Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses

6

6.1 *Rappel* *(fonctions trigonométriques)*

Nous aborderons maintenant une autre classe de fonctions dites élémentaires, les *fonctions trigonométriques*. Ces fonctions sont indispensables à l'étude des phénomènes périodiques.

mesure d'angles

La variable indépendante de toute fonction trigonométrique est un angle. On construit un angle en effectuant dans un plan la rotation d'un segment de droite autour d'une de ses extrémités. Un angle dont le côté initial est sur l'axe des abscisses et dont le sommet est le point d'origine est dit en *position standard* ou *canonique*. L'angle est positif lorsque la rotation est faite dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (figure 6.1.1) et négatif si la rotation est faite dans le sens des aiguilles d'une montre (figure 6.1.2).

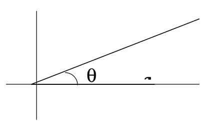


figure 6.1.1

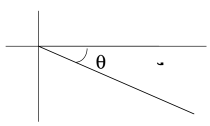


figure 6.1.2

Depuis l'antiquité, on mesure les angles en degrés. L'angle de 360° est associé à une rotation complète du segment de droite. Dans ce cas le segment de droite revient à sa position initiale après avoir fait une rotation complète dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (figure 6.1.3). Ce sont les astronomes babyloniens qui ont choisi le nombre 360; ils croyaient alors que la terre faisait un tour sur elle-même en 360 jours. Lorsqu'on fait intervenir le calcul différentiel, il est essentiel d'utiliser une autre mesure, *le radian*. L'emploi du radian comme mesure d'angles simplifie la dérivée des fonctions trigonométriques, de la même façon que la base *e* simplifie la dérivée des fonctions exponentielles et logarithmiques.

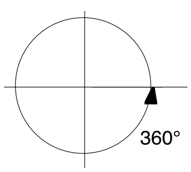


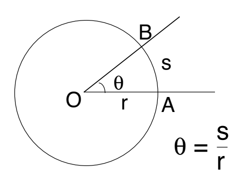
figure 6.1.3

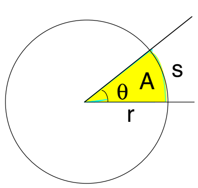
définition 6.1.1

le radian

lorsque r = 1, la mesure en radians de l'angle AOB correspond à la longueur de l'arc AB

On mesure un angle θ en radians en traçant d'abord un cercle centré sur le sommet de l'angle puis, on établit le rapport entre l'arc de cercle s qu'il sous-tend et le rayon r du cercle. L'unité «radian» est habituellement omise.





$$\frac{\text{secteur angulaire}}{\text{une révolution}} = \frac{\text{longueur de l'arc}}{\text{circonférence}} = \frac{\text{aire du secteur}}{\text{aire du cercle}}$$

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r} = \frac{A}{\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{s = r\theta} \qquad \text{et} \qquad \boxed{A = \frac{1}{2} r^2\theta}$$

relation entre degrés et radians

Comme la circonférence d'un demi-cercle de rayon r est πr et que $\theta = s/r$, un angle de 180° correspond à un angle en radians de

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi$$

Par conséquent $\boxed{180° = \pi \text{ radians}}$.

exemple 6.1.1

Convertir 30° en radians.

---

pour convertir des degrés en radians, on multiplie la mesure en degrés par $\frac{\pi}{180}$

Une simple règle de trois permet d'effectuer la conversion. Si θ est la quantité cherchée,

$$\begin{cases} 180° = \pi \\ 30° = \theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{30° \times \pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$$

exemple 6.1.2

Convertir $\pi/4$ radians en degrés

---

pour convertir des radians en degrés, on multiplie la mesure en radians par $\frac{180}{\pi}$

Si θ est la quantité cherchée,

$$\begin{cases} 180° = \pi \\ \theta = \pi/4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi/4 \times 180°}{\pi} = 45°$$

exemple 6.1.3

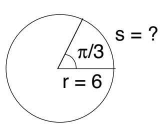


figure 6.1.4

Calculer la longueur de l'arc de cercle de la figure 6.1.4.

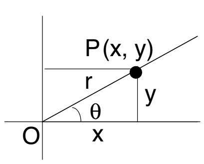
On a $S = r\theta$ (où θ est un angle en radians)

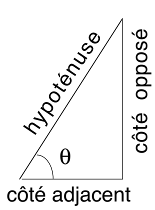
$= 6(\pi/3)$

$= 2\pi$ (6,28)

définition 6.1.2

les six rapports trigonométriques





Soit θ un angle en position standard et P(x, y) un point situé à une distance r de l'origine O sur le côté terminal de l'angle.

sinus:	$\sin\theta = \frac{y}{r}$	;	cosécante:	$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$
cosinus:	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	;	sécante:	$\sec\theta = \frac{r}{x}$
tangente:	$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$	;	cotangente:	$\operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y}$

Si le point P(x, y) est dans le premier quadrant alors θ est un angle aigu d'un triangle rectangle. Dans un tel cas, on peut définir les six rapports trigonométriques de la manière suivante.

