Probabilité

2

2.1 Définitions préliminaires

La théorie des probabilités utilise un langage emprunté à la théorie des ensembles. Il sera nécessaire de définir les éléments de ce langage avant d'entreprendre notre étude sur les probabilités.

expérience aléatoire

Nous appellerons *expérience aléatoire*, une expérience qui possède les deux propriétés suivantes:

a) on ne peut prévoir avec certitude les résultats de l'expérience,
b) on peut décrire, avant toute expérimentation, l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.

Par exemple, le lancer d'un dé ordinaire est une expérience aléatoire car

a) le résultat de l'expérience est inconnu au départ,
b) les résultats possibles sont connus avant que l'expérience débute.

espace échantillon

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé *espace échantillon* et est noté Ω.

L'ensemble des résultats possibles peut s'exprimer de plusieurs façons différentes. On retiendra celle qui est la plus détaillée possible c'est-à-dire, celle qui nous permettra de répondre aux différentes questions qu'on se pose.

Considérons quelques expériences aléatoires et leur espace échantillon.

- Lancer un sou.

$$\Omega = \{ P, F \}$$

- Lancer un sou deux fois.

$$\Omega = \{ PP, PF, FP, FF \}$$

- Choisir une carte au hasard d'un jeu ordinaire de 52 cartes.

$$\Omega = \{ 2\heartsuit, 3\heartsuit, 4\heartsuit, \ldots, \text{as}\spadesuit \}$$

- Choisir deux lettres au hasard l'une après l'autre parmi les lettres du mot BAS.

$$\Omega = \{ BA, AB, BS, SB, AS, SA \}$$

- Choisir une famille de trois enfants et noter l'ordre des naissances (Garçon, Fille) des enfants.

$$\Omega = \{ GGG, GGF, GFG, GFF, FGG, FGF, FFG, FFF \}$$

L'espace échantillon peut contenir un nombre infini d'éléments.

- On note le revenu mensuel d'un individu choisi au hasard d'une population donnée.

$$\Omega = [\ 0\ \$,\ 1\ 000\ 000\ \$\ ]$$

(En admettant que le revenu mensuel ne peut excéder 1 000 000 $.)

événement

Un sous-ensemble d'un espace échantillon Ω est un événement noté
$A, B, C, \ldots A_1, A_2, A_3, \ldots B_1, B_2, B_3, \ldots$

exemple 2.1.1

la cardinalité d'un événement A noté n(A) correspond au nombre d'éléments dans A

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE	ÉVÉNEMENTS	CARDINALITÉ
lancer un dé	$A_1 = \{ 1, 3, 5 \}$	3
	$A_2 = \{ 2, 4, 6 \}$	3
	$A_3 = \{ 1 \}$	1
	$A_4 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$	6
	$A_5 = \{ \ \}$	0

événement réalisé

Un événement A est réalisé lorsque le résultat de l'expérience est élément de A.

exemple 2.1.2

On lance un sou.

a) Décrire en extension tous les événements possibles associés à cette expérience aléatoire.
b) Si à la suite de l'expérience, on obtient pile alors parmi tous les événements possibles, lesquels sont réalisés?

si un espace échantillon Ω comprend n éléments alors il existe 2^n événements différents possibles associés à cet espace échantillon.

rép: a) $A_1 = \{ P \}$, $A_2 = \{ F \}$, $A_3 = \{ P, F \}$, $A_4 = \{ \ \}$ b) A_1 et A_3

événements particuliers

événement certain
événement impossible
événement élémentaire

a) L'événement $A = \Omega$ est appelé *événement certain*. Il se réalise toujours.

b) L'événement $B = \varnothing$ est appelé *événement impossible*. Il ne se réalise jamais.

c) L'événement E constitué d'un seul élément de Ω est appelé *événement élémentaire*. Il se réalise d'une seule façon.

exemple 2.1.3

On lance une paire de dés. Soit les événements

A: la somme des points est supérieure à 15
B: la somme des points est inférieure à 13
C: la somme des points est égale à 2

Décrire chacun des événements.

$A = \varnothing$ (événement impossible)
$B = \Omega$ (événement certain)
$C = \{ (1, 1) \}$ (événement élémentaire)

opérations sur les événements

Les événements étant des ensembles, on utilisera 3 opérateurs définies sur les ensembles:

l'union, « $\cup$ »
l'intersection, « $\cap$ »
le complémentaire, « $-$ »

L'événement

$A \cup B$ se réalise si A se réalise ou B se réalise,

$A \cap B$ se réalise si A se réalise et B se réalise,

$\overline{A}$ se réalise si A ne se réalise pas.

règles sur les événements

Soit $A, B, C \subseteq \Omega$

1) $\overline{\overline{A}} = A$

2) $\overline{\Omega} = \varnothing$

3) $\overline{\varnothing} = \Omega$

4) $A \cup \Omega = \Omega$

5) $A \cap \Omega = A$

6) $A \cup \varnothing = A$

7) $A \cap \varnothing = \varnothing$

8) $A \cup \overline{A} = \Omega$

9) $A \cap \overline{A} = \varnothing$

10) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (règle de De Morgan)

11) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (règle de De Morgan)

12) $A \cup B = B \cup A$

13) $A \cap B = B \cap A$

14) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

15) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

16) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

17) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

remarques

a) Nous n'avons pas utilisé l'opérateur \ . Souvenons-nous seulement que

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ $\qquad$ $B \setminus A = \overline{A} \cap B$

b) Les règles de De Morgan se généralisent à trois ou plusieurs événements.

ainsi
$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$
$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

exemple 2.1.4

On lance un sou 3 fois. Soit les 2 événements

$A = \{ PFP, PPP, FPF, FPP \}$ et $B = \{ PPP, FFF, PPF, FPP \}$.

Décrire en extension les événements suivants.

a) $A \cap B$ $\qquad$ c) $\overline{A}$ $\qquad$ e) $A \cap \overline{B}$ $\qquad$ g) $\overline{A} \cap \overline{B}$

b) $A \cup B$ $\qquad$ d) $\overline{A \cup B}$ $\qquad$ f) $\overline{A} \cap B$

rép: a) { PPP, FPP } ; b) { PFP, PPP, FPF, FPP, FFF, PPF } ; c) { PPF, PFF, FFP, FFF } ; d) { PFF, FFP } ; e) { PFP, FPF } ; f) { FFF, PPF } ; g) { PFF, FFP }

événements mutuellement exclusifs

Soit A, B $\subseteq$ Ω. Les deux événements sont *mutuellement exclusifs* si ils ne peuvent se réaliser simultanément i.e. si $A \cap B = \varnothing$.

exemple 2.1.5

On lance un sou 2 fois. Soit A = { PP, FF } et B = { FP, PF }.
Les événements A et B sont-ils mutuellement exclusifs?

rép: oui

classe d'événements mutuellement exclusifs

Soit les événements

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \; \ldots \;, A_n \subseteq \Omega$$

Si ces événements sont mutuellement exclusifs deux à deux

$$\text{i.e.} \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad (i,\ j = 1, 2, 3, \ldots, n \ \text{ et } \ i \neq j)$$

alors ils forment une *classe d'événements mutuellement exclusifs*.

classe d'événements exhaustifs

Soit les événements

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \; \ldots \;, A_n \subseteq \Omega$$

Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ alors les événements forment une *classe d'événements exhaustifs* par rapport à Ω.

partition de Ω

Lorsque des événements de Ω forment une classe d'événements

a) mutuellement exclusifs
b) exhaustifs par rapport à Ω

ces événements forment une *partition* de Ω.

exemple 2.1.5 On lance un dé. Soit les 4 événements suivants.

$$A = \{ 1 \}$$
$$B = \{ 2, 4, 6 \}$$
$$C = \{ 1, 3, 5 \}$$
$$D = \{ 3, 5 \}$$

Énumérer

a) 5 classes d'événements mutuellement exclusifs,
b) 5 classes d'événements exhaustifs par rapport à Ω,
c) 2 partitions différentes de Ω.

---

rép: a) { A, B } , { A, D } ,{ B, C } , { B, D } , { A, B, D }
b) { B, C } , { A, B, C } ,{ A, B, D } , { B, C, D } , { A, B, C, D }
c) { B, C } , { A, B, D }

Exercices 2.1

1. On lance un sou et ensuite on lance un dé. Décrire en extension
   a) l'espace échantillon associé à l'expérience aléatoire,
   b) les événements suivants:
      A: obtenir face avec le sou et un nombre pair avec le dé,
      B: obtenir un nombre supérieur à 3 avec le dé.

2. Un mot est choisi au hasard parmi les mots de l'ensemble

   { POT, BOND, BUT, DOIGT, BOUT }

   Soit les 3 événements
      A: le mot possède exactement 2 voyelles,
      B: la première lettre du mot est B,
      C: le mot rime avec idiot.

   Décrire en extension les événements suivants.

   a) Ω e) $\overline{B}$ i) $A \cap \overline{B}$
   b) A f) $A \cap B$ j) $B \cap \overline{A}$
   c) B g) $A \cap C$ k) $\overline{A} \cap \overline{B}$
   d) C h) $A \cup B$ l) $\overline{B} \cup \overline{C}$

3. Soit A, B et C trois événements de Ω. Placer les événements suivants sur un diagramme de Venn en hachurant les régions correspondantes.

   a) $\overline{A \cap B}$ d) $(A \cap \overline{B}) \cup B$ g) $\overline{A \cup B \cup C}$
   b) $\overline{A} \cup \overline{B}$ e) $B \cap (\overline{A \cup C})$
   c) $\overline{A \cup B}$ f) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

4. Un observateur en fonction dans un supermarché enregistre les achats de savon. Il indique la marque du savon (A, B ou C) et la quantité achetée (il y a des boîtes de 1, 2 et 4 kg). Décrire l'espace échantillon associé l'expérience qui consiste à observer un achat.

5. On choisit 2 personnes pour travailler dans un bureau. Trois hommes, JEAN, MICHEL et DENIS ainsi que 2 femmes, FRANCE et SYLVIE ont fait une demande d'emploi. Soient A, B, C et D les 4 événements suivants:
      A: deux personnes de sexe différent sont choisies,
      B: deux hommes sont choisis,
      C: Michel est choisi,
      D: aucun homme est choisi.

a) Décrire l'espace échantillon associé à l'expérience aléatoire.
b) Décrire les événements A, B, C, D.
c) Énumérer 5 classes d'événements mutuellement exclusifs.
d) Énumérer 2 classes d'événements exhaustifs.
e) Donner une partition de l'espace échantillon.

6. Une urne contient 3 boules: une rouge, une verte et une blanche. On choisit une boule de l'urne, on la remet dans l'urne puis on en choisit une deuxième. Soit

   A_1: on choisit aucune boule rouge,
   A_2: on choisit 2 boules d'une même couleur,
   A_3: on choisit au moins 1 boule rouge,
   A_4: on choisit 2 boules d'une couleur différente,
   A_5: on choisit 2 boules rouges,
   A_6: on choisit 1 boule rouge.

   a) Décrire l'espace échantillon associé à cette expérience.
   b) Décrire chacun des événements.
   c) A_2 et A_3 sont-ils mutuellement exclusifs?
   d) A_1 et A_4 sont-ils exhaustifs par rapport à Ω?
   e) A_1 et A_4 forment-ils une partition de Ω?
   f) A_1 , A_5 et A_6 forment-ils une classe d'événements mutuellement exclusifs?
   g) A_1 , A_5 et A_6 forment-ils une partition de Ω?

7. On lance un dé 2 fois. Soit les événements

   A: obtenir un 6 au premier tirage,
   B: obtenir un 6 au second tirage.

   Chaque événement de la première liste est équivalent à un événement de la seconde liste. Pouvez-vous associer ces événements?

A) obtenir un 6 aux 2 tirages,	a) $\overline{A} \cup \overline{B}$
B) obtenir un 6 au premier tirage et aucun au second tirage,	b) $\overline{A} \cap \overline{B}$
C) obtenir aucun 6 lors des 2 tirages,	c) $A \cap B$
D) ne pas obtenir un 6 au premier tirage ou ne pas obtenir un 6 au second tirage,	d) $A \cup B$
E) obtenir au moins un 6 lors des 2 tirages.	e) $A \cap \overline{B}$

8. En utilisant les règles sur les événements prouver que si A et B sont des événements de Ω alors:

   a) $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ sont mutuellement exclusifs,

   b) $A \cup B$ et $\overline{A}$ sont exhaustifs,

   c) $\overline{A} \cap (A \cup B) = \overline{A} \cap B$,

   d) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

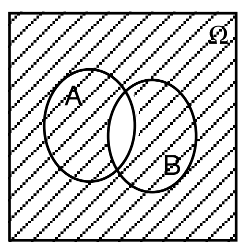
9. On lance une pièce de monnaie 3 fois. Combien peut-on associer d'événements différents à cette expérience aléatoire?

