed{4} \\ \hline \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{c|cc|} & & s \\ \hline z & \frac{1}{4} & \boxed{-\frac{1}{3}} \\ y & -2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{c|ccc|} & & s & t \\ \hline y & 1 & 2 & -3 \\ x & 4 & 5 & \boxed{6} \\ \hline \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{c|ccc|} & & r & s \\ \hline x & 1 & -1 & 2 \\ y & 2 & -2 & \boxed{3} \\ z & 3 & -3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{c|ccc|} & & r & s \\ \hline \omega & 1 & -1 & 2 \\ x & 2 & -2 & 3 \\ y & 3 & \boxed{-3} & 4 \\ \hline \end{array}$$

2) Résoudre à l'aide de la méthode du simplexe.

a) Maximiser $\omega = x + 2y$

$$\text{si} \quad \begin{cases} x + y \le 3 \\ x - y \le 1 \\ y \le 2 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$$

b) Maximiser $\omega = 40x + 60y$

$$\text{si} \quad \begin{cases} y - x \le 20 \\ x - y \le 40 \\ x + y \le 80 \\ x \ge 0 \ , \ y \ge 0 \end{cases}$$

c) Maximiser $\omega = 5x + 3y + 2z$

si $\begin{cases} x - y + z \le 8 \\ -x + y - z \le 1 \\ x + y + z \le 20 \\ x \ge 0 \ , y \ge 0 \ , z \ge 0 \end{cases}$

d) Maximiser $\omega = 2x + 6y$

si $\begin{cases} x + y \le 80 \\ x - y \le 30 \\ 4y - x \le 160 \\ x \ge 0 \ , y \ge 0 \end{cases}$

e) Maximiser $\omega = 2x + y$

si $\begin{cases} x + 2y \le 10 \\ x + y \le 6 \\ x - y \le 2 \\ x - 2y \le 1 \\ x \ge 0 \ , y \ge 0 \end{cases}$

3) Un fermier décide de se lancer dans l'élevage des boeufs, des vaches et des chevaux. Il dispose de 5800 hectares de pâturage. Par expérience, le fermier sait que pour bien se développer, un boeuf requiert 1 hectare de pâturage, une vache laitière 1 hectare et un cheval 1/2 hectare. Durant l'hiver, un boeuf se nourrit de 1 balle de foin, une vache laitière de 4 balles de foin et un cheval de 1 balle de foin. A cause des besoins limités du marché, le fermier ne désire pas plus de 1000 vaches laitières. S'il dispose à l'automne de 9000 balles de foin et que son profit net sur chaque boeuf, vache laitière et cheval est respectivement de 18\$, 28\$ et 10\$ alors combien de bêtes de chaque espèce doit-il élever afin de maximiser son profit?

4) Un poste de télévision est à planifier sa prochaine émission d'affaires publiques. On dispose pour cette émission d'un temps d'antenne maximum pour les entrevues de 48 minutes. Les invités pour cette émission sont: M. Cantin, M. Morin et M. Babin. M. Cantin insiste pour que son temps d'antenne soit au moins le double de celui de M. Babin. Par ailleurs, le réalisateur désire que le temps d'antenne combiné de M. Cantin et de M. Morin soit d'au plus 38 minutes. Par expérience, on sait que M. Cantin attirera 20 000 téléspectateurs par minute d'ap-parition sur le petit écran, M. Morin attirera pour sa part, 30 000 téléspectateurs par minute et M. Babin en attirera 28 000 par minute. Quel sera le temps d'antenne de chaque invité qui maximisera le nombre de téléspectateurs tout en respectant les contraintes précédentes?

5) Un architecte doit soumettre un plan pour un édifice à appartements. Trois types d'appartements sont retenus:

nombre de chambres	loyer mensuel par appartement
1	200\$
2	250\$
3	300\$

La superficie permet de construire un maximum de 600 appartements. A cause de la demande, le nombre d'appartements de 3 chambres ne doit pas excéder la somme des deux autres par plus de 20 unités et le double du nombre d'appartements de 1 chambre ne doit pas excéder la somme des deux autres par plus de 100 unités. Quelle répartition des appartements fournira au propriétaire un profit maximal tout en respectant chacune des contraintes du problème?