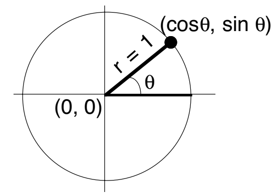
$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$	;	$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé}}$
$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$	;	$\sec\theta = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent}}$
$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$	;	$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$

les six fonctions trigonométriques

Les six rapports trigonométriques permettent de définir six nouvelles fonctions: *sinus (sin)*, *cosinus (cos)*, *tangente (tg)*, *cotangente (cotg)*, *sécante (sec)* et *cosécante (cosec)*. L'étude de ces fonctions est grandement simplifiée lorsqu'elle est faite à partir d'un cercle de rayon 1.

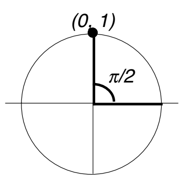
le cercle trigonométrique

On considère d'abord un cercle de rayon 1 centré à l'origine d'un plan cartésien que l'on nomme *cercle trigonométrique*. On trace un angle de θ radians ayant pour sommet le point (0, 0) et dont l'un des côtés repose sur l'axe positif des x. L'autre côté rencontre le cercle en un point (x, y). On appelle



- sin θ la valeur de y,
- cos θ la valeur de x,
- tg θ la valeur de y/x,
- cosec θ la valeur de 1/y,
- sec θ la valeur de 1/x,
- cotg θ la valeur de x/y.

exemple 6.1.4



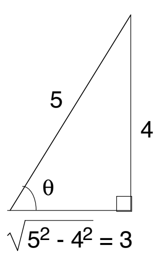
Trouver sin (π/2) , cos(π/2) , tg(π/2) , cotg(π/2) , sec(π/2) et cosec(π/2).

L'angle de π/2 est associé au couple (x, y) = (0, 1) ;

$\Rightarrow$ $\sin(\pi/2) = 1$; $tg(\pi/2) = 1/0$ ($\nexists$) ; $\sec(\pi/2) = 1/0$ ($\nexists$)

$\cos(\pi/2) = 0$; $cotg(\pi/2) = 0/1 = 0$; $cosec(\pi/2) = 1/1 = 1$

exemple 6.1.5



Si sin θ = 4/5 (0< θ<π/2), trouver cos θ , tg θ , cotg θ , sec θ , cosec θ

$\sin\theta = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{4}{5}$, par la relation de Pythagore on a

$\text{côté adjacent} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{3}{5}$; $\sec\theta = \dfrac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{5}{3}$

$tg\,\theta = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{4}{3}$; $cosec\,\theta = \dfrac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé}} = \dfrac{5}{4}$

$cotg\,\theta = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} = \dfrac{3}{4}$

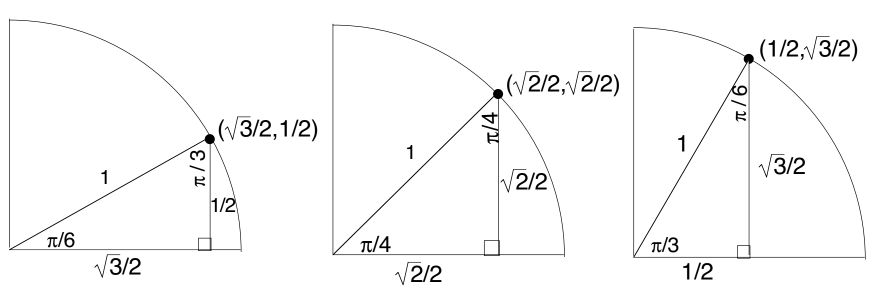
angles remarquables

Il est possible à l'aide de la géométrie élémentaire d'obtenir la valeur exacte de sin θ et de cos θ lorsque θ = π/6, θ = π/4 ou θ = π/3.

$\sin(\pi/6) = 1/2$
$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

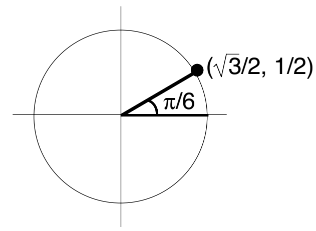
$\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

$\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$
$\cos(\pi/3) = 1/2$



exemple 6.1.6

Trouver $\sin(\pi/6)$, $\cos(\pi/6)$, $\mathrm{tg}(\pi/6)$, $\mathrm{cotg}(\pi/6)$, $\sec(\pi/6)$ et $\mathrm{cosec}(\pi/6)$.