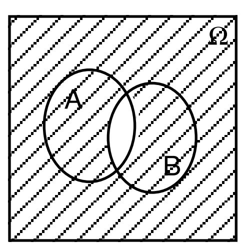
10. Trouver la cardinalité de l'espace échantillon associé aux expériences aléatoires suivantes.
    a) On lance une pièce de monnaie 9 fois.
    b) On lance un dé 3 fois.
    c) On pige 2 cartes (simultanément) d'un jeu ordinaire de 52 cartes.

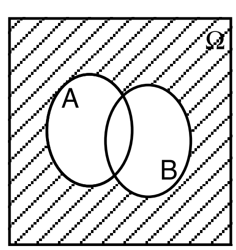
Réponses aux exercices 2.1

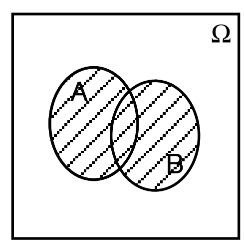
1. a) { P1, P2, P3, P4, P5, P6, F1, F2, F3, F4, F5, F6 }
   b) A = { F2, F4, F6 }
   B = { P4, P5, P6, F4, F5, F6 }

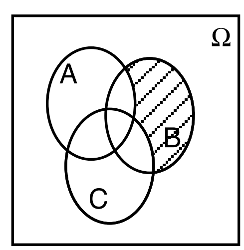
2. a) { POT, BOND, BUT, DOIGT, BOUT } = Ω
   b) { DOIGT, BOUT }
   c) { BOND, BUT, BOUT }
   d) { POT }
   e) { POT, DOIGT }
   f) { BOUT }
   g) { } = ∅
   h) { BOND, BUT, DOIGT, BOUT }
   i) { DOIGT }
   j) { BOND, BUT }
   k) { POT }
   l) { POT, BOND, BUT, DOIGT, BOUT } = Ω

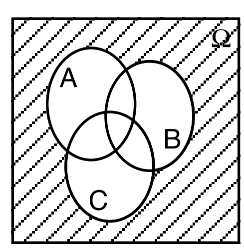
3. a)


b)


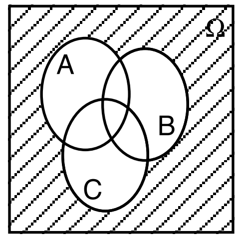
c)


d)


e)


f)


g)



4. { (A,1), (A,2), (A,4), (B,1), (B,2), (B,4), (C,1), (C,2), (C,4) }

5.
a) { JM, JD, JF, JS, MD, MF, MS, DF, DS, FS }

b) A = { JF, JS, MF, DF, DS, MS }
B = { JM, JD, MD }
C = { JM, MD, MF, MS }
D = { FS }

c) { A, B }, { A, D }, { B, D }, { C, D }, { A, B, D }

d) { A, B, D }, { A, B, C, D }

e) { A, B, D }

6.
a) { RR, RV, RB, VV, VR, VB, BB, BR, BV }

b) A_1 = { VV, VB, BB, BV }
A_2 = { RR, VV, BB }
A_3 = { RR, RV, RB, VR, BR }
A_4 = { RV, RB, VR, VB, BR, BV }
A_5 = { RR }
A_6 = { RV, RB, VR, BR }

c) non

d) non

e) non

f) oui

g) oui

7. (A, c), (B, e), (C, b), (D, a), (E, d)

9. 256

10 a) 512 b) 216 c) 1326

2.2 Définition axiomatique de la probabilité

On s'intéresse maintenant aux chances qu'a un événement de se réaliser. On utilise fréquemment des expressions telles que:

- il est possible,
- il est peu probable,
- il y a de bonnes chances.

Même si cette échelle verbale marque un pas dans la bonne direction, elle demeure très imprécise. Il est nécessaire de convertir cette échelle verbale en une échelle numérique si on désire l'utiliser dans des domaines scientifiques. La théorie des probabilités a pour objet l'étude d'une telle échelle numérique. Un peu comme la balance qui a pour fonction de mesurer le poids d'une masse, le calcul des probabilités a pour fonction de mesurer les chances de réalisation d'un événement.

C'est depuis *Kolmogorov* (1950) qu'on a commencé à considérer la probabilité comme un être mathématique dont la définition est bien établie et unanimement admise.

Les mathématiciens se sont mis d'accord pour inclure 3 propriétés essentielles à la définition d'une telle mesure.

a) On a convenu d'associer un nombre réel non négatif à chaque événement A d'un espace échantillon. Un peu comme la balance associe à toute masse, un nombre réel non négatif correspondant à son poids.

b) On s'est ensuite donné un point de repère. On a associé la valeur 1 à l'événement certain Ω. Par analogie, la balance associe la valeur 0 à une absence de poids.

c) Finalement, pour que le système de mesure soit cohérent et ne présente aucune contradiction, on a convenu que si $A, B \subseteq \Omega$ sont des événements mutuellement exclusifs alors la mesure des chances de réalisation de l'événement $A \cup B$ doit être la même que la somme des mesures des chances de réalisation des événements A et B.

Afin de justifier cette dernière contrainte, référons-nous une fois de plus à notre modèle de la balance. Imaginons 2 objets différents. Pour obtenir le poids total des objets, on pourrait procéder des 2 façons suivantes.

- Placer ensemble les objets sur la balance et noter le poids total.
- Placer le premier objet sur la balance et noter le poids, placer ensuite le deuxième objet sur la balance et noter le poids, puis finalement additionner les 2 poids.

Pensez à une balance qui donnerait 2 valeurs différentes. Vous diriez que cette balance n'est pas fiable, qu'elle se contredit. Afin de s'assurer d'aucune contradiction entre les valeurs obtenues avec ce système de mesure, les mathématiciens se sont entendus sur ce dernier point.

Dans le langage des mathématiques, la fonction servira d'appareil pour mesurer les chances de réalisation d'un événement.

définition 2.2.1
définition de la probabilité

Une fonction P qui assigne un nombre réel à chaque événement A d'un espace échantillon Ω est une fonction de probabilité si elle satisfait aux 3 propriétés essentielles (axiomes) suivantes:

axiome 1 — 1) $P(A) \geq 0 \ , \ \forall \ A \subseteq \Omega$

axiome 2 — 2) $P(\Omega) = 1$

axiome 3 — 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont mutuellement exclusifs

La dernière propriété se généralise à plusieurs événements.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

(Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ forment une classe d'événements mutuellement exclusifs.)

Ce résultat pourrait être facilement prouvé par induction en utilisant l'axiome 3 et la propriété d'associativité des événements sur l'union.

À l'aide de la définition axiomatique de la probabilité, on peut déduire plusieurs règles élémentaires.

proposition 2.2.1

Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ forment une partition de Ω alors

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = 1$$

démonstration

exemple 2.2.1

On lance un sou truqué. La probabilité d'obtenir face est 3 fois plus élevée que celle d'obtenir pile. Trouver la probabilité d'obtenir pile ainsi que la probabilité d'obtenir face.

rép: $P(F) = \frac{3}{4}$, $P(P) = \frac{1}{4}$

définition 2.2.2
modèle de probabilité

Lorsqu'on assigne des probabilités aux événements

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \subseteq \Omega$$

et que ces événements forment une partition de Ω, cette assignation correspond à un modèle de probabilité lorsque

a) $P(A_i) \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, k)$

b) $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k) = 1$

exemple 2.2.2

On lance un dé. Soit les 6 événements élémentaires

$$E_1 = \{1\}, E_2 = \{2\}, E_3 = \{3\}, E_4 = \{4\}, E_5 = \{5\}, E_6 = \{6\}$$

et le tableau de probabilités suivant.

	$P(E_1)$	$P(E_2)$	$P(E_3)$	$P(E_4)$	$P(E_5)$	$P(E_6)$
a)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
b)	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$
c)	0	0	0	0	0	1
d)	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{6}{20}$

Dans chacun des cas, l'assignation des probabilités qu'on a donné aux différents événements constitue-t-elle un modèle de probabilité?

rép: a) oui ; b) oui ; c) oui ; d) non

proposition 2.2.2

Soit $A \subseteq \Omega$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

démonstration

exemple 2.2.3

On lance un dé truqué. La probabilité d'obtenir un 6 est 1/4 . Calculer la probabilité de ne pas obtenir un 6.

rép: $\frac{3}{4}$

corollaire 2.2.2

$$P(\varnothing) = 0$$

démonstration

proposition 2.2.3

Soit $A, B \subseteq \Omega$

a) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

b) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

démonstration

exemple 2.2.4 Soit $A, B \subseteq \Omega$.

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad P(\overline{B}) = \frac{2}{3} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Trouver

a) $P(A \cap \overline{B})$ b) $P(\overline{A} \cap B)$

rép: a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{5}{24}$

proposition 2.2.4 Si $A \subseteq B \subseteq \Omega$ alors $P(A) \leq P(B)$

démonstration

exemple 2.2.5 Trouver la contradiction.

« A et B sont deux événements de Ω et $P(A) = \frac{1}{4}$ tandis que $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$ »

rép: $A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)$ et $\frac{3}{8} \not\leq \frac{1}{4}$

corollaire 2.2.4

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall\, A \subseteq \Omega$$

démonstration

proposition 2.2.5

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall\, A, B \subseteq \Omega$$

démonstration

exemple 2.2.6

Soit $A, B \subseteq \Omega$ et

$$P(A) = 0{,}4 \qquad P(B) = 0{,}5 \qquad P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}7$$

Trouver $P(A \cup B)$.

rép: 0,4

corollaire 2.2.5

$\forall$ A, B, C $\subseteq \Omega$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

démonstration

exemple 2.2.7

Soit A, B $\subseteq \Omega$ et

$$P(A \cup B) = \frac{7}{8} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad P(\overline{A}) = \frac{5}{8}$$

Trouver

a) P(A) c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

b) P(B) d) $P(A \cap \overline{B})$

rép: a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{8}$

exemple 2.2.8 Un dé truqué est lancé. Soit les 6 événements élémentaires

$$E_1 = \{ 1 \}, E_2 = \{ 2 \}, E_3 = \{ 3 \}, E_4 = \{ 4 \}, E_5 = \{ 5 \}, E_6 = \{ 6 \}$$

Sachant que $P(E_1) = P(E_3) = P(E_5)$
$P(E_2) = P(E_4) = P(E_6)$
$P(E_1) = 2P(E_2)$

trouver la probabilité d'obtenir avec ce dé un résultat supérieur à 3.

rép: $\frac{4}{9}$

exemple 2.2.9 Une récente enquête effectuée au Québec a révélé que si on choisit au hasard un Québécois, la probabilité que celui-ci soit un partisan des CANADIENS ou des EXPOS est de 7/8, la probabilité qu'il soit un partisan des CANADIENS et des EXPOS est de 1/4 tandis que la probabilité qu'il ne soit pas un partisan des EXPOS est de 5/8. À l'aide de ces chiffres, déterminer la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard au Québec

a) soit partisan des EXPOS,
b) soit partisan des CANADIENS,
c) soit partisan des EXPOS et pas partisan des CANADIENS,
d) ne soit partisan d'aucune des deux équipes.

rép: a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{1}{8}$; d) $\frac{1}{8}$

La probabilité d'un événement peut être interprété de deux façons différentes.

probabilité empirique

- D'un point de vue empirique, elle peut être considérée comme la fréquence relative de réalisation de l'événement lors d'essais répétés de l'expérience. La valeur obtenue représente en fait une estimation de la probabilité de l'événement. On obtient la valeur exacte de cette probabilité pour un nombre infini d'essais

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{nombre de réalisations de l'événement A en n essais}}{n}$$

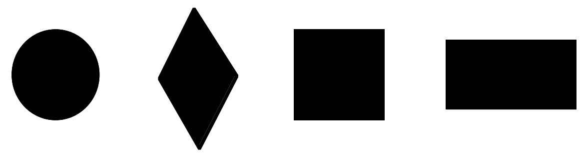
Si on lance un sou 100 fois et qu'on obtient pile 60 fois alors la probabilité d'obtenir pile peut être estimé à 60/100 ou 0,6. Pour obtenir la valeur exacte de cette probabilité, le nombre d'essais devrait être infini.

probabilité subjective

- D'un point subjectif, la probabilité peut être interprétée comme un degré de conviction personnel de la réalisation de l'événement. Ainsi la probabilité que les Expos remportent la série mondiale l'année prochaine pourrait être fixée à 0,3 par un amateur. Cette probabilité représente le degré de conviction personnel de réalisation de l'événement par l'amateur.