Réponses

1) a) $\begin{cases} x = 5 - z \\ y = -3 + 2z \end{cases}$ $\begin{cases} z = 5 - x \\ y = 7 - 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} r = 2 + t \\ s = 6 + 4t \end{cases}$ $\begin{cases} r = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}s \\ t = -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}s \end{cases}$

c) $\begin{cases} z = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}s \\ y = -2 + s \end{cases}$ $\begin{cases} s = \frac{3}{4} - 3z \\ y = -\frac{5}{4} - 3z \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 1 + 2s - 3t \\ x = 4 + 5s + 6t \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 + \frac{9}{2}s - \frac{1}{2}x \\ t = -\frac{2}{3} - \frac{5}{6}s + \frac{1}{6}x \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 1 - r + 2s \\ y = 2 - 2r + 3s \\ z = 3 - 3r + 4s \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}r + \frac{2}{3}y \\ s = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}y \\ z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}r + \frac{4}{3}y \end{cases}$

f) $\begin{cases} \omega = 1 - r + 2s \\ x = 2 - 2r + 3s \\ y = 3 - 3r + 4s \end{cases}$ $\begin{cases} \omega = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}s \\ x = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}s \\ r = 1 - \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}s \end{cases}$

2)

a)	$\omega = 5$	si	$x = 1$,	$y = 2$	
b)	$\omega = 4200$	si	$x = 30$,	$y = 50$	
c)	$\omega = 88$	si	$x = 14$,	$y = 6$	$z = 0$
d)	$\omega = 352$	si	$x = 32$,	$y = 48$,	
e)	$\omega = 10$	si	$x = 4$,	$y = 2$	

3) 114 800$ pour 4600 boeufs, 1000 vaches et 400 chevaux

4) 1 220 000 téléspectateurs pour 20 minutes à M. Cantin, 18 minutes à M. Morin et 10 minutes à M. Babin

5) 165 500$ de profit pour 0 appartement de 1 chambre, 290 appartements de 2 chambres et 310 appartements de 3 chambres

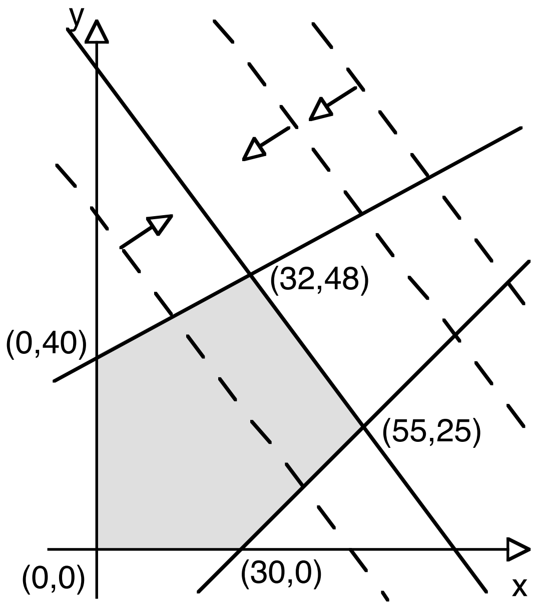
6. Etude de quatre cas particuliers en relation avec la méthode du simplexe

a) Que se passe-t-il lorsqu'on utilise la méthode du simplexe et que la solution optimale n'est pas unique?