L'angle de $\pi/6$ est associé au couple $(x, y) = (\sqrt{3}/2, 1/2)$;

$$\Rightarrow \quad \sin(\pi/6) = 1/2$$

$$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$$

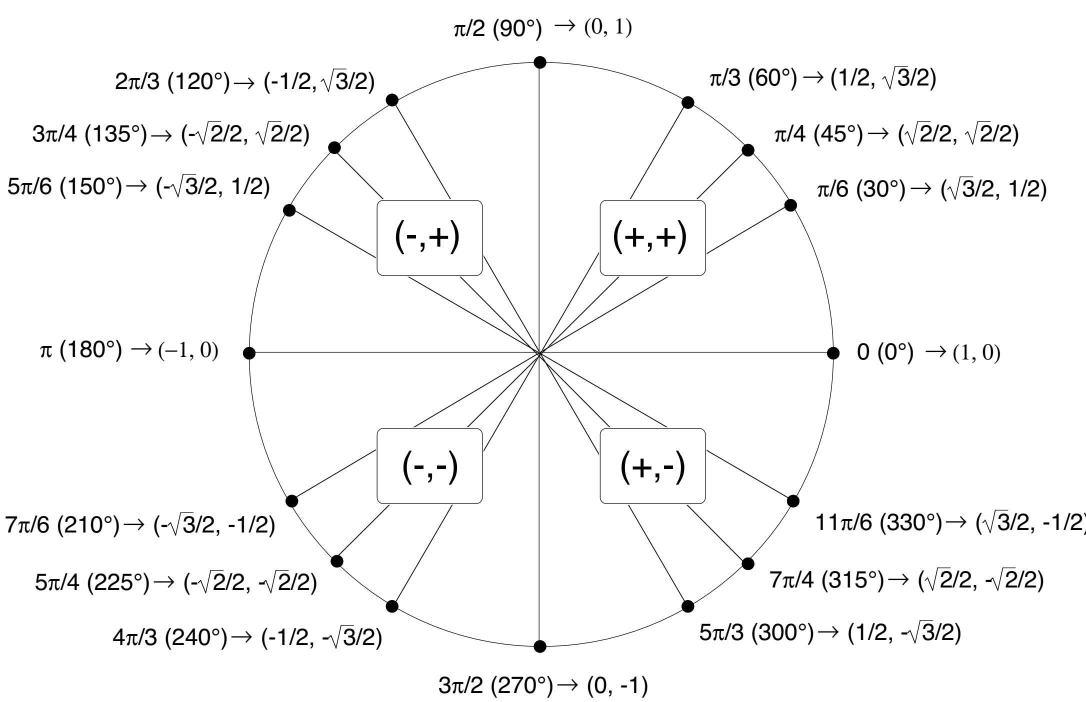
$$\mathrm{tg}(\pi/6) = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{cotg}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\sec(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

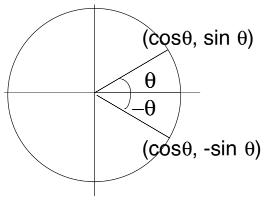
$$\mathrm{cosec}(\pi/6) = \frac{2}{1} = 2$$

Il en est de même pour les angles associés à des couples symétriques sur le cercle trigonométrique.



identités trigonométriques

une fonction $f(x)$ est périodique de période $p > 0$ si $f(x + p) = f(x)$ pour toute valeur de x



Les fonctions *sinus et cosinus sont périodiques* de période 2π.

1. $\sin(\theta \pm 2k\pi) = \sin\theta$
2. $\cos(\theta \pm 2k\pi) = \cos\theta$

(k est un nombre entier)

La fonction *sinus est une fonction impaire* tandis que la fonction *cosinus est une fonction paire*.

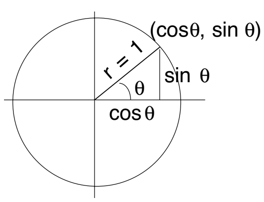
3. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
4. $\cos(-\theta) = \cos\theta$

Deux identités fort utiles, sont les identités d'angles complémentaires et celles permettant les translations horizontales.

5. $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
6. $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

Plusieurs identités découlent directement de la définition 6.1.2.

7. $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
8. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$
9. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\theta}$
10. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
11. $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$



En utilisant la relation de Pythagore sur la figure de gauche, on a

12. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Si on divise chaque membre de l'identité 12 par $\cos^2\theta$ on obtient l'identité 13 et si on on divise chaque membre de l'identité 12 par $\sin^2\theta$ on obtient l'identité 14,

13. $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
14. $1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

Les identités d'addition pour le sinus et le cosinus sont:

mais attention!