Exercices 2.2

1. Une expérience en psychologie consiste à rechercher chez les gens, l'ordre de préférence du point de vue esthétique des différentes formes suivantes:



On a remarqué que l'ordre de préférence varie suivant le caractère des gens. Pour 5 groupes de personnes à caractères homogènes, un psychologue a tenté de construire un modèle de probabilité associé à chacun des groupes.

GROUPE 1:
P(●) = $\frac{1}{2}$ P(◆) = $\frac{1}{4}$ P(■) = $\frac{1}{6}$ P(▬) = $\frac{1}{12}$

GROUPE 2:
P(●) = 0,25 P(◆) = 0,2 P(■) = 0,4 P(▬) = 0,1

GROUPE 3:
P(●) = 0,1 P(◆) = 0,2 P(■) = 0,3 P(▬) = 0,4

GROUPE 4:
P(●) = $-\frac{1}{5}$ P(◆) = $\frac{1}{5}$ P(■) = $\frac{3}{5}$ P(▬) = $\frac{2}{5}$

GROUPE 5:
P(●) = 1 P(◆) = 0 P(■) = 0 P(▬) = 0

Est-ce que chacune de ces assignations constitue un modèle de probabilité? (justifier votre réponse)

2. Soit A et B deux événements formant une classe d'événements mutuellement exclusifs et

$$P(A) = \frac{1}{5} \qquad P(B) = 0{,}55$$

Trouver

a) $P(A \cap B)$ c) $P(A \cup B)$ e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

b) $P(\overline{A})$ d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ f) $P(\overline{A} \cap B)$

3. Soit $A, B \subseteq \Omega$ et

$$P(A) = 0{,}30 \qquad P(B) = 0{,}78 \qquad P(A \cap B) = 0{,}16$$

Trouver

a) $P(A \cup B)$ c) $P(\overline{A} \cap B)$

b) $P(A \cap \overline{B})$ d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

4. Une expérience aléatoire comporte 3 événements A, B et C formant une partition de Ω. Si

$$P(\overline{A}) = \frac{8}{11} \quad \text{et} \quad P(\overline{B}) = \frac{5}{7}$$

trouver $P(\overline{C})$.

5. Soit A, B et C trois événements formant une classe d'événements mutuellement exclusifs. Pour chacune des situations suivantes, expliquer pourquoi on ne peut assigner les probabilités de la façon indiquée.

   a) $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}4$; $P(A \cup C) = 0{,}2$

   b) $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}1$; $P(A \cap C) = 0{,}3$

   c) $P(A) = 0{,}6$; $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}5$

   d) $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2$

6. Trois nageurs participent à une course olympique. Soit A, B et C les 3 nageurs. Si les nageurs A et B ont les mêmes chances de gagner et chacun a deux fois plus de chance de gagner que C alors trouver la probabilité que B gagne la course.

7. Une agence de publicité offre a sa clientèle 3 choix de cadeaux:

   une MONTRE, un COUTEAU, une RADIO

   Si la MONTRE a deux fois plus de chance d'être choisi que le COUTEAU et trois fois plus de chance d'être choisi que la RADIO alors trouver la probabilité qu'un individu choisisse une MONTRE ou un COUTEAU.

8. Un dé truqué est lancé. La probabilité d'obtenir une face quelconque est directement proportionnelle à la valeur sur cette face. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre impair avec ce dé.

   (Par exemple la probabilité d'obtenir la face 6 est égale 6k.)

9. Dans une région du Québec, la probabilité qu'une personne ait les cheveux bruns est de 0,40, les yeux bruns est de 0,25, les cheveux bruns et les yeux bruns est de 0,15. Une personne est choisie au hasard dans cette ville. Calculer la probabilité que cette personne ait les cheveux bruns ou les yeux bruns.

10. Un étudiant s'inquiète au sujet de ses examens de MATHS et de CHIMIE. Il estime avoir 30 % de chance de réussir son examen de MATHS, 60 % de chance de réussir au moins un des deux examens, 10 % de chance seulement de réussir les deux examens. Quelle est la probabilité qu il réussisse son examen de CHIMIE?

11. Un étudiant se présente à un bureau de placement. La probabilité qu'il soit choisi par la compagnie A est de 0,6. Il fait aussi application à la compagnie B. La probabilité d'être choisi par les 2 compagnies est de 0,4 tandis que la probabilité d'être choisi par aucune compagnie est de 0,3. Quelle est la probabilité qu'il aura

    a) une offre d'au moins une compagnie?
    b) une offre de la compagnie B?
    c) une offre de la compagnie B et aucune de la compagnie A?

12. Une enquête révèle que parmi les étudiants du collège de Maisonneuve 75 % réussissent à la première tentative leur cours de PHILOSOPHIE, 65 % leur cours de FRANÇAIS, 45 % leur cours de MATHÉMATIQUES, 50 % leurs cours de PHILOSOPHIE et de FRANÇAIS, 20 % leurs cours de FRANÇAIS et de MATHÉMATIQUES, 30 % leurs cours de PHILOSOPHIE et de MATHÉMATIQUES et 10 % les 3 cours. Quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard dans ce collège, réussisse à la première tentative

    a) au moins un des 3 cours?
    b) aucun des 3 cours?

Réponses aux exercices 2.2

1. oui , non , oui , non , oui

2. a) 0   c) 0,75   e) 1
   b) 0,8   d) 0,25   f) 0,55

3. a) 0,92   c) 0,62
   b) 0,14   d) 0,08

4. $\frac{43}{77}$

5. a) car $A \subseteq A \cup C$ et $P(A) \nleq P(A \cup C)$
   b) car $A \cap C = \varnothing$ et $P(A \cap C) \neq 0$
   c) car $P(A \cap \overline{B}) \neq P(A)$
   d) car $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \neq 1 - P(A) - P(B)$

6. $\frac{2}{5}$

7. $\frac{9}{11}$

8. $\frac{3}{7}$

9. 0,5

10. 0,4

11. a) 0,7   b) 0,5   c) 0,1

12. a) 0,95   b) 0,05

2.3 Évaluation de la probabilité d'un événement

Lorsqu'un événement est associé à une expérience aléatoire dont les événements élémentaires sont *équiprobables* (de probabilités égales), il est alors possible d'évaluer théoriquement la probabilité de l'événement.

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé.

$$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Il existe 6 événements élémentaires associés à cette expérience aléatoire.

$$E_1 = \{ 1 \},\ E_2 = \{ 2 \},\ E_3 = \{ 3 \},\ E_4 = \{ 4 \},\ E_5 = \{ 5 \},\ E_6 = \{ 6 \}$$

Ces événements forment une partition de Ω. Par conséquent

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$$

Si on accepte que ces événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser (hypothèse d'équiprobabilité), on peut supposer que

$$P(E_i) = x \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

donc

$$\begin{aligned} x + x + x + x + x + x &= 1 \\ 6x &= 1 \\ x &= \tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

D'une façon générale, sous l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires de l'espace échantillon Ω, la probabilité d'un événement élémentaire de Ω est

$$\frac{1}{n(\Omega)}$$

Pour obtenir la probabilité de l'événement (non élémentaire)

$$A = \{ 2, 4, 6 \}$$

il suffit de considérer

$$\begin{aligned} A &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \\ P(A) &= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) \\ &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \\ &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} \\ &= \tfrac{3}{6} \\ &= \frac{n(A)}{n(\Omega)} \end{aligned}$$

D'une façon générale,

> Sous l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires d'un espace échantillon Ω, la probabilité de l'événement $A \subseteq \Omega$ est
>
> $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

exemple 2.3.1

On tire une carte au hasard d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer

a) un coeur?
b) un dix?
c) un coeur et un dix?
d) un coeur ou un dix?

---

choisir un objet au hasard signifie qu'on peut supposer l'équiprobabilité des événements élémentaires de l'espace échantillon

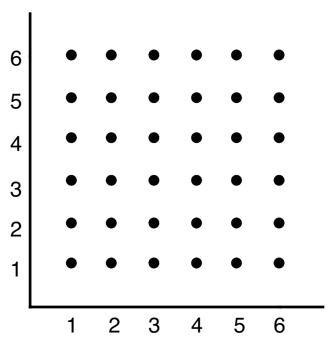
rép: a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{13}$; c) $\frac{1}{52}$; d) $\frac{4}{13}$

exemple 2.3.2

Deux dés non truqués sont lancés. Quelle est la probabilité que

a) la somme des nombres obtenus soit égale à 5?
b) les 2 nombres obtenus soient inférieurs à 5?

On peut représenter Ω ainsi.



rép: a) $\frac{1}{9}$; b) $\frac{4}{9}$

exemple 2.3.3

Sur 120 étudiants, 60 ont étudié le français, 50 ont étudié l'espagnol et 10 ont étudié le français et l'espagnol. Un étudiant est choisi au hasard, quelle est la probabilité qu'il ait étudié

a) le français ou l'espagnol?
b) ni le français et ni l'espagnol?

rép: a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{6}$

exemple 2.3.4

On lance un dé ordinaire 4 fois. Quelle est la probabilité

a) d'obtenir 4 résultats identiques?
b) d'obtenir 4 résultats différents?

rép: a) $\frac{1}{216}$; b) $\frac{5}{18}$

exemple 2.3.5

On lance un sou 6 fois. Calculer la probabilité d'obtenir 3 piles.

rép: $\frac{5}{16}$

exemple 2.3.6 D'un jeu ordinaire de 52 cartes, on tire au hasard

a) une carte, quelle est la probabilité de tirer un coeur?
b) deux cartes, quelle est la probabilité de tirer deux coeurs?

rép: a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{17}$

exemple 2.3.7 Un comité de 4 membres doit être choisi au hasard parmi 7 filles et 10 garçons. Quelle est la probabilité d'avoir autant de filles que de garçons sur le comité?

rép: $\frac{27}{68}$

exemple 2.3.8 Une boîte contient 12 boules: 3 noires, 5 rouges et 4 blanches. On tire simultanément 2 boules au hasard. Quelle est la probabilité pour que

a) les 2 boules soient rouges?
b) les 2 boules soient de la même couleur?
c) au moins une des 2 boules soit noire?

rép: a) $\frac{5}{33}$; b) $\frac{19}{66}$; c) $\frac{5}{11}$

exemple 2.3.9 Un garde-pêche procède à l'inspection d'une prise de 10 poissons en choisissant 2 de ceux-ci au hasard. Il arrête tout pêcheur qui tente de traverser avec des poissons n'ayant pas la longueur réglementaire. Quelle est la probabilité pour qu'un pêcheur ramenant une prise de 10 poissons dont 3 n'ont pas la longueur réglementaire, soit arrêté?

rép: $\frac{8}{15}$

Exercices 2.3

1. Un nombre est choisi au hasard parmi les 25 premiers nombres naturels. Quelle est la probabilité qu'il soit
   a) un carré parfait?
   b) un nombre pair?
   c) un carré parfait et un nombre pair?
   d) un carré parfait ou un nombre pair?

2. Quelle est la probabilité qu'une personne née en 1983 ait son anniversaire de naissance
   a) un 31
   b) au mois de juin?
   c) le 29 février?

l'année 1983 n'était pas une année bissextile, elle comptait donc 365 jours

3. On lance une pièce de monnaie et un dé. Soit A et B deux événements définis par
   A: obtenir pile et un nombre pair
   B: obtenir face et le nombre 1

   Trouver

   a) P(A) c) $P(A \cap B)$ e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
   b) P(B) d) $P(A \cup B)$ f) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

4. Deux dés ordinaires sont lancés.
   a) Quelle est la probabilité que la somme des nombres obtenus soit supérieure à 4?
   b) Soit A: la somme des nombres obtenus est supérieure à 6,
      B: la somme des nombres obtenus est inférieure à 10.

      Trouver $P(A \cup B)$.

5. Le directeur de l'entreprise ACME a les dossiers de 16 000 employés dans ses filières. Voici le dénombrement des dossiers en fonction de l'âge et du sexe des employés.

	Homme	Femme
Moins de 30 ans	1200	1700
30 ans à 40 ans	2600	4200
Plus de 40 ans	4000	2300

   Un dossier est tiré au hasard des filières du directeur du personnel. Quelle est la probabilité que ce dossier soit celui
   a) d'un homme?
   b) d'un employé ayant plus de 40 ans?
   c) d'un homme ayant plus de 40 ans?
   d) d'un employé ayant plus de 40 ans ou d'un homme?

6. On choisit un comité de 3 personnes parmi

JEAN, MICHEL, DENIS, CLAUDE, ROBERT

a) Décrire l'espace échantillon associé à l'expérience aléatoire.
b) Quelle est la probabilité qu'on JEAN soit choisi?
c) Quelle est la probabilité que JEAN ou DENIS soit choisi?
d) Quelle est la probabilité que ni JEAN, ni DENIS soit choisi?