Maximiser $\omega = x + y$

$$\text{si} \quad \begin{cases} x + y \leq 80 \\ x - y \leq 30 \\ 4y - x \leq 160 \\ x \geq 0 \text{ , } y \geq 0 \end{cases}$$

Graphiquement on obtient,



sommets	$\omega = x + y$
(0,0)	0
(0,40)	40
(32,48)	80 ⇐
(55,25)	80 ⇐
(30,0)	30

solutions multiples

Voyons maintenant ce qui se passe lorsqu'on utilise la méthode du simplexe.

		x	y	
ω	0	1	1	
r	80	-1	-1	80
s	30	$\boxed{-1}$	1	30
t	160	1	-4	∞

TABLEAU 1

		s	y	
ω	30	-1	2	
r	50	1	$\boxed{-2}$	25
x	30	-1	1	∞
t	190	-1	-3	63,3

TABLEAU 2

		s	r	
ω	80	0	-1	
y	25	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	∞
x	55	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	110
t	115	$\boxed{-\frac{5}{2}}$	$\frac{3}{2}$	46

TABLEAU 3

		t	r	
ω	80	0	-1	
y	48	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	240
x	32	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	∞
s	46	$\boxed{-\frac{2}{5}}$	$\frac{3}{5}$	115

TABLEAU 4

Il est inutile de continuer car l'élément pivot est au même endroit dans les deux derniers tableaux; les variables t et s se remplacent constamment et ω ne change pas. Si on poursuivait, le tableau 5 serait identique au tableau 3. *On obtient des solutions multiples lorsque la première ligne d'un tableau contient au moins un coefficient égal à zéro tandis que les autres coefficients sont tous négatifs*.

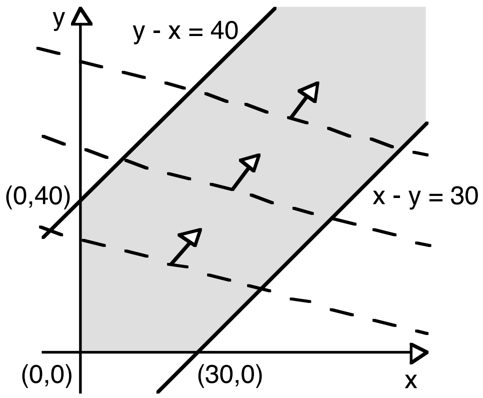
La solution maximale est $\omega = 80$ mais elle sera obtenue de plus d'une façon. Deux sommets adjacents de l'ensemble convexe des solutions réalisables du problème: $x = 55$, $y = 25$ et $x = 32$, $y = 48$ sont des solutions et tous les points sur le segment de droite qui relie les deux sommets sont aussi des solutions.

b) Que se passe-t-il lorsqu'on utiise la méthode du simplexe et que la solution optimale n'existe pas?

$$\text{Maximiser } \omega = 2x + 6y$$

$$\text{si } \begin{cases} x - y \leq 30 \\ y - x \leq 40 \\ x \geq 0 \text{ , } y \geq 0 \end{cases}$$

Graphiquement on obtient,



La solution maximale n'existe pas puisque l'ensemble convexe des solutions réalisables n'est pas borné. La fonction objectif peut dans ce cas augmenter sans limite.

Que se passe-t-il lorsqu'on utilise la méthode du simplexe?

		x	y	
ω	0	2	6	
r	30	-1	1	∞
s	40	1	$\boxed{-1}$	40

TABLEAU 1

		x	s	
ω	240	8	-6	
r	70	0	-1	∞
y	40	1	-1	∞

TABLEAU 2

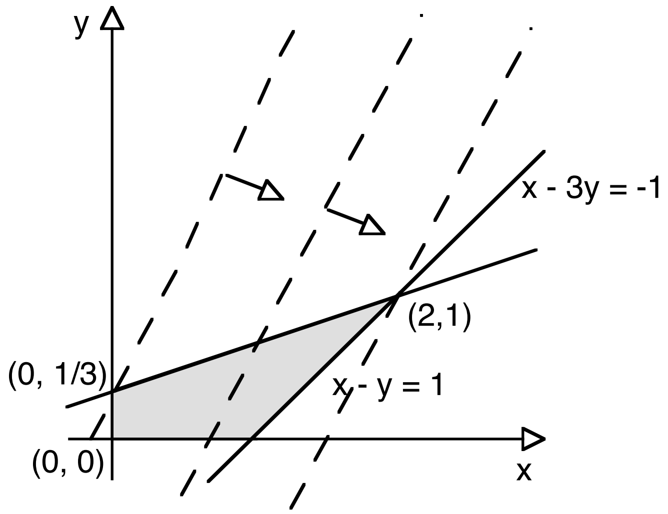
La solution associée au dernier tableau est réalisable mais elle n'est pas maximale. Aucun coefficient de la deuxième colonne est négatif. On peut donc augmenter indéfiniment la valeur de la variable x sans qu'aucune variable de base devienne négative. Par conséquent, la fonction objectif pourra augmenter sans limite. On dira dans ce cas que la valeur maximale n'existe pas. *La solution optimale n'existe pas lorsqu'il y a un coefficient positif dans la première ligne et aucun élément de la colonne associée à ce coefficient est négatif.*