$\sin(\theta_1+\theta_2) \neq \sin\theta_1 + \sin\theta_2$
$\sin(\theta_1-\theta_2) \neq \sin\theta_1 - \sin\theta_2$
$\cos(\theta_1+\theta_2) \neq \cos\theta_1 + \cos\theta_2$
$\cos(\theta_1-\theta_2) \neq \cos\theta_1 - \cos\theta_2$

15. $\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1$
16. $\sin(\theta_1-\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1$
17. $\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$
18. $\cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$

À partir des identités 15 et 17, on peut en déduire deux autres sur le sinus et le cosinus d'angles doubles.

$$19.\ \ \sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$
$$20.\ \ \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

En utilisant l'identité 12 dans la dernière, on obtient

$$21.\ \ \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$
$$22.\ \ \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

résolution d'équations trigonométriques

On résout une équation contenant une ou plusieurs fonctions trigonométriques de la même façon que l'on résout les équations algébriques.

exemple 6.1.7

Résoudre l'équation $\sin 2x = \sin x$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

on s'assure d'abord que les arguments des fonctions trigonométriques sont les mêmes puis, si c'est possible, on transforme tout en sinus ou en cosinus

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sin x \\ 2 \sin x \cos x &= \sin x \qquad \text{(identité 19)} \\ 2 \sin x \cos x - \sin x &= 0 \\ (\sin x)(2 \cos x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

Lorsque l'angle $x \in [0, 2\pi[$, on a

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \to (1, 0) & \Rightarrow \quad x = 0 \\ x \to (-1, 0) & \Rightarrow \quad x = \pi \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \to (1/2, \sqrt{3}/2) & \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} \\ x \to (1/2, -\sqrt{3}/2) & \Rightarrow \quad x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sur $[0, 2\pi[$ sont $\left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \right\}$.

exemple 6.1.8

Résoudre l'équation $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x &= 0 \\
\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + \sin x &= 0 \quad \text{(identité 12)} \\
\sin^2 x - 1 + \sin^2 x + \sin x &= 0 \\
2 \sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \\
(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin x = -1$$

Lorsque l'angle $x \in [0, 2\pi[$, on a

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \to (\sqrt{3}/2, 1/2) \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{6} \\ x \to (-\sqrt{3}/2, 1/2) \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad x \to (0, -1) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

Les solutions de l'équation sur $[0, 2\pi[$ sont $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$.

exemple 6.1.9

Résoudre l'équation $\cos^2 x = \sin^2 x$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

---

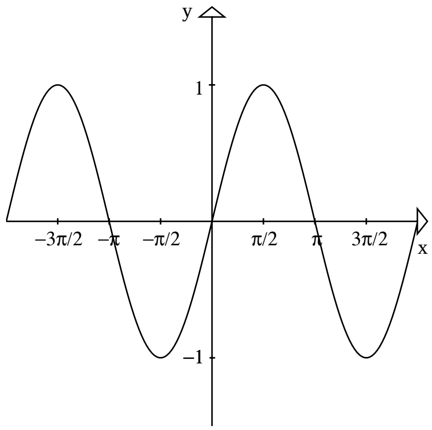
il n'est pas toujours nécessaire de tout exprimer en sinus ou en cosinus

rép: $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

graphiques des fonctions trigonométriques

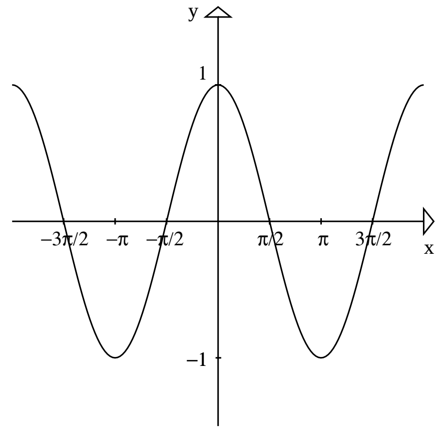
la fonction sinus est une fonction impaire de période 2π

la fonction cosinus est une fonction paire de période 2π



$f(x) = \sin x$

dom sin: **R** ima sin: [-1, 1]

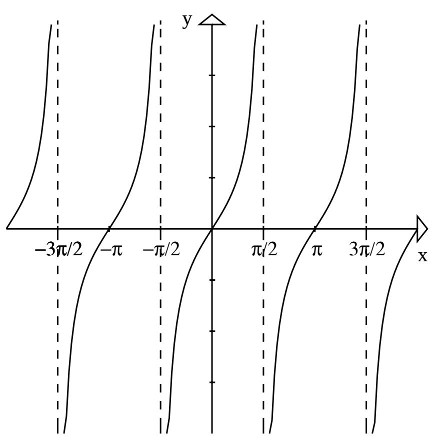


$f(x) = \cos x$

dom cos: **R** ima cos: [-1, 1]

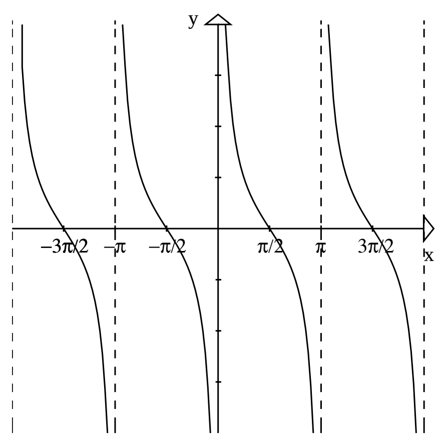
la fonction tangente est une fonction impaire de période π