7. Une enquête effectuée auprès de 100 conducteurs a révélé que l'année dernière

10 conducteurs ont eu un accident,
6 conducteurs ont eu un accident et des contraventions,
74 conducteurs n'ont pas eu d'accident, ni de contraventions,

Une personne est choisie au hasard parmi ces conducteurs. Quelle est la probabilité pour que l'année dernière cette personne ait

a) eu un accident?
b) eu un accident et reçu une contravention?
c) eu ni accident et ni contravention?
d) eu un accident sans avoir reçu une contravention?
e) eu un accident ou reçu une contravention?
f) reçu une contravention?

8. Une vieille dame distraite écrit 3 lettres et adresse 3 enveloppes. Elle cachette ensuite chacune des lettres sans porter attention au nom du destinataire sur l'enveloppe. Calculer la probabilité

a) qu'une lettre ou plus soit adressée à la bonne personne,
b) qu'exactement une lettre soit adressée à la bonne personne,
c) qu'exactement une lettre soit adressée à la mauvaise personne.

(Décrire d'abord l'espace échantillon associé à l'expérience aléatoire.)

9. Deux dés ordinaires sont lancés. Soient A, B et C trois événements définis par

A: le premier dé montre un nombre impair,
B: le deuxième dé montre un nombre plus grand que 2,
C: la somme des nombres obtenus est paire.

a) Trouver $P(A \cup B)$
b) Trouver $P(A \cup B \cup C)$.

10. En vue de discuter d'une association possible, 4 hommes d'affaires de Toronto se donnent rendez-vous à l'hôtel Holiday Inn de Montréal. Malheureusement, ils ignorent qu'il y a 4 hôtels de ce nom à Montréal. Quelle est la probabilité pour qu'ils se rendent tous à des hôtels différents?

11. Vous regardez la licence de la voiture qui vous précède sur la route. Si on accepte que les licences ont tous 5 chiffres et ne débutent pas par 0 alors calculer la probabilité

    a) que les 5 chiffres soient identiques,
    b) que les 5 chiffres soient différents.

12. Dix étudiants dont PIERRE, JEAN et JACQUES se présentent pour faire partie du syndicat étudiant. Le syndicat comprend 3 membres. Si le choix des étudiants se fait au hasard, quelle est la probabilité

    a) de voir PIERRE et JEAN sur le comité?
    b) que JACQUES ne soit pas sur le comité?
    c) qu'aucun des 3 soit sur le comité?

13. Un sac contient 3 boules noires, 5 boules grises et 2 boules rouges. On tire simultanément de ce sac 3 boules au hasard . Quelle est la probabilité que

    a) les 3 boules soient de couleurs différentes?
    b) 2 boules soient rouges et l'autre grise?
    c) 2 boules soient rouges?
    d) au moins une des 3 boules soit rouge?

14. On forme un groupe de recherche à partir de 5 ingénieurs, 3 économistes et 4 mathématiciens. Ce groupe comprend 4 personnes choisies au hasard. Quelle est la probabilité pour que le groupe soit constitué

    a) de 3 ingénieurs et 1 mathématicien?
    b) d'aucun économiste?
    c) d'au moins un mathématicien?

15. Quatre Anglais et trois Français se présentent à un dîner. Les 7 personnes sont placées côte à côte au hasard. Quelle est la probabilité de voir

    a) les 4 Anglais ensemble?
    b) aucun Français voisin?
    c) Anglais et Français en alternance?

16. On choisit 2 personnes parmi 6 couples mariés. Quelle est la probabilité que les 2 personnes soient

    a) du même couple?
    b) de sexe différent?

17. Un groupe de 6 hommes et de 4 femmes désire se partager 3 prix gagnés au nom du groupe. Pour cela, ils décident de placer leur nom sur un bout de papier et de choisir simultanément 3 bouts de papier au hasard. Quelle est la probabilité que 3 personnes du même sexe remportent les prix?

18. Pour éviter de se faire arrêter à la douane, un voyageur a placé 6 comprimés de narcotiques dans une bouteille contenant 9 pilules de vitamines qui sont semblables en apparence. L'officier des douanes choisit 3 de ces 15 pilules au hasard pour fin d'analyse. Quelle est la probabilité pour que notre voyageur soit arrêté pour possession illégale de narcotiques?

19. Un professeur demande 24 travaux durant la session. Il en corrige 8 au hasard. Vous en avez 1 de mauvais. Quelle est la probabilité qu'il soit choisi?

20. Supposons que le professeur d'histoire annonce que l'examen final comportera 5 questions choisies parmi une liste de 10 questions soumises une semaine avant l'examen. Pour qu'un étudiant réussisse l'examen, il doit être en mesure de répondre à au moins 4 des 5 questions choisies à l'examen. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant n'ayant préparé que 8 questions puisse passer son examen final?

21. On désire former des mots de 5 lettres avec les lettres du mot BICHROMATE. Quelle est la probabilité de former un mot de 5 lettres

    a) commençant par un C?
    b) comprenant exactement 2 consonnes?
    c) commençant par un C et comprenant exactement 2 consonnes?
    d) commençant par un C ou comprenant exactement 2 consonnes?

22. À partir des lettres du mot COCORICO, quelle est la probabilité de former au hasard un mot de 8 lettres

    a) commençant par un C?
    b) finissant par une voyelle?
    c) dont les consonnes sont toujours voisines?

23. Quel est l'événement le plus probable?

    Obtenir 5 piles en 7 lancers d'un sou. ou
    Obtenir 6 piles en 9 lancers d'un sou.

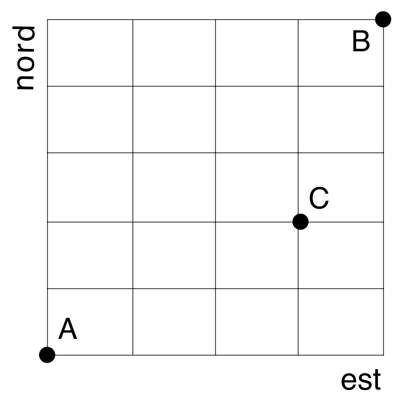
24. À la loterie BANCO, on vous propose pour une mise de 1 $ de choisir 7 numéros entre 1 et 70 (inclusivement). On procède par la suite au tirage de 20 numéros gagnants. Si parmi vos 7 numéros choisis, figurent

- 5 numéros gagnants alors vous remportez: 5 $
- 6 numéros gagnants alors vous remportez: 50 $
- 7 numéros gagnants alors vous remportez: 5 000 $

Quelle est la probabilité que pour une mise de 1 $, vous remportiez à cette loterie

a) 5 $?
b) 50 $?
c) 5000 $?

25. Jos doit se rendre d'un point A à un point B situé à 4 rues à l'est de A et 5 avenues au nord de A. Une taverne est située en un point C (voir le schéma).



Jos est incapable de passer devant une taverne sans s'arrêter et boire un coup. Quelle est la probabilité que notre homme soit sobre à son arrivée au point B?

(On suppose que Jos n'a jamais parcouru ce quartier et qu'il marche toujours vers l'est ou vers le nord).

Réponses aux exercices 2.3

1.	a)	$\frac{1}{5}$	c)	$\frac{2}{25}$		
	b)	$\frac{12}{25}$	d)	$\frac{3}{5}$		
2.	a)	$\frac{7}{365}$	c)	0		
	b)	$\frac{6}{73}$				
3.	a)	$\frac{1}{4}$	c)	0	e)	1
	b)	$\frac{1}{12}$	d)	$\frac{1}{3}$	f)	$\frac{2}{3}$
4.	a)	$\frac{5}{6}$	b)	1		
5.	a)	$\frac{39}{80}$	c)	$\frac{1}{4}$		
	b)	$\frac{63}{160}$	d)	$\frac{101}{160}$		
6.	a)	{ JMD, JMC, JMR, JCD, JDR, JCR, MDC, MDR, MCR, DCR }				
	b)	$\frac{3}{5}$	c)	$\frac{9}{10}$	d)	$\frac{1}{10}$
7.	a)	0,1	c)	0,74	e)	0,26
	b)	0,06	d)	0,04	f)	0,22
8.	a)	$\frac{2}{3}$	b)	$\frac{1}{2}$	c)	0
9.	a)	$\frac{5}{6}$	b)	$\frac{11}{12}$		
10.		$\frac{3}{32}$				
11.	a)	0,0001	b)	0,3024		
12.	a)	$\frac{1}{15}$	b)	$\frac{7}{10}$	c)	$\frac{7}{24}$
13.	a)	$\frac{1}{4}$	c)	$\frac{1}{15}$		
	b)	$\frac{1}{24}$	d)	$\frac{8}{15}$		
14.	a)	$\frac{8}{99}$	b)	$\frac{14}{55}$	c)	$\frac{85}{99}$

15.	a) $\frac{4}{35}$	b) $\frac{2}{7}$	c) $\frac{1}{35}$
16.	a) $\frac{1}{11}$	b) $\frac{6}{11}$	
17.	$\frac{1}{5}$		
18.	$\frac{53}{65}$		
19.	$\frac{1}{3}$		
20.	$\frac{7}{9}$		
21.	a) $\frac{1}{10}$	c) $\frac{1}{63}$	
	b) $\frac{5}{21}$	d) $\frac{203}{630}$	
22.	a) $\frac{3}{8}$	b) $\frac{1}{2}$	c) $\frac{1}{14}$
23.	les deux événements sont équiprobables (0,1641)		
24.	a) 0,0158	b) 0,0016	c) 0,00006
25.	$\frac{43}{63}$		

2.4 Probabilité conditionnelle

Jusqu'ici, l'évaluation de la probabilité d'un événement a été faite par rapport à l'espace échantillon. Il arrive fréquemment, pour ainsi dire presque toujours, que tenant compte d'une information nouvelle, la probabilité d'un événement est modifiée. Dans un tel cas, le calcul de la probabilité de l'événement sera fait par rapport à un espace échantillon réduit.

exemple 2.4.1 Un vendeur de motoneige a classifié ses ventes de l'année courante d'après la table suivante.

	Comptant	À crédit
Neuve	10	23
Usagée	40	57

Calculer la probabilité qu'un acheteur choisi au hasard dans les dossiers du vendeur soit

a) un acheteur d'une motoneige neuve,

b) un acheteur d'une motoneige à crédit,

c) un acheteur d'une motoneige neuve étant donné qu'il est un acheteur d'une motoneige à crédit,

c) un acheteur d'une motoneige à crédit s'il est un acheteur d'une motoneige neuve.

rép: a) $\frac{33}{130}$; b) $\frac{8}{13}$; c) $\frac{23}{80}$; d) $\frac{23}{33}$

exemple 2.4.2 On lance une paire de dés.

a) Trouver la probabilité d'obtenir un 2 sur au moins un des dés.

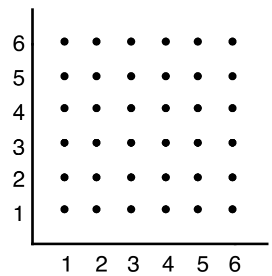
b) Trouver la probabilité d'obtenir une somme plus petite ou égale à 6 sur les dés.

c) Si la somme obtenue sur les dés est plus petite ou égale 6 alors trouver la probabilité d'obtenir un 2 sur au moins un des dés.

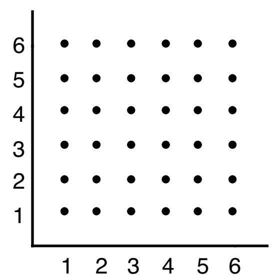
d) Trouver la probabilité que la somme obtenue sur les dés soit plus petite ou égale à 6 étant donné qu'un 2 apparaît sur au moins un des dés.

---

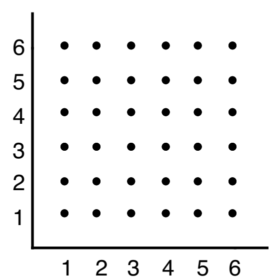
a)



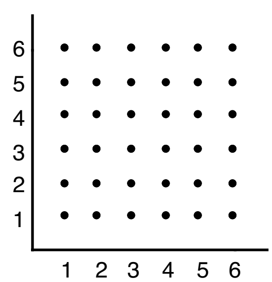
b)



c)



d)



rép: a) $\frac{11}{36}$; b) $\frac{5}{12}$; c) $\frac{7}{15}$; d) $\frac{7}{11}$

exemple 2.4.3 Un comité de 3 personnes est formé au hasard parmi 5 hommes dont M. Tremblay et 3 femmes. Calculer la probabilité que le comité contienne

a) 3 hommes,

b) 3 hommes si M. Tremblay fait partie du comité,

c) M. Tremblay,

d) M. Tremblay si 3 hommes font partie du comité.