c) Comment utilise-t-on la méthode du simplexe dans un problème de minimisation?

Minimiser $\omega = -2x + y$

si $\begin{cases} x - 3y \geq -1 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0 \text{ , } y \geq 0 \end{cases}$

Graphiquement on a,



sommets	$\omega = -2x + y$
(0,0)	0
(0,1/3)	1/3
(2,1)	-3 ←
(1,0)	-2

la solution est $\omega = -3$
si $x = 2$ et $y = 1$

Nous ne définirons pas une méthode particulière pour résoudre les problèmes de minimisation mais plutôt une façon de transformer les problèmes de minimisation en problèmes de maximisation. On admettra facilement que

la valeur minimale de $\omega = \{ -2, 9, -6, 3, 4 \}$ est $\omega = -6$ tandis que
la valeur maximale de $-\omega = \{ 2, -9, 6, -3, -4 \}$ est $\omega = 6$.

Cela nous amène à formuler le principe suivant.

$$\boxed{\text{minimiser } \omega = - \text{ maximiser } (-\omega)}$$

Le problème de minimisation devra d'abord être transformé en un problème de maximisation.

$$\text{Maximiser } -\omega = 2x - y$$

$$\text{si } \begin{cases} x - 3y \geq -1 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0 \text{ , } y \geq 0 \end{cases}$$

		x	y	
$-\omega$	0	2	-1	
r	1	1	-3	∞
s	1	$\boxed{-1}$	1	1 $\leftarrow$

TABLEAU 1

		s	y	
$-\omega$	2	-2	1	
r	2	-1	$\boxed{-2}$	1 $\leftarrow$
x	1	-1	1	∞

TABLEAU 2

		s	r
$-\omega$	3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x	2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

TABLEAU 3

La solution maximale est
$-\omega = 3$ si $x = 2$ et $y = 1$.

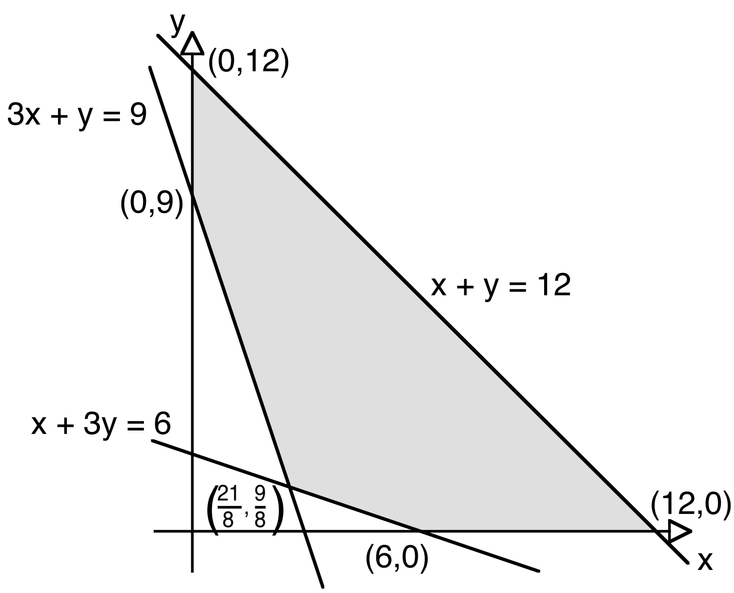
La solution minimale sera donc
$\omega = -3$ si $x = 2$ et $y = 1$.