la fonction cotangente est une fonction impaire de période π



$f(x) = \text{tg } x$

dom tg: **R** \ { ±π/2 , ±3π/2…} ima tg: **R**

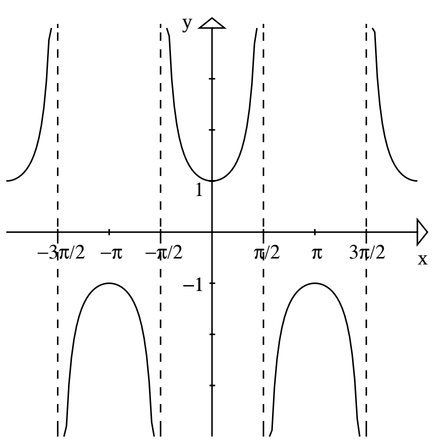


$f(x) = \text{cotg } x$

dom cotg: **R** \ { 0 , ±π , ±2π ...} ima cotg: **R**

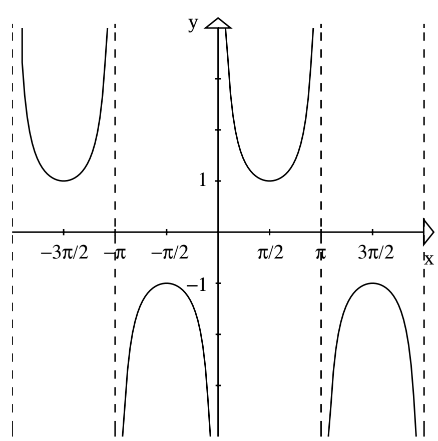
la fonction sécante est une fonction paire de période 2π

la fonction cosécante est une fonction impaire de période 2π



$f(x) = \sec x$

dom sec: **R** \ { ±π/2 , ±3π/2…}
ima sec:]-∞, -1] ∪ [1, ∞[



$f(x) = \text{cosec } x$

dom cosec: **R** \ { 0 , ±π , ±2π …}
ima cosec:]-∞, -1] ∪ [1, ∞[

L'importance des fonctions trigonométriques tient au fait qu'une grande majorité des phénomènes étudiés en sciences sont périodiques. Les ondes cérébrales ou les battements du coeur sont périodiques. Le courant électrique, le champ électromagnétique produit par un micro-onde, les mouvements des planètes, les saisons ou encore la température sont autant de phénomènes périodiques. On n'a qu'à penser à un phénomène et on a de fortes chances qu'il soit périodique.

Même si tous ces phénomènes semblent totalement différents, ils ont un point en commun leur *périodicité*. Il a été démontré que

> *« tout phénomène périodique quel qu'il soit peut être représenté comme une combinaison algébrique de fonctions sinus ou cosinus ».*

Par conséquent, une bonne compréhension des fonctions sinus et cosinus, permet de créer des modèles mathématiques pour tout phénomène à caractère périodique.

caractérisques du graphique du sinus

lorsqu'on multiplie l'argument par une quantité supérieure à 1 ou inférieure à -1, la courbe se contracte

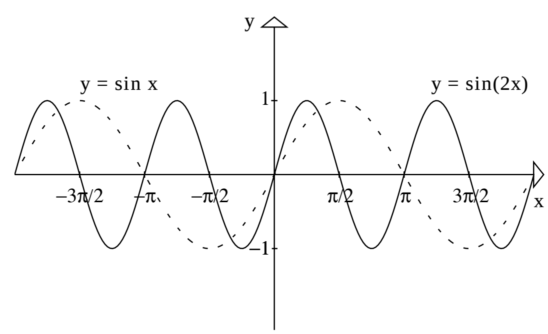
1

Si l'on multiplie l'argument de sin x par une quantité

$B > 1$ ou $B < -1$

la période de cette fonction diminue; elle devient

$$\left|\frac{2\pi}{B}\right|$$



lorsqu'on multiplie l'argument par une fraction, la courbe s'allonge

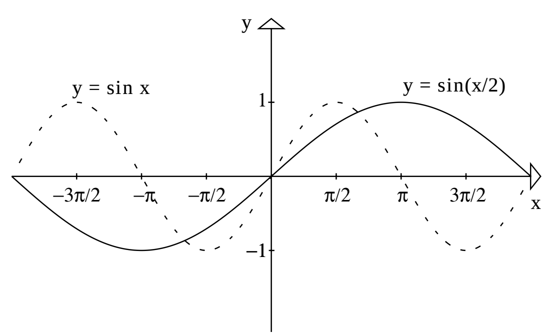
2

Si l'on multiplie l'argument de sin x par une quantité

$-1 < B < 1$

la période de cette fonction augmente; elle devient

$$\left|\frac{2\pi}{B}\right|$$



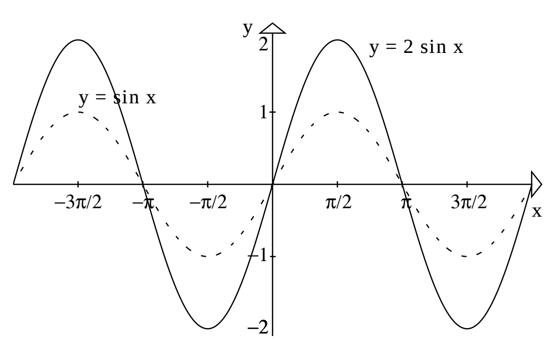
l'amplitude correspond à la moitié de la différence entre le maximum et le minimum de la fonction