---

rép: a) $\frac{5}{28}$; b) $\frac{2}{7}$; c) $\frac{3}{8}$; d) $\frac{3}{5}$

Soit A et B deux événements quelconques de Ω . Définissons $P(A|B)$ comme la probabilité conditionnelle de A sachant que B s'est réalisé. Sous l'hypothèse d'équiprobabilité des élémentaires de Ω,

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \qquad \text{si } B \neq \varnothing$$

$$= \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

D'une façon générale,

définition 2.4.1

probabilité conditionnelle

Soit $A, B \subseteq \Omega$.

La probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B s'est réalisé est donnée par

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{si } B \neq \varnothing$$

tandis que la probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A s'est réalisé correspond à

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{si } A \neq \varnothing$$

La probabilité conditionnelle telle que définie est une fonction de probabilité puisque pour $A, B, C \subseteq \Omega$ et $C \neq \varnothing$ on a

a) $P(A|C) \geq 0$

b) $P(\Omega|C) = 1$

c) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$ si $A \cap B = \varnothing$

Les règles précédentes s'appliquent également lorsque les probabilités sont conditionnelles.

d) $P(\overline{A} \mid C) = 1 - P(A \mid C)$

e) $P(\varnothing \mid C) = 0$

f) si $A \subseteq B$ alors $P(A \mid C) \leq P(B \mid C)$

g) $0 \leq P(A \mid C) \leq 1$

h) $P(A \cap \overline{B} \mid C) = P(A \mid C) - P(A \cap B \mid C)$

i) $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$

j) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ forment une partition de Ω

alors $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \mid C) = 1$

exemple 2.4.4 Soit A et B deux événements tels que

$$P(A) = \frac{5}{16} \qquad P(B) = \frac{9}{16} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

Trouver

a) $P(A \mid B)$

b) $P(\overline{A} \mid B)$

c) $P(B \mid \overline{A})$

d) $P(B \mid A \cup B)$

e) $P(B \mid B)$

f) $P(A \cap B \mid B)$

g) $P(A \cup B \mid B)$

rép: a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{7}{9}$; c) $\frac{7}{11}$; d) $\frac{3}{4}$; e) 1 ; f) $\frac{2}{9}$; g) 1

Exercices 2.4

1. Une agence de personnel se spécialise dans le placement de secrétaires médicales. L'agence décide de classer ses candidates selon leur qualité première et selon leurs années d'expérience. Pour un groupe de 100 secrétaires médicales de cette agence, on a obtenu les résultats suivants.

	Organisation	Débrouillardise	Entregent
Aucune expérience	8	7	5
Moins d'un an	15	10	10
Entre 1 et 3 ans	5	8	2
Plus de 3 ans	12	10	8

Quelle est la probabilité qu'une secrétaire choisie au hasard

a) ait la débrouillardise pour qualité première?
b) ait l'entregent pour qualité première si elle possède entre 1 et 3 ans d'expérience?
c) ait l'organisation pour qualité première si elle possède plus de 3 ans d'expérience?
d) ait plus de 3 ans d'expérience?
e) ait moins d'un an d'expérience si elle a l'organisation pour qualité première?

2. On lance une paire de dés. Si les 2 nombres obtenus sont différents, trouver la probabilité que

a) la somme soit égale à 6,
b) le nombre 1 apparaisse,
c) la somme soit plus petite ou égale à 4.

3. On lance une paire de dés. Trouver la probabilité que la somme soit plus grande ou égale à 10 si

a) un 5 apparaît sur le premier dé,
b) un 5 apparaît sur au moins un dé.

4. On lance une pièce de monnaie 3 fois. Soit les événements

A: obtenir 2 faces,
B: obtenir face au premier lancer.

a) Décrire en extension: Ω, A, B et $A \cap B$.

b) Calculer $P(A \mid B)$.

c) Calculer $P(B \mid A)$.

5. Le conseil municipal d'une ville est constitué du maire et de 11 échevins: 7 hommes dont 3 sont bilingues et 4 femmes dont 2 sont bilingues. Le maire choisit au hasard 2 échevins pour le représenter. Sachant que les 2 personnes

   a) sont des hommes, calculer la probabilité qu'ils soient bilingues
   b) ne sont pas bilingues, calculer la probabilité que le maire ait choisi un homme et une femme.

6. Soit un jeu ordinaire de 52 cartes. On choisit au hasard 3 cartes simultanément.

   a) Si ces cartes sont des coeurs quelle est la probabilité d'obtenir 3 figures (valet, dame, roi ou as)?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 coeurs si ces cartes sont des figures?

7. Soit les lettres du mot INCLURE. Quel est la probabilité qu'en choisissant des lettres au hasard, on réussisse à former

   a) un mot de 3 lettres contenant un U au milieu étant donné que le mot contient 2 voyelles?
   b) un mot de 7 lettres ayant les 4 consonnes ensemble étant donné que le mot se termine par la lettre E?

8. Vous jouez au poker avec un ami. Étant donné que votre main contient

   a) 5 coeurs, calculer la probabilité que la main de votre ami contienne 5 cartes de la même couleur que vous,
   b) 3 as et 2 dix, calculer la probabilité que la main de votre ami contienne 4 cartes de même dénomination.

9. Soit A et B deux événements quelconques de Ω , tels que

$$P(A) = \frac{5}{8} \qquad P(B) = \frac{1}{2} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

   Trouver

   a) $P(A \cup B)$
   b) $P(\overline{A})$ et $P(\overline{B})$
   c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$
   d) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
   e) $P(\overline{A} \mid \overline{B})$
   f) $P(\overline{A} \mid B)$

10. Soit A et B deux événements quelconques de Ω , tels que

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Trouver

a) $P(A \mid \overline{B})$
b) $P(\overline{B} \mid A)$
c) $P(\overline{A} \mid \overline{B})$
d) $P(B \mid A \cap B)$
e) $P(A \mid A \cup B)$

11. Soit A et B deux événements quelconques de Ω , tels que

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B \mid A) = \frac{1}{3} \quad P(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{4}$$

Trouver

a) $P(A \cap B)$
b) $P(B)$
c) $P(A \mid B)$
d) $P(A \mid \overline{B})$

12. Calculer $P(B \mid A)$ sachant que

a) $A \subseteq B$
b) A et B sont mutuellement exclusifs

13. La probabilité pour qu'un client visitant un rayon de télévision et de chaînes stéréophoniques achète une télé-couleur est de 0,23 et celle qu'il achète une chaîne-stéréo est de 0,26. Par ailleurs, la probabilité pour qu'il achète une télé-couleur et une chaîne-stéréo est de 0,14. Quelle est la probabilité pour qu'il achète une

a) télé-couleur sachant qu'il a acheté une chaîne-stéréo?
b) télé-couleur sachant qu'il n'a pas acheté une chaîne-stéréo?
c) chaîne-stéréo sachant qu'il a acheté une télé-couleur ?
d) chaîne-stéréo sachant qu'il n'a pas acheté une télé-couleur?

14. Dans un collège, 25% des étudiants ont un échec en maths, 15% des étudiants ont un échec en chimie et 10% ont un échec dans les 2 matières. Un étudiant est choisi au hasard.

a) S'il a échoué sa chimie, quelle est la probabilité qu'il ait aussi échoué ses maths?
b) S'il a échoué ses maths, quelle est la probabilité qu'il ait aussi échoué sa chimie?
c) S'il n'a pas échoué ses maths, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas échoué sa chimie?
d) S'il a échoué au moins une des deux matières, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas échoué sa chimie?

15. Supposons que 75% d'une population est vacciné contre une certaine maladie. La probabilité d'attraper cette maladie est de 0,1 si on est vacciné et de 0,8 si on n'est pas vacciné. Une personne est choisie au hasard de la population. Quelle est la probabilité pour qu'elle

    a) soit vaccinée et ait la maladie?
    b) ait la maladie?
    c) soit vaccinée si elle a la maladie?
    d) soit vaccinée si elle n'a pas la maladie?
    e) ne soit pas vaccinée si elle a la maladie?
    f) ne soit pas vaccinée si elle n'a pas la maladie?

Réponses aux exercices 2.4

1. a) $\frac{7}{20}$ c) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{8}$
   b) $\frac{2}{15}$ d) $\frac{3}{10}$

2. a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{15}$

3. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{11}$

4. a) $\Omega = \{ PPP , PPF , PFP , PFF, FPP , FFP , FPF , FFF \}$
   $A = \{ PFF , FFP , FPF \}$
   $B = \{ FPP , FFP , FPF , FFF \}$
   $A \cap B = \{ FFP , FPF \}$
   b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$

5. a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{8}{15}$

6. a) $\frac{2}{143}$ b) $\frac{1}{140}$

7. a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{1}{5}$

8. a) $\frac{56}{1\,533\,939}$ b) $\frac{1}{3243}$

9. a) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{4}$
   b) $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}$

10. a) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{6}{7}$
    b) $\frac{1}{2}$ d) 1

11. a) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{4}{7}$
    b) $\frac{7}{24}$ d) $\frac{8}{17}$

12. a) 1 b) 0

13. a) $\frac{7}{13}$ c) $\frac{14}{23}$
    b) $\frac{9}{74}$ d) $\frac{12}{77}$

14.	a) $\frac{2}{3}$	c) $\frac{14}{15}$	
	b) $\frac{2}{5}$	d) $\frac{1}{2}$	
15.	a) $\frac{3}{40}$	c) $\frac{3}{11}$	e) $\frac{8}{11}$
	b) $\frac{11}{40}$	d) $\frac{27}{29}$	f) $\frac{2}{29}$

2.5 Loi de multiplication et loi de Bayes

Probabilité d'une suite d'événements

En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle

$$P(A\,|\,B) \;=\; \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{si } B \neq \varnothing$$

et

$$P(B\,|\,A) \;=\; \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{si } A \neq \varnothing$$

On obtient la *loi de multiplication* par une simple transformation des formules précédentes.

proposition 2.5.1

loi de multiplication de 2 événements

Soit A et B deux événements quelconques de Ω .

$$P(A \cap B) \;=\; P(A)\, P(B\,|\,A) \qquad \text{si} \quad A \neq \varnothing$$
$$P(A \cap B) \;=\; P(B)\, P(A\,|\,B) \qquad \text{si} \quad B \neq \varnothing$$

Dépendant des probabilités connues,

- on peut utiliser l'une ou l'autre des équations du haut pour calculer $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) \;=\; P(A)\, P(B\,|\,A) \qquad \text{si} \quad A \neq \varnothing$$
$$P(A \cap B) \;=\; P(B)\, P(A\,|\,B) \qquad \text{si} \quad B \neq \varnothing$$

- on peut calculer $P(A \cap B)$ en utilisant la proposition 2.2.5.

$$\begin{aligned} & P(A \cup B) &&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad \forall\; A, B \subseteq \Omega \\ \Rightarrow\quad & P(A \cap B) &&= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \end{aligned}$$

Lorsque les événements élémentaires de Ω sont équiprobables, on peut aussi obtenir $P(A \cap B)$ en utilisant la formule

$$P(A \cap B) \;=\; \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}$$

exemple 2.5.1

Deux cartes sont tirés au hasard l'une après l'autre et sans remise d'une jeu ordinaire de 52 cartes. Quelle est la probabilité que les 2 cartes tirées soient en coeur?

rép: $\frac{1}{17}$

On peut généraliser à plusieurs événements la loi de multiplication. Pour calculer la probabilité d'une suite de 3 événements, on procède de la même façon.

loi de multiplication de 3 événements

Soit A, B et C trois événements quelconques de Ω .

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B \mid A)\, P(C \mid A \cap B) \quad \text{si } A ,\, A \cap B \neq \varnothing$$

exemple 2.5.2

Trois articles sont tirés au hasard l'un après l'autre et sans remise d'un lot de 12 articles dont 4 sont défectueux. Quelle est la probabilité que les 3 articles ne soient pas défectueux?

rép: $\frac{14}{55}$

loi de multiplication de k événements

Soit $A_1, A_2, A_3, \ldots , A_k$ k événements quelconques de Ω .

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) =$$

$$P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ \ldots\ P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

si $A_1 ,\ A_1 \cap A_2 ,\ A_1 \cap A_2 \cap A_3 ,\ \ldots\ \neq \varnothing$

exemple 2.5.3

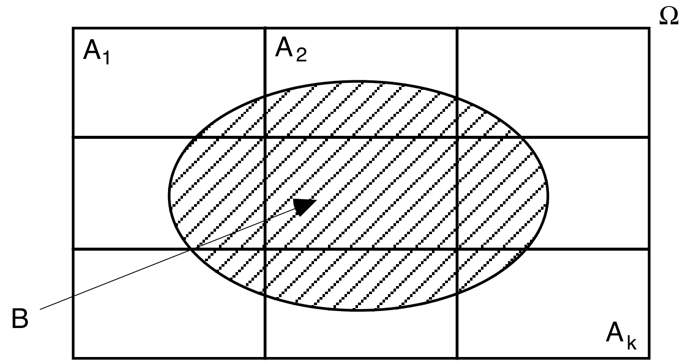
On tire successivement et sans remise des cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer le premier pique

a) au deuxième tirage?
b) au quatrième tirage?
c) avant le troisième tirage?

rép: a) 0,19 ; b) 0,11 ; c) 0,44

Probabilité d'un événement conditionné par d'autres et probabilité à posteriori (loi de Bayes)

Soit $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \neq \emptyset$, une partition de Ω et B est un événement quelconque de Ω.