d) Comment utilise-t-on la méthode du simplexe lorsque l'origine n'est pas une solution réalisable?

$$\text{Maximiser } \omega = x + 2y$$

$$\text{si} \quad \begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x + y \leq 12 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Graphiquement on obtient,



sommets	$\omega = x + 2y$
(0,9)	18
(0,12)	24 ←
(12,0)	12
(6,0)	6
(21/8,9/8)	39/8

Voyons maintenant que devient la solution avec la méthode du simplexe.

		x	y
ω	0	1	2
r	-9	3	1
s	12	-1	-1
t	-6	1	3

TABLEAU 1

Il est facile de vérifier que l'origine n'est pas une solution réalisable puisque pour $x = 0$ et $y = 0$ on a $r = -9$, $s = 12$, $t = -6$.

Si l'on veut utiliser la méthode du simplexe, il est indispensable que le tableau initial corresponde à une solution réalisable.

Lorsque l'origine n'est pas une solution réalisable, c'est-à-dire lorsque certaines valeurs de base sont négatives, nous devons transformer le tableau de façon à obtenir une solution réalisable. Avant de pouvoir utiliser la méthode du simplexe, la première colonne doit-être constituée d'éléments non négatifs (sauf peut-être le premier élément de cette colonne). Si un ou des éléments sont négatifs, on doit d'abord transformer le tableau de façon à les faire disparaître. Pour résoudre ce problème, il suffit de passer à un autre tableau en considérant un pivot positif. Malheureusement, il arrive souvent qu'en essayant de rendre un élément positif de la première colonne, d'autres éléments deviennent négatifs. Une technique simple consiste à examiner les éléments positifs des lignes présentant des éléments négatifs dans la première colonne et d'en choisir un qui rend la solution réalisable.

		x	y
ω	0	1	2
r	-9	3	1
s	12	-1	-1
t	-6	$\boxed{1}$	3

TABLEAU 1

		t	y	
ω	6	1	-1	
r	9	3	-8	∞
s	6	$\boxed{-1}$	2	6 ←
x	6	1	-3	∞

TABLEAU 2

On aurait pu utiliser un autre pivot positif. A titre d'exercice essayer de passer au tableau 2 en utilisant le second élément 1 comme pivot. Compléter ensuite le problème.

La solution est maintenant réalisable. On peut à partir de ce tableau utiliser la méthode du simplexe.

		s	y ↓	
ω	12	-1	1	
r	27	-3	-2	27/2
s	6	-1	2	∞
x	12	-1	$\boxed{-1}$	12 ←

TABLEAU 3

		s	x
ω	24	-2	-1
r	3	-1	2
t	18	-3	-2
y	12	-1	-1

TABLEAU 4

La solution maximale est $\omega = 24$ si $x = 0$ et y 12.

Normalement cette méthode sera suffisante pour les besoins du cours. Malheureusement, elle fonctionne que dans des cas très simples. En général, il est rare qu'on réussisse au premier essai à rendre la solution réalisable. Il est à conseiller d'utiliser une démarche rationnelle si on veut éviter de perdre son temps. Il existe plusieurs techniques à cet effet. Faute de pouvoir passer directement à une solution réalisable, l'une d'entre elles permet de diminuer le plus possible l'écart entre zéro et les valeurs des variables de base négatives.

TECHNIQUE POUR OBTENIR UNE SOLUTION REALISABLE.

1. choisir la constante négative de la première colonne ayant la position la plus basse dans le tableau,
2. choisir un coefficient positif dans cette ligne, le coefficient choisi détermine la colonne pivot,
3. avec ce coefficient positif et tous les autres coefficients négatifs sous lui, former les rapports

$$\left| \frac{\text{CONSTANTE}}{\text{COEFFICIENT}} \right|$$

4. le plus petit de ces rapports constitue l'élément pivot.