3

Si l'on multiplie sin x par une quantité

$A \neq 0$

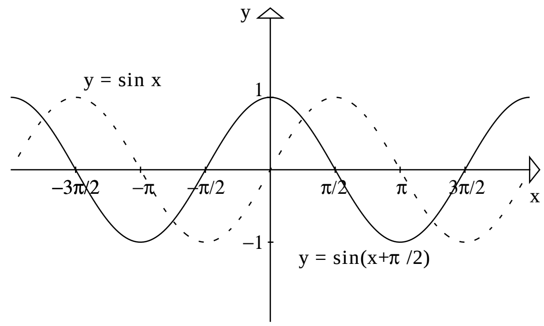
l'amplitude de cette fonction devient $|A|$.



le déplacement horizontal (vers la droite ou vers la gauche) de la courbe du sinus détermine le déphasage de cette courbe

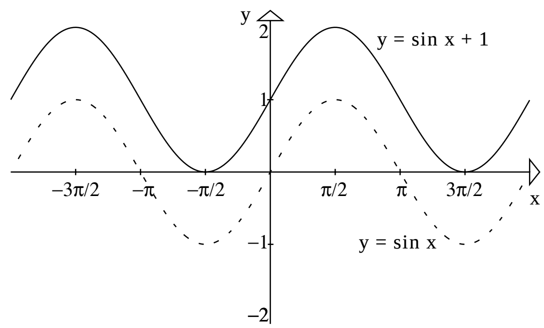
4

Si on soustrait une quantité C positive à l'argument du sinus, le graphique subit une translation horizontale de C unités vers la droite tandis que si on soustrait une quantité C négative à l'argument du sinus le graphique subit une translation horizontale de C unités vers la gauche.



5

Si on ajoute une quantité D positive à la fonction sin x, le graphique subit une translation verticale de D unités vers le haut tandis que si on ajoute une quantité D négative à la fonction sin x, le graphique subit une translation verticale de D unités vers le bas.



en physique, tous les mouvements vibratoires simples, telles les ondes électromagnétiques et les cordes vibrantes, peuvent être représentés par des sinusoïdes; on les utilise aussi pour représenter les mouvements oscillatoires d'un pendule ou d'un ressort

En résumé

$$f(x) = A \sin B(x - C) + D$$

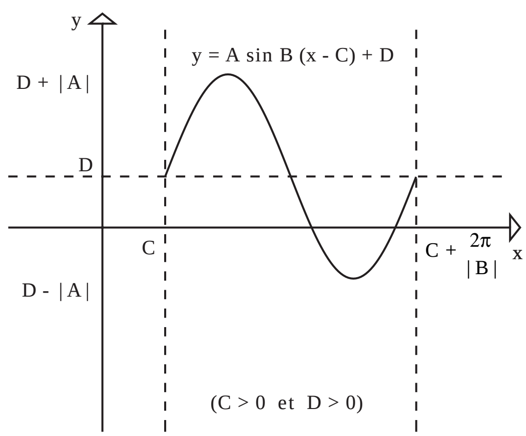
correspond à une fonction sinusoïdale

la *période* est $\frac{2\pi}{|B|}$

l'*amplitude* est $|A|$

le *déphasage* est C

déplacement vertical de *D*



exemple 6.1.10

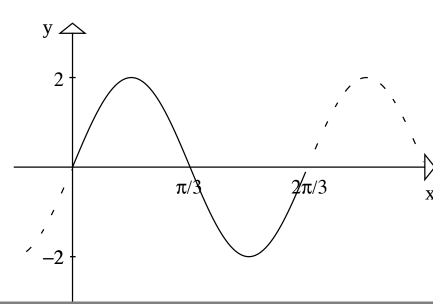
Tracer le graphique de $f(x) = 2 \sin 3x$.

période: $\frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

amplitude: $|2| = 2$

déphasage: aucun

déplacement vert.: aucun



exemple 6.1.11

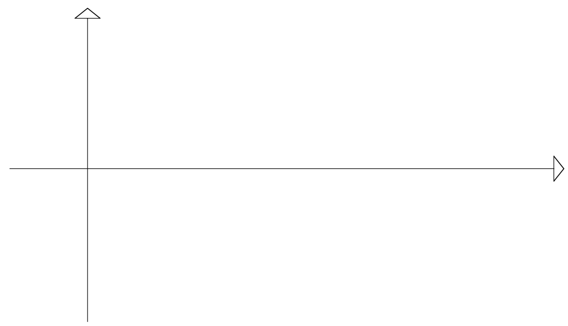
Tracer le graphique de $f(x) = \frac{1}{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

période:

amplitude:

déphasage:

déplacement vert.:



exemple 6.1.12

Tracer le graphique de $f(x) = \cos(4x + \pi) + 1$.