Puisque

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \ldots \cup (A_k \cap B)$$

et $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, $A_3 \cap B$, ... , $A_k \cap B$ sont des événements mutuellement exclusifs, on a

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \ldots + P(A_k \cap B)$$

En appliquant la loi de multiplication on obtient

$$P(B) = P(A_1)\, P(B \mid A_1) + P(A_2)\, P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_k)\, P(B \mid A_k)$$

proposition 2.5.2
probabilité d'un événement conditionné par d'autres

Soit $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \neq \emptyset$, une partition de Ω et B un événement quelconque de Ω.

$$P(B) = P(A_1)\, P(B \mid A_1) + P(A_2)\, P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_k)\, P(B \mid A_k)$$

De plus, pour $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

par la proposition 2.5.1

$$= \frac{P(A_i)\, P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

par la proposition 2.5.2

$$= \frac{P(A_i)\, P(B \mid A_i)}{P(A_1)\, P(B \mid A_1) + P(A_2)\, P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_k)\, P(B \mid A_k)}$$

proposition 2.5.3
probabilité à posteriori (loi de Bayes)

Soit $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \neq \emptyset$, une partition de Ω et B un événement quelconque de Ω. Pour $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)\, P(B \mid A_i)}{P(A_1)\, P(B \mid A_1) + P(A_2)\, P(B \mid A_2) + \ldots + P(A_k)\, P(B \mid A_k)}$$

exemple 2.5.4

Un entrepreneur a déposé des soumissions séparées pour la construction d'un viaduc et d'un pont sur une autoroute. Son expérience dans le domaine des soumissions lui fait estimer à 60 % ses chances d'obtenir le contrat du viaduc. Si ce premier contrat lui est alloué alors il évalue ses chances à 80 % d'obtenir le contrat du pont. Si le contrat du viaduc lui échappe, il estime avoir quand même 30 % de chance de se voir allouer le contrat du pont. Quelle est la probabilité qu'il

a) n'ait pas le contrat du pont s'il a eu celui du viaduc?
b) n'ait pas le contrat du pont s'il n'a pas eu celui du viaduc?
c) se voit allouer les 2 contrats?
d) se voit allouer aucun contrat?
e) se voit allouer au moins un contrat?
f) se voit allouer le contrat du pont?

rép: a) 0,2 ; b) 0,7 ; c) 0,48 ; d) 0,28 ; e) 0,72 ; f) 0,6

exemple 2.5.5

M. Labrosse n'utilise que des crayons bleus ou des crayons rouges. Dans un tiroir de son bureau, il garde 2 crayons bleus et 1 crayon rouge tandis que dans un autre tiroir de ce même bureau se trouve 1 crayon de chaque couleur. Sans réfléchir, il ouvre un tiroir et choisit un crayon au hasard. Quelle est la probabilité que le crayon

a) provienne du second tiroir et soit bleu?
b) soit rouge?

rép: a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{5}{12}$

exemple 2.5.6

M. Lafleur part en vacances pour 2 semaines. Il demande à son voisin, M. Larivière, d'arroser ses roses en son absence. Il faut avouer que les roses de M. Lafleur sont en piètre condition. M. Larivière est très distrait et la probabilité qu'il oublie d'arroser les roses de son voisin durant son absence est de 2/3. S'il les arrose, la probabilité qu'elles survivent est de 1/2. S'il oublie de les arroser, cette probabilité baisse à 1/4. À son retour, quelle est la probabilité

a) que M. Lafleur trouve ses roses sans vie?
b) que M. Larivière n'ait pas arrosé les roses de son voisin si M. Lafleur retrouve ses roses sans vie?

rép: a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{3}{4}$

Exercices 2.5

1. On tire 2 cartes l'une après l'autre et sans remise d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Quelle est la probabilité
   a) que la première carte tirée soit un as?
   b) que les 2 cartes tirées soient des as?

2. Un sac contient 17 boules numérotées de 1 à 17 inclusivement. Une boule est tirée au hasard. Un second tirage est ensuite effectué parmi les boules qui restent. Quelle est la probabilité
   a) que le premier nombre tiré soit pair?
   b) que le second nombre tiré soit impair si le premier était pair?
   c) que le premier nombre tiré soit pair et le second impair?

3. Un homme a 6 clefs dont une seule peut ouvrir un coffre. S'il essaie les clefs une à la fois en les choisissant au hasard et sans remise, quelle est la probabilité qu'il débarre le coffre
   a) au premier essai?
   b) au deuxième essai?
   c) au troisième essai?
   d) au sixième essai?

4. Un sac contient 4 jetons jaunes et 1 jeton bleu. On tire au hasard un jeton du sac. Si celui-ci n'est pas bleu on tire à nouveau parmi les jetons qui restent. On continue ainsi jusqu'à ce que le jeton bleu soit tiré. Quelle est la probabilité que le jeton bleu soit tiré au
   a) deuxième tirage?
   b) cinquième tirage?
   c) avant le quatrième tirage?

5. Un marchand de livres a observé que si une femme entre dans son magasin, la probabilité qu'elle sorte avec un achat est de 0,6 tandis si un homme entre dans son magasin, la probabilité qu'il sorte avec un achat est de 0,3. Sachant que la probabilité qu'un homme entre dans son magasin est de 0,7, quelle est la probabilité que la prochaine personne qui entrera dans le magasin
   a) n'achète pas si c'est un homme?
   b) est un homme et qu'il sorte avec un achat?
   c) est une femme et qu'elle sorte sans acheter?
   d) sorte avec un achat?

6. Un médecin sait d'expérience que lorsqu'une femme se présente à son bureau, il y a une probabilité de 0,8 pour que la consultation dure plus de 15 minutes. Lorsque c'est un homme, cette probabilité diminue à 0,3. Il reçoit généralement 3 femmes pour 2 hommes. Quelle est la probabilité pour que la prochaine personne qui frappera à sa porte
   a) ne reste pas plus de 15 minutes si c'est une femme?
   b) soit une femme et ne reste pas plus de 15 minutes?
   c) soit un homme et reste plus de 15 minutes?
   d) reste plus de 15 minutes?

7. À partir d'un groupe de 6 enfants, 4 garçons et 2 filles, on choisit au hasard un enfant et ensuite, un autre enfant est choisi au hasard parmi ceux qui restent. Quelle est la probabilité
   a) que le second enfant choisi soit une fille si le premier était une fille?
   b) que les 2 enfants choisis soient des filles?
   c) qu'au moins une fille soit choisie?
   d) que le second enfant choisi soit une fille?

8. Une urne contient 3 billes noires et 2 billes blanches. On tire au hasard une bille de cette urne et ensuite parmi celles qui restent, on en tire une deuxième. Quelle est la probabilité
   a) que la première boule tirée soit blanche?
   b) que la seconde boule tirée soit blanche si la première était blanche?
   c) que les 2 boules tirées soient blanches?
   d) que l'on tire au moins une blanche lors des 2 tirages?
   e) que la seconde bille soit blanche?

9. Dans une ville, 55 % des travailleurs ont un revenu supérieur à 40 000 \$. Si un individu de cette ville possède un revenu supérieur à 40 000 \$, la probabilité qu'il ait fait des études secondaires est de 0,8. S'il ne possède pas un revenu supérieur à 40 000 \$, la probabilité qu'il ait fait des études secondaires est de seulement 0,2. Déterminer la probabilité qu'un travailleur choisi au hasard dans cette ville ait fait des études secondaires.

10. Les 10 000 habitants d'une ville appartiennent à 2 groupes ethniques A et B comprenant respectivement 6000 et 4000 individus. Dans le groupe A, la proportion de criminels est de 1 % et dans le groupe B, 3 %. Un habitant de cette ville est choisi au hasard, quelle est la probabilité
    a) qu'il appartienne au groupe B et qu'il possède un dossier judiciaire?
    b) qu'il possède un dossier judiciaire?
    c) qu'il appartienne au groupe B s'il possède un dossier judiciaire?

11. Les professeurs de MATHS 101 savent par expérience que les étudiants qui font régulièrement leurs problèmes ont une probabilité de 0,95 de réussir. Les autres qui ne les font presque jamais, ont seulement 30 % de chance de réussir. On a noté que 40 % des étudiants de MATHS 101 font régulièrement leurs problèmes. Dans ces conditions, quelle est la probabilité qu'un étudiant choisi au hasard parmi les étudiants de MATHS 101

    a) ait réussi le cours?
    b) n'ait pas fait ses problèmes s'il a réussi son cours?

12. L'annonce d'élections prochaines a obligé une étude d'ingénieurs à suspendre l'analyse d'un projet dont elle aurait eu charge. Si le gouvernement actuel est réélu, il y a 80 % de chances que leur projet soit accepté. Si un nouveau gouvernement prend place les chances que leur projet soit accepté tomberaient à 30 %. Un récent sondage prédit une réélection du gouvernement avec une probabilité de 0,7. Dans ces circonstances, quelle est la probabilité

    a) que le projet soit accepté?
    b) que le gouvernement actuel n'ait pas été réélu si le projet n'a pas été accepté?

13. Dans une petite ville, il est connu qu'une personne sur 4 laisse ses clefs dans la voiture. Le chef de police estime que 5 % des voitures ayant les clefs à l'intérieur se font voler. Cette probabilité diminue à 1 % lorsque les clefs ne sont pas à l'intérieur. Quelle est la probabilité pour qu'une voiture qui a été volée, ait eu les clefs à l'intérieur?

14. Anne, Josée, Manon et Louise lavent la vaisselle de la famille. Louise est l'aînée, elle convient de laver la vaisselle dans 40 % du temps. Les autres conviennent de se répartir également la tâche. La probabilité qu'une assiette soit brisée lorsque Louise lave la vaisselle est de 0,01; pour Anne, Josée et Manon, elle est respectivement de 0,03, 0,02 et 0,01. Les parents ne savent pas qui lave présentement la vaisselle mais entendent un bruit de vaisselle cassée. Quelle est la probabilité que ce soit Louise qui lave présentement la vaisselle?

15. Le trou # 4 du terrain de golf de St-Profond est un par 3 de 135 verges. 90 % des professionnels peuvent atteindre le vert du premier coup, 60 % des joueurs réguliers réussissent l'exploit contre seulement 30 % des joueurs occasionnels. Ce trou a la particularité que le golfeur ne peut voir le vert à cause d'une dénivellation du sol. Supposons que vous avez terminé le trou # 4 et qu'une balle tombe sur le vert, quelle est la probabilité que le golfeur qui a frappé cette balle soit un joueur occasionnel? On considère que la clientèle de ce terrain de golf est de 10 % professionnelle, 40 % régulière et 50 % occasionnelle.

16. Un chercheur médical étudie 3 drogues A, B et C, identiques en apparence. Quand ces drogues sont administrées à de petits cobayes, la probabilité que le cobaye devienne empoisonné est de 1/4 pour la drogue A, 1/8 pour la drogue B et 1/3 pour la drogue C. Il y a 2 bouteilles de drogue A, 3 bouteilles de drogue B et 1 bouteille de drogue C. Le chercheur, distrait comme tout savant, prend une bouteille et oublie d'en noter la sorte. Un cobaye reçoit une injection de cette drogue et ne s'empoisonne pas. Quelle est la probabilité que la drogue choisie et administrée était la drogue B?

17. Un étudiant répond à un examen à choix multiples dans lequel il y a 5 choix possibles de réponses pour chaque question avec exactement une seule bonne réponse. Si l'étudiant connaît la réponse, évidemment il choisit la bonne réponse. Sinon, il choisit une réponse au hasard. Supposons que l'étudiant connaît la réponse de 70 % des questions. Quelle est la probabilité

    a) qu'il obtienne la bonne réponse à une certaine question?
    b) que s'il a la bonne réponse à une certaine question, qu'il connaissait cette réponse?

18. Il est établi que 20 % des patients d'une certaine opération à coeur ouvert meurent sur la table d'opération. De ceux qui survivent, 10 % meurent de complications dues à cette opération. Quelle est la probabilité que le prochain patient meure de cette opération?

19. Lors d'un party, on organise un petit jeu. Quinze jeunes filles déposent un soulier à l'intérieur d'un cercle. Leurs amis choisissent au hasard un soulier . Quelle est la probabilité pour que Gilbert choisisse le soulier de Ginette s'il est le dernier à choisir?