Si après transformation, la solution n'est pas réalisable, on recommence à l'étape 1. Si par ailleurs la solution devient réalisable, on continue avec la méthode du simplexe.

Exercices

1) Résoudre à l'aide de la méthode du simplexe.

a) Maximiser $\omega = 2x + y + 3z$

si $\begin{cases} x + z \leq 8 \\ y - z \geq -2 \\ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \end{cases}$

b) Minimiser $\omega = x - 3y - z$

si $\begin{cases} -x + 2y + z \leq 1 \\ 3x + y - z \leq 2 \\ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \end{cases}$

c) Minimiser $\omega = x - 2y - z$

si $\begin{cases} x - y - 2z \geq -2 \\ x + y + z \leq 6 \\ x - z \leq 1 \\ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \end{cases}$

d) Maximiser $\omega = x + 2y + z$

si $\begin{cases} 2y - x - z \leq -2 \\ 4x + y + z \leq 4 \\ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \end{cases}$

e) Maximiser $\omega = 2x + y + 6z$

si $\begin{cases} x - y - 2z \geq 1 \\ 2x - y + z \leq 9 \\ x - 2y \geq 4 \\ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \end{cases}$

f) Maximiser $\omega = 2x + 3y + z$

si $\begin{cases} y + z \leq 6 \\ x - z \leq 1 \\ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \end{cases}$

g) Minimiser $\omega = 2x + 3y + z$

si $\begin{cases} x + y + z \geq 10 \\ 2x + 3y + z \geq 15 \\ 3x + y + 2z \geq 20 \\ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \end{cases}$

2) Un couturier veut confectionner au moins 30 complets et au moins 50 robes. Avec un mètre carré

de coton, il peut confectionner 2 complets et 1 robe,
de soie, il peut confectionner 1 complet et 1 robe,
de laine, il peut confectionner 1 complet et 3 robes.

Le prix du coton est de 11$ le mètre carré, celui de la soie est de 16$ le mètre carré tandis celui de la laine est de 15$ le mètre carré. Combien le couturier doit-il acheter de mètres carrés de coton, de soie et de laine pour minimiser ses coûts?

Réponses

1) a) La solution maximale n'existe pas

b) $\omega = -\frac{12}{7}$ si $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{5}{7}$, $z = 0$

c) $\omega = -5$ si $x = 1$, $y = 3$, $z = 0$

d) $\omega = \frac{14}{3}$ si $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{10}{3}$

e) $\omega = 14$ si $x = 4$, $y = 0$, $z = 1$

f) $\omega = 20$ si $x = 1$, $y = 6$, $z = 0$ ou
$x = 7$, $y = 0$, $z = 6$ ou
toute valeur de l'ensemble des solutions réalisables
respectant l'équation $\omega = 2x + 3y + z$

g) $\omega = 15$ si $x = 5$, $y = 0$, $z = 5$ ou
$x = 0$, $y = 0$, $z = 15$ ou
$x = 0$, $y = 2$, $z = 9$ ou
$x = 5/3$, $y = 5/3$, $z = 20/3$ ou
toute valeur de l'ensemble des solutions réalisables
respectant l'équation $\omega = 2x + 3y + z$

2) $\omega = 298\$$ si le couturier achète 8 mètres carrés de coton, 0 mètre carré de soie et 14 mètres carrés de laine

Exercices de revision

1) Résoudre

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 6x - 4 = 9y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 5y + 10z = 65 \\ x + 3y - 2z = -19 \\ 3x - y + 4z = 23 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 8x - 5y + 2z = 1 \\ 11x - 7y + 3z = -1 \end{cases}$