les mêmes considérations s'appliquent à la fonction cosinus

période:

amplitude:

déphasage:

déplacement vert.:

exemple 6.1.13

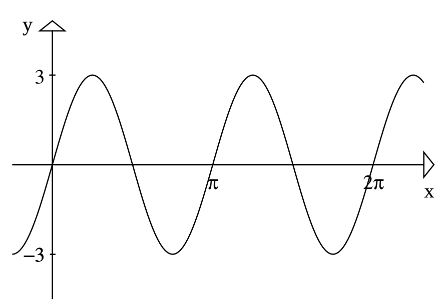
Déterminer à l'aide de la fonction sinus, une équation qui définit la courbe ci-dessous.

période:

amplitude:

déphasage:

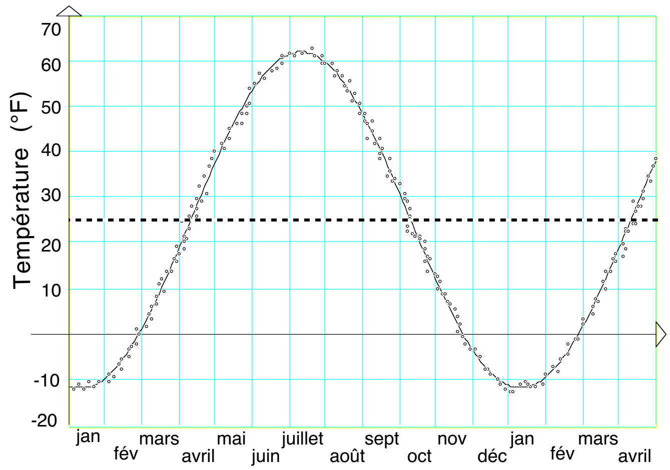
déplacement vert.:



équation:

L'exemple qui suit nous montre comment on peut utiliser la fonction sinus comme modèle pour approximer un phénomène concret.

À partir de données expérimentales recueillies entre 1941 et 1970 sur la température moyenne de l'air (en degrés Fahrenheit) à Fairbanks en Alaska,



la variable x représente le nombre de jours écoulés depuis le début de l'année

on a utilisé la fonction

$$f(x) = 37 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] + 25$$

ainsi le 31 janvier la température moyenne à Fairbanks en Alaska est

$$37 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(31 - 101)\right] + 25$$

$= -9{,}6$ °F

pour approximer le phénomène étudié.

Exercices 6.1

1. Convertir en radians la mesure d'angle donnée.

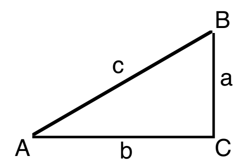
a) 135°   d) -240°
b) 15°   e) 540°
c) -150°   f) 1°

2. Evaluer si possible sans l'aide de votre calculatrice.

a) $\sin(\pi/3)$ h) $\operatorname{tg}(\pi/2)$ o) $\sec(-3\pi/4)$ v) $\operatorname{tg}(3\pi/2)$
b) $\cos(3\pi/2)$ i) $\operatorname{cotg}\pi$ p) $\operatorname{cotg}(-5\pi/4)$ w) $\operatorname{cotg}(5\pi)$
c) $\operatorname{tg}(5\pi/6)$ j) $\operatorname{cotg}(\pi/2)$ q) $\operatorname{cosec}(7\pi/6)$ x) $\sec(9\pi/4)$
d) $\sin(4\pi/3)$ k) $\sec(5\pi/2)$ r) $\operatorname{cotg}(-2\pi/3)$ y) $\operatorname{cosec}(23\pi/6)$
e) $\sec(5\pi/4)$ l) $\operatorname{cosec}\pi$ s) $\sin(5\pi)$ z) $\operatorname{tg}(-25\pi/4)$
f) $\operatorname{tg}(3\pi/4)$ m) $\operatorname{cosec}(-\pi/4)$ t) $\sin(-3\pi)$
g) $\operatorname{cosec}(\pi/3)$ n) $\sin(-2\pi/3)$ u) $\operatorname{tg}(5\pi/4)$

3. Soit un triangle rectangle en C. Les angles A, B et C sont opposés respectivement aux côtés a, b et c. Trouver

a) c si $a = 3$ et $b = 4$,
b) b si $a = 1$ et $c = 3$,
c) sin A , cos B , tg A , sec B si $a = 6$ et $b = 8$,
d) sin A , sin B , cotg A , cosec B si $a = 2$ et $b = 2$,
e) a et b si $c = 1$ et $A = \pi/6$.