20. La probabilité qu'un contrat de construction soit terminé dans les délais prévus est de 17/20, la probabilité qu'il n'y ait pas de grève sur le chantier est de 3/4 et la probabilité que le contrat soit terminé dans les délais prévus s'il n'y a pas de grève est de 14/15. Trouver la probabilité que le contrat sera terminé dans les délais prévus s'il y a une grève.

21. Jos et Arthur ont l'habitude de jouer aux dés. Parfois ils jouent au jeu A qui nécessite 2 dés et parfois ils jouent au jeu B qui nécessite 1 seul dé. Le jeu B est utilisé 2 fois plus souvent que le jeu A. Dans les 2 cas, les joueurs doivent lancer le ou les dés. S'ils jouent au jeu A, ils considèrent la somme des valeurs sur les dés. S'ils jouent au jeu B, ils considèrent la valeur sur le dé. À un moment donné on entend Jos qui dit à Arthur qu'il a obtenu 6. Quelle est la probabilité qu'ils jouent au jeu A?

22. Un technicien en électronique répare présentement la télévision de l'un de ses clients. Il a dans ses poches 3 transistors. Il ne le sait pas mais un des transistors est défectueux. Avant d'arriver chez son client, il prend 2 des transistors qui se trouvent dans sa poche et les dépose dans une boîte qui en contient déjà 3 autres non défectueux. Arrivé chez le client, il installe un de ces transistors. Quelle est la probabilité que le transistor défectueux
    a) soit installé?
    b) soit dans la boîte?

23. Un sac contient 10 boules dont 2 sont blanches. Un second sac en contient 5 dont une est blanche. Un dernier sac en contient 3 dont aucune est blanche. On tire d'abord 4 boules du premier sac et on les dépose dans le second sac. On tire ensuite 3 boules du second sac pour les déposer dans le dernier sac. Quelle est la probabilité que les 3 boules blanches
    a) soient dans le dernier sac?
    b) soient dans le second sac?

Réponses aux exercices 2.5

1. a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{1}{221}$

2. a) $\frac{8}{17}$ b) $\frac{9}{16}$ c) $\frac{9}{34}$

3. a) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{6}$
   b) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{6}$

4. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{5}$

5. a) 0,7 c) 0,12
   b) 0,21 d) 0,39

6. a) 0,2 c) 0,12
   b) 0,12 d) 0,6

7. a) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{5}$
   b) $\frac{1}{15}$ d) $\frac{1}{3}$

8. a) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{10}$ e) $\frac{2}{5}$
   b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{7}{10}$

9. 0,53

10. a) $\frac{3}{250}$ b) $\frac{9}{500}$ c) $\frac{2}{3}$

11. a) $\frac{14}{25}$ b) $\frac{9}{28}$

12. a) 0,65 b) 0,6

13. $\frac{5}{8}$

14. $\frac{1}{4}$

15. $\frac{5}{16}$

16. $\frac{63}{115}$

17. a) $\frac{19}{25}$ b) $\frac{35}{38}$

18.	0,28		
19.	$\frac{1}{15}$		
20.	$\frac{3}{5}$		
21.	$\frac{5}{17}$		
22.	a) $\frac{2}{15}$	b) $\frac{8}{15}$	
23.	a) $\frac{1}{630}$	b) $\frac{2}{63}$	

2.6 Événements indépendants en probabilité

définition 2.6.1
deux événements indépendants en probabilité

Les événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants en probabilité si

$$\bullet\ P(A \mid B) = P(A) \qquad \bullet\ P(B \mid A) = P(B)$$

De cette définition découle la proposition suivante.

proposition 2.6.1

Les événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants en probabilité $\Leftrightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

démonstration

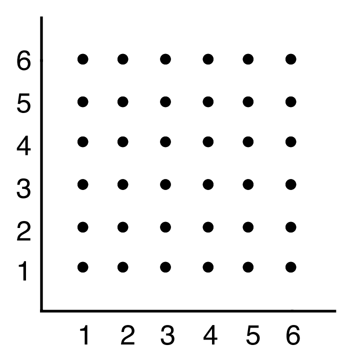
Il est généralement préférable d'utiliser la proposition 2.6.1 plutôt que d'utiliser la définition 2.6.1 pour démontrer l'indépendance de deux événements en probabilité.

exemple 2.6.1

On lance 2 dés réguliers. Soit les événements

A : obtenir une somme de 7
B : obtenir un 3 sur le premier dé

Montrer que A et B sont indépendants en probabilité?



rép: $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

relation entre événements indépendants et événements mutuellement exclusifs

Il est important de ne pas confondre événements indépendants et événements mutuellement exclusifs, deux notions complètement différentes. Il existe malgré tout une relation entre ces deux notions.

Si A et B sont des événements indépendants en probabilité alors

$$
\begin{aligned}
& P(A \cap B) = P(A)\,P(B) \\
\Rightarrow \quad & P(A \cap B) \neq 0 \quad \text{puisque } P(A) \neq 0 \text{ et } P(B) \neq 0 \text{ par définition} \\
\Rightarrow \quad & A \cap B \neq \varnothing \\
\Rightarrow \quad & \text{A et B ne sont pas mutuellement exclusifs}
\end{aligned}
$$

définition 2.6.2

trois événements indépendant en probabilité

Les événements A, B et C de probabilités non nulles forment une classe d'événements indépendants en probabilité si

- $P(A \mid B) = P(A)$
- $P(B \mid A) = P(B)$
- $P(A \mid B \cap C) = P(A)$
- $P(A \mid C) = P(A)$
- $P(C \mid A) = P(C)$
- $P(B \mid A \cap C) = P(B)$
- $P(B \mid C) = P(B)$
- $P(C \mid B) = P(C)$
- $P(C \mid A \cap B) = P(C)$

proposition 2.6.2

Les événements A, B et C de probabilités non nulles forment une classe d'événements indépendants en probabilité si $\Leftrightarrow$

- $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

exemple 2.6.2

Huit tickets numérotés 111, 121, 122, 122, 211, 212, 212 et 221 sont placés dans un chapeau et mêlés. On en tire un au hasard. Montrer que les événements suivants ne forment pas une classe d'événements indépendants en probabilité.

A: le 1^{er} numéro sur ticket est 1,
B: le 2^{e} numéro sur ticket est 1,
C: le 3^{e} numéro sur ticket est 1.

proposition 2.6.3

Si $A, B \subseteq \Omega$ sont des événements indépendants en probabilité alors

a) A et $\overline{B}$ sont des événements indépendants en probabilité,

b) $\overline{A}$ et B sont des événements indépendants en probabilité,

c) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des événements indépendants en probabilité.

démonstration

a)

La proposition 2.6.3 se généralise à plusieurs événements

exemple 2.6.3

Soit A et B deux événements indépendants en probabilité. Si

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

Trouver

a) $P(A \cap B)$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

c) $P(\overline{B} \mid A)$

---

rép: a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{2}{3}$

proposition 2.6.4

Si les événements $A_1, A_2, A_3, \ .. \ . , A_k$ forment une classe d'événements indépendants en probabilité alors la probabilité que la suite d'événements se réalise est donnée par

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ \ldots \ \cap A_k) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3) \ \ldots \ P(A_k)$$

exemple 2.6.4

On tire successivement 2 cartes d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Trouver la probabilité que les 2 cartes choisies soient des coeurs si le tirage se fait avec remise.

rép: $\frac{1}{16}$

exemple 2.6.5

Jean et Michel peuvent obtenir la normale au golf avec des probabilités respectives de 1/4 et 1/5. Les golfeurs jouent ensemble une ronde de golf. Quelle est la probabilité pour que

a) les deux jouent la normale?
b) aucun joue la normale?
c) au moins un joue la normale?
d) un seul joue la normale?

rép: a) $\frac{1}{20}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $\frac{7}{20}$

exemple 2.6.6

Les probabilités pour que 3 tireurs atteignent une cible sont respectivement 1/6, 1/4 et 1/3. Chacun tire une seule fois sur la cible. Quelle est la probabilité pour

a) qu'aucun d'entre eux atteigne la cible?
b) qu'au moins un d'entre eux atteigne la cible?
c) qu'un seul d'entre eux atteigne la cible?

rép: a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{7}{12}$; c) $\frac{31}{72}$

exemple 2.6.7

Un élève n'a pas étudié pour son examen d'histoire qui comporte 5 questions. Chaque question contient 3 choix de réponses. L'élève répond au hasard aux 5 questions. Quelle est la probabilité qu'il réponde correctement à

a) aucune des 5 questions?
b) au moins une des 5 questions?
c) exactement 2 des 5 questions?

rép: a) $\frac{32}{243}$; b) $\frac{211}{243}$; c) $\frac{80}{243}$

Exercices 2.6

$A, B, C \subseteq \Omega$ sont trois événements de probabilités non nulles.

1. Vrai ou faux.

   a) Si A et B sont indépendants en probabilité alors $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

   b) Si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ alors A et B sont indépendants en probabilité.

   c) Si A, B et C forment une classe d'événements indépendants en probabilité alors $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

   d) Si $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$ alors A, B et C forment une classe d'événements indépendants en probabilité.

   (Justifiez vos réponses.)

2. On tire une carte au hasard d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Soit les événements

   A : tirer un as
   B : tirer un coeur
   C : tirer une carte rouge

   Peut-on affirmer que les événements suivants forment une classe d'événements indépendants en probabilité?

   a) A et B
   b) B et C
   c) A et C
   d) A, B et C

   (Justifiez vos réponses.)

3. Soit A et B deux événements indépendants en probabilité et

   $$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

   Trouver

   a) $P(B)$
   b) $P(A \mid B)$
   c) $P(\overline{B} \mid A)$
   d) $P(\overline{A} \mid \overline{B})$

4. Soit $P(A) = 0{,}20$ et $P(B) = 0{,}15$. Trouver

   a) $P(A \mid B)$ si A et B sont indépendants,
   b) $P(A \mid B)$ si A et B sont mutuellement exclusifs,
   c) $P(A \cap B)$ si A et B sont mutuellement exclusifs,
   d) $P(A \cap B)$ si A et B sont indépendants,
   e) $P(A \cup B)$ si A et B sont mutuellement exclusifs,
   f) $P(A \cup B)$ si A et B sont indépendants.

5. Soit A et B deux événements tels que

$$P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(A \cup B) = \frac{1}{3} \qquad P(B) = p$$

Trouver la valeur de p sachant que

a) A et B sont mutuellement exclusifs,
b) A et B sont indépendants en probabilité,
c) A est un sous-événement (sous-ensemble) de B.

6. Un sac contient 17 boules numérotées de 1 à 17 inclusivement. Une boule est tirée au hasard et replacée. Un second tirage est alors effectué. Quelle est la probabilité que le premier nombre tiré soit pair et le second impair?

7. Démontrer que si A et B sont des événements indépendants en probabilité

a) $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants en probabilité,

b) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants en probabilité.

8. La probabilité qu'un homme soit vivant dans 25 ans est 1/4 et la probabilité que son épouse soit vivante dans 25 ans est de 1/3. Quelle est la probabilité que dans 25 ans

a) les deux soient vivants?
b) au moins un des deux soit vivant?
c) aucun soit vivant?
d) seulement l'épouse soit vivante?

9. Dans un petit village, 2 ambulances sont de service pour les cas d'urgence. À cause de la demande et aux possibilités d'ennuis mécaniques, on estime que la probabilité pour qu'une ambulance soit disponible lors d'un appel est de 9/10. La disponibilité d'une ambulance est indépendante de la disponibilité de l'autre. Dans l'éventualité d'un grave accident, quelle est la probabilité pour

a) que les 2 ambulances soient disponibles?
b) qu'une seule soit disponible?

10. La probabilité de défaillance d'un système de guidage d'un missile est de 0,001. Afin de diminuer les chances de défaillance, on décide d'équiper ce type de missile avec 2 systèmes de guidage complètement indépendants l'un de l'autre, de sorte que si l'un tombe en panne, l'autre prenne immédiatement la relève. Quelle est la probabilité qu'un missile ainsi équipé

a) tombe en panne?
b) ne tombe pas en panne?

11. Trois personnes ont attrapé une certaine maladie. L'expérience a démontré que 10 % de ceux qui attrapent cette maladie n'en guérissent pas. Quelle est la probabilité pour

 a) qu'aucune des 3 personnes guérisse?
 b) que les 3 personnes guérissent?

12. Trois éminents mathématiciens X, Y et Z se penchent indépendamment les uns des autres sur un même problème. Les probabilités de résoudre le problème pour X, Y et Z sont respectivement

$$P(X) = \frac{1}{12} \quad P(Y) = \frac{1}{6} \quad P(Z) = \frac{1}{4}$$

 Quelle est la probabilité que le problème soit résolu par

 a) les 3 mathématiciens?
 b) au moins un des 3 mathématiciens?
 c) 1 seul mathématicien?