2) Une diète doit contenir au moins 12 unités de vitamine R, 5 unités de vitamine S et 8 unités de vitamine T. Ces vitamines sont contenues dans deux types de nourriture. Une livre de nourriture de type A contient 2 unités de vitamine R, 1 unité de vitamine S et 4 unités de vitamine T. D'autre part, une livre de nourriture de type B contient 3 unités de vitamine R, 1 unité de vitamine S et 1 unités de vitamine T. Si la nourriture A coûte 0,60$ la livre et la nourriture B coûte 0,40$ la livre, combien de livres de chaque type de nourriture doit-on acheter pour satisfaire les quantités requises de vitamines à coût minimal? La solution optimale apporte-t-elle des surplus de vitamines, si oui lesquels? (RESOUDRE GRAPHIQUEMENT)

3) Un garagiste rebatit des moteurs usagés de camions et d'autos. Un moteur d'autos remis à neuf fournit un profit de 100$ et un moteur de camions remis à neuf fournit le même profit. A chaque semaine le garage remet à neuf au plus 24 moteurs. L'équipe de techniciens affectée aux moteurs d'autos ne peut produire plus de 12 moteurs par semaine de plus que l'équipe assignée aux moteurs de camions. A cause des conditions de la demande, la production hebdomadaire des moteurs de camions ne doit jamais excéder le double de la production des moteurs d'autos. Quelle production maximise le profit du garagiste? (RESOUDRE GRAPHIQUEMENT)

4) Résoudre en utilisant la méthode du simplexe.

$$\text{Maximiser } \omega = 3x + y + 4z$$

$$\text{si} \quad \begin{cases} 2x + y + z \leq 20 \\ z \leq 8 \\ x - y \leq 3 \\ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \end{cases}$$

5) Un pharmacien doit produire trois sortes de médicaments avant la fin de la journée. Il a en main les ingrédients nécessaires pour produire un maximum de 30 bouteilles du médicament A. De plus, le nombre de bouteilles du médicament C ne peut excéder le nombre de bouteilles du médicament B par plus de 20 unités. Le pharmacien prend en moyenne 1 minute à préparer une bouteille du médicament A, 3 minutes à préparer une bouteille du médicament B et 2 minutes à préparer une bouteille du médicament C. Le pharmacien dispose de 190 minutes de travail dans sa journée. Son profit est de 3$ par bouteille du médicament A, 1$ par bouteille du médicament B et 2$ par bouteille du médicament C. Combien le pharmacien doit-il produire de bouteilles de chaque médicament afin de maximiser son profit?

6) a) Maximiser $\omega = x + 2y + 3z$

si $\begin{cases} 3x - 4y - 3z \leq 3 \\ x - 3y + z \leq 1 \\ x \geq 0 \ , y \geq 0 \ , z \geq 0 \end{cases}$

b) Minimiser $\omega = 3x + 9y - 4z$

si $\begin{cases} x + y - 2z \geq 2 \\ x + 2y - z \geq 5 \\ x \geq 0 \ , y \geq 0 \ , z \geq 0 \end{cases}$

c) Maximiser $\omega = x + 3y + 2z$

si $\begin{cases} x + 2y + 3z \leq 50 \\ x + 3y + 5z \leq 60 \\ x \geq 0 \ , y \geq 0 \ , z \geq 0 \end{cases}$

Réponses aux exercices de revision

1) a) aucune solution
b) (8, 11, -4)
c) infinité de solutions

2) 1 livre de A et 4 livres de B pour un coût de 2,20$;
on aura un surplus de 2 unités de vitamine R

3) le profit sera de 2400$ pour 18 d'autos et 6 de camions ou
8 d'autos et 16 de camions ou
toute valeur de l'ensemble des solutions réalisables respectant l'équation
$100x + 100y = 2400$

4) $\omega = 49$ si $x = 5$, $y = 2$ et $z = 8$

5) le profit sera de 202$ pour 30 bouteilles du médicament A,
24 bouteilles du médicament B,
44 bouteilles du médicament C

6) a) La solution maximale n'existe pas
b) $\omega = 12$ si $x = 8$, $y = 0$ et $z = 3$
c) $\omega = 60$ si $x = 0$, $y = 20$ et $z = 0$ ou
$x = 30$, $y = 10$ et $z = 0$ ou
toute valeur de l'ensemble des solutions réalisables respectant l'équation $\omega = x + 3y + 2z$