13. Les probabilité qu'un homme atteigne une cible est de 0,7.
 Il tire 4 fois. Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte

 a) les 4 fois?
 b) au moins 1 fois?
 c) exactement 2 fois?

14. On lance une paire de dés jusqu'à ce qu'on obtienne une somme de 7. Quelle est la probabilité de jouer

 a) exactement 4 coups pour l'obtenir?
 b) moins de 4 coups pour l'obtenir?
 c) plus de 3 coups pour l'obtenir?

15. Un étudiant doit répondre par VRAI ou FAUX à un questionnaire objectif comportant 10 questions. L'étudiant répond au hasard à ces questions. Quelle est la probabilité que

 a) toutes les réponses soient bonnes?
 b) 5 réponses soient bonnes?
 c) au moins 8 réponses soient bonnes?

16. On arrête 6 personnes au hasard dans la rue. Quelle est la probabilité que 2 personnes sur les 6 soient nées un lundi?

17. On lance un sou 5 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir

 a) la première face au 5^e lancer?
 b) la deuxième face au 5^e lancer?

18. Un certain type de missiles peut atteindre une cible avec une probabilité de 0,3. Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte si on lance

    a) 2 missiles ?
    b) 3 missiles ?
    c) 6 missiles ?
    d) Combien doit-on lancer de missiles pour que la probabilité d'atteindre la cible soit au moins de 0,99?

Réponses aux exercices 2.6

1.	a)	vrai	c)	vrai		
	b)	vrai	d)	faux		
2.	a)	oui	c)	oui		
	b)	non	d)	non		
3.	a)	$\frac{1}{3}$	c)	$\frac{2}{3}$		
	b)	$\frac{1}{2}$	d)	$\frac{1}{2}$		
4.	a)	0,2	c)	0	e)	0,35
	b)	0	d)	0,03	f)	0,32
5.	a)	$\frac{1}{12}$	b)	$\frac{1}{9}$	c)	$\frac{1}{3}$
6.		$\frac{72}{289}$				
7.						
8.	a)	$\frac{1}{12}$	c)	$\frac{1}{2}$		
	b)	$\frac{1}{2}$	d)	$\frac{1}{4}$		
9.	a)	0,81	b)	0,18		
10.	a)	0,000001	b)	0,999999		
11.	a)	0,001	b)	0,729		
12.	a)	$\frac{1}{288}$	b)	$\frac{41}{96}$	c)	$\frac{103}{288}$
13.	a)	0,24	b)	0,992	c)	0,265
14.	a)	0,096	b)	0,421	c)	0,579
15.	a)	0,001	b)	0,246	c)	0,055
16.		0,165				
17.	a)	0,031	b)	0,125		
18.	a)	0,51	c)	0,882		
	b)	0,657	d)	13 missiles		

Exercices de révision

1. Vrai ou faux.

   a) Si $n(\Omega) = 7$ alors le nombre d'événements possibles associés à Ω est 128.

   $A, B \subseteq \Omega$ et $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$

   b) Si A et B sont des événements exhaustifs alors $P(A) + P(B) = 1$.

   c) A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω .

   d) $P(A \cap B) \leq P(A \cup B) \ \forall\ A, B$.

   e) Si $P(A\,|\,B) \geq P(B\,|\,A)$ alors $A \subseteq B$.

   f) $P(A\,|\,B) = 1 - P(A\,|\,\overline{B})$.

   g) $P(A\,|\,B)\, P(B) = P(B\,|\,A)\, P(A)$.

   h) Si $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$ alors les événements A et B sont indépendants en probabilité.

2. La probabilité pour qu'un étudiant de MATHS 101 trouve son examen de probabilité long est de 0,40, celle pour qu'il trouve son examen difficile est de 0,35 et celle pour qu'il trouve son examen long ou difficile est de 0,5. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant de MATHS 101 choisi au hasard trouve son examen de probabilité

   a) long et difficile ?
   b) ni long, ni difficile ?
   c) long mais pas difficile ?

3. Dans une course de 4 chevaux, on estime que CHAMPION à 2 fois plus de chance de l'emporter que DIABLO. DIABLO et BLIZZARD ont la même probabilité de l'emporter. APACHE est le grand favori et il a 3 fois plus de chance que DIABLO de l'emporter. Quelle est la probabilité

   a) que le favori ne remporte pas la course ?
   b) que DIABLO ou CHAMPION remporte la course ?

4. Une urne contient 100 billets dont 5 sont des billets gagnants. On tire au hasard et simultanément 2 billets de l'urne. Quelle est la probabilité pour que

   a) les 2 soient gagnants ?
   b) aucun des 2 soit gagnant ?

5. On veut apprendre à un singe à reconnaître les couleurs. On lui donne 3 balles: une rouge, une noire et une blanche. Il doit placer les 3 balles dans 3 boîtes: une rouge une noire et une blanche. Il est impossible d'introduire plus d'une balle par boîte; les dimensions de la boîte l'interdisent. Le singe n'a pas encore appris à établir une correspondance entre balle et boîte de même couleur, il se contente d'introduire au hasard les balles dans les boîtes.

   a) Décrire l'espace échantillon associé à cette expérience.
   b) Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait aucune balle qui soit introduite dans la boîte de sa couleur?
   c) Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait qu'une boîte qui contienne la balle de sa couleur?

6. Lors de la réception d'une livraison de marchandise d'un manufacturier, l'acheteur effectue une vérification de la qualité de la marchandise reçue. Un magasin reçoit la livraison de 100 téléviseurs d'un manufacturier. L'administration du magasin ne sait pas que 10 de ceux-ci sont défectueux. Trois appareils sont choisis au hasard et inspectés de A à Z. Le magasin refuse le lot si 2 appareils ou plus sont défectueux. Quelle est la probabilité pour que le magasin refuse le lot?

7. Quelques statistiques rudimentaires recueillies par un petit dépanneur semblent indiquer que la probabilité pour qu'un client achète du pain lors d'une visite est de 0,6, la probabilité pour qu'il achète du lait est de 0,4 et la probabilité pour qu'il achète les deux est de 0,3. Si un client choisi au hasard achète du pain, quelle est la probabilité pour qu'il achète aussi du lait?

8. Loto-Québec se prépare à lancer une nouvelle loterie appelée MINI-BANCO. On vous propose de choisir 3 numéros entre 1 et 20 (inclusivement). On procède par la suite au tirage de 5 numéros gagnants. Si vos 3 numéros choisis sont parmi les 5 numéros gagnants alors vous gagnez. Quelles sont vos chances de gagner?

9. Les rapports de police montrent que dans une ville la probabilité pour qu'un cambrioleur soit attrapé est de 0,30 et de 0,45 d'être condamné s'il a été attrapé. Quelle est la probabilité pour que dans cette ville un cambrioleur

   a) soit attrapé et condamné?
   b) s'en tire sans condamnation?

10. Madame X a une boîte contenant 4 bagues. Une bague a un diamant et une émeraude. Une autre a un diamant et un topaze. Une troisième a une émeraude et un topaze. La dernière a 5 perles. Elle choisit une bague au hasard. Soit

    A : Madame X choisit une bague avec un diamant
    B : Madame X choisit une bague avec une émeraude
    C : Madame X choisit une bague avec un topaze

    Peut-on affirmer (avec justification) que les événements suivants forment une classe d'événements indépendants en probabilité?

    a) A et B
    b) B et C
    c) A et C
    d) A, B et C

11. La probabilité pour qu'un assureur qui se rend chez un client lui vende une police d'assurance-vie est de 0,3. L'assureur doit se rendre aujourd'hui chez 3 clients. Quelle est la probabilité

    a) qu'il vendra une police au premier et aucune aux autres?
    b) qu'il vendra 2 polices d'assurance-vie aujourd'hui?
    c) qu'il vendra au moins une police d'assurance-vie aujourd'hui?

12. Un sac contient 4 billes blanches, 2 billes noires et 6 billes rouges. Un deuxième sac contient 3 billes blanches et 5 billes noires. Une bille est tirée du premier sac et déposée dans l'autre sac sans en regarder la couleur. Par la suite, une bille est tirée du second sac. Quelle est la probabilité que

    a) les 2 billes soient blanches?
    b) la seconde bille soit blanche?
    c) la première bille soit blanche si la seconde est noire?

13. M. Giroux opère une usine d'assemblage de ventilateurs.
    Deux fournisseurs l'approvisionnent en moteurs électrices. La compagnie A fournit 90 % des moteurs, la compagnie B fournit le reste. M. Giroux sait que 5 % des moteurs fournis par A sont défectueux tandis que 3 % des moteurs fournis par B le sont. M. Giroux vient de vérifier un ventilateur et le moteur est défectueux. Quelle est la probabilité pour que le moteur provienne de la compagnie A?

14. Supposons que 20 % des articles produits dans une manufacture sont défectueux. Quatre articles sont choisis au hasard. Calculer la probabilité

    a) qu'aucun article soit défectueux,
    b) que 2 articles soient défectueux,
    c) qu'au moins 1 article soit en bon état.

15. Une boîte contient 3 pièces de monnaie.

    - Une pièce A normale.
    - Une pièce B marquée avec 2 faces.
    - Une pièce C truquée ayant une probabilité 2 fois plus grande d'obtenir pile que d'obtenir face.

    On choisit une des pièces au hasard et on la lance. Calculer la probabilité

    a) qu'on obtienne face,
    b) que si on a obtenu face, ce soit avec la pièce B.

16. La compagnie d'assurance TOUT RISQUE du Québec a produit les données suivantes. La probabilité qu'un automobiliste du Québec ait un accident avec blessure durant la prochaine année est de 0,07. Cette probabilité est néanmoins plus faible soit 0,05 si l'automobiliste est une femme. Sachant que 40 % des automobilistes sont des femmes, quelle est la probabilité que le prochain automobiliste mâle assuré par la compagnie ait un accident avec blessures durant l'année qui vient?

17. Combien de fois devons-nous lancer un dé si on veut que la probabilité d'obtenir au moins une fois la face 6 soit plus grande que 0,9?

18. Soit A et B deux événements indépendants en probabilité. Si

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \qquad P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

    Trouver P(A) et P(B)

19. Jean est myope mais il aime jouer aux fléchettes dans son sous-sol. Son fils Stéphane qui a 8 ans, l'observe de très près. Son père atteint le centre de la cible 3 fois sur 10. Stéphane se place près de la cible et indique à son père s'il a ou non atteint le centre de la cible. Il est en fait trop jeune pour bien apprécier la situation et il se trompe 1 fois sur 10 (par exemple, la probabilité que Stéphane affirme que la cible est atteinte lorsque Jean l'atteint est de 0,9). Voici que Jean vient de lancer une fléchette et que Stéphane affirme qu'il s'agit d'un coup en plein centre. Quelle est la probabilité pour que Jean ait réellement atteint le centre de la cible?

20 Un concessionnaire de voitures vend le même jour, 5 véhicules identiques à des particuliers. La probabilité pour que ce type de voiture soit en état de rouler 6 ans après est de 0,8. Calculer la probabilité pour que

    a) les 5 voitures soient en service 6 ans plus tard,
    b) les 5 voitures soient hors de service 6 ans plus tard,
    c) au moins une voiture soit en service 6 ans plus tard,
    d) exactement 3 voitures soient hors de service 6 ans plus tard.

Réponses aux exercices de révision

1.	a)	V	d)	V	g)	V
	b)	F	e)	F	h)	V
	c)	V	f)	F		
2.	a)	0,25	b)	0,5	c)	0,15
3.	a)	$\frac{4}{7}$	b)	$\frac{3}{7}$		
4.	a)	$\frac{1}{495}$	b)	$\frac{893}{990}$		
5.	a)	{ RNB, RBN, BRN, BNR, NBR, NRB }				
	b)	$\frac{1}{3}$	c)	$\frac{1}{2}$		
6.		$\frac{139}{5390}$				
7.		$\frac{1}{2}$				
8.		0,0088				
9.	a)	0,135	b)	0,865		
10.	a)	oui	c)	oui		
	b)	oui	d)	non		
11.	a)	0,147	b)	0,189	c)	0,657
12.	a)	$\frac{4}{27}$	b)	$\frac{10}{27}$	c)	$\frac{10}{31}$
13.		$\frac{15}{16}$				
14.	a)	0,4096	b)	0,1536	c)	0,9984
15.	a)	$\frac{11}{18}$	b)	$\frac{6}{11}$		
16.		$\frac{1}{12}$				
17.		13 fois ou plus				
18.		$P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$ ou $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$				
19.		0,79				
20.	a)	0,3277	c)	0,9997		
	b)	0,0003	d)	0,0512		