4. A l'aide des identités trigonométriques montrer que

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$
b) $\sec\theta - \cos\theta = \sin\theta \,.\, \operatorname{tg}\theta$
c) $\dfrac{1}{1 + \sin u} + \dfrac{1}{1 - \sin u} = 2\sec^2 u$
d) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin 2x$
e) $\cos 2x \,.\, \cos x + \sin 2x \,.\, \sin x = \cos x$
f) $\sec(\pi - x) = -\sec x$

5. Résoudre pour $x \in [0, 2\pi[$.

a) $2\sin x - 1 = 0$
b) $\sin x \cos x = 0$
c) $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$
d) $4\cos x = \dfrac{3}{\cos x}$
e) $2\cos^2 x + \sin x = 1$
f) $\sin^2 x - \cos^2 x + 3\sin x = 1$
g) $\sin 2x + \sin x = 0$
h) $\operatorname{tg} x = 2\sin x$
i) $2\cos^2 x = \sin 2x$
j) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$

6. Tracer le graphique des fonctions suivantes sur une période.

   a) $y = \sin \frac{1}{4} x$

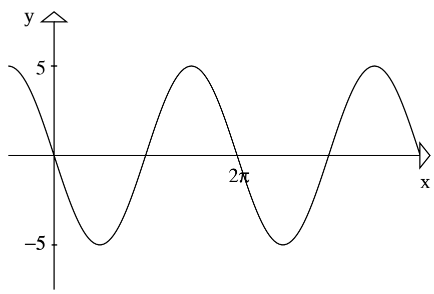
   b) $y = 4 \sin(3x + 2\pi)$

   c) $y = \frac{1}{4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

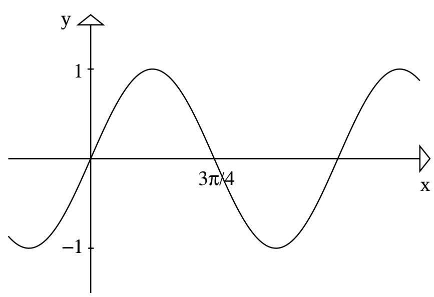
   d) $y = 3 \sin\left(\frac{1}{3} x + \frac{\pi}{5}\right)$

7. Déterminer à l'aide de la fonction sinus, une équation qui définit les courbes suivantes.

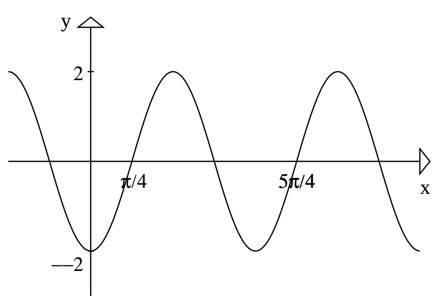
   a)



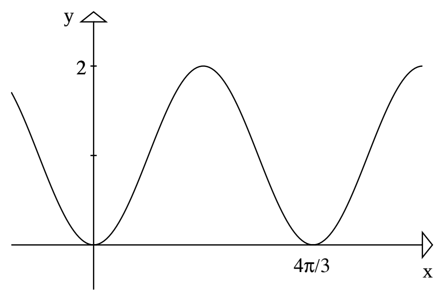
   b)



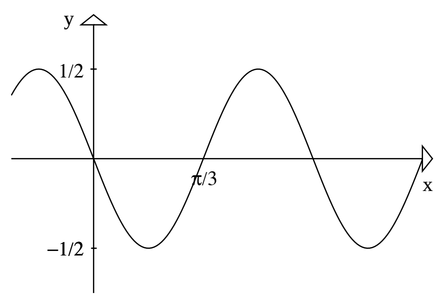
   c)



   d)



   e)



Réponses aux exercices 6.1

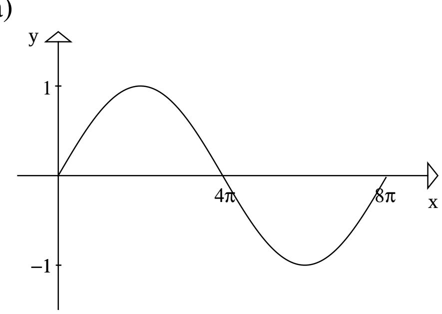
1. a) $3\pi/4$ b) $\pi/12$ c) $-5\pi/6$ d) $-4\pi/3$ e) 3π f) $\pi/180$

2. a) $\sqrt{3}/2$ b) 0 c) $-\sqrt{3}/3$ d) $-\sqrt{3}/2$ e) $-\sqrt{2}$ f) -1 g) $2\sqrt{3}/3$ h) $\nexists$ i) $\nexists$ j) 0 k) $\nexists$ l) $\nexists$ m) $-\sqrt{2}$ n) $-\sqrt{3}/2$ o) $-\sqrt{2}$ p) -1 q) -2 r) $\sqrt{3}/3$ s) 0 t) 0 u) 1 v) $\nexists$ w) $\nexists$ x) $\sqrt{2}$ y) -2 z) -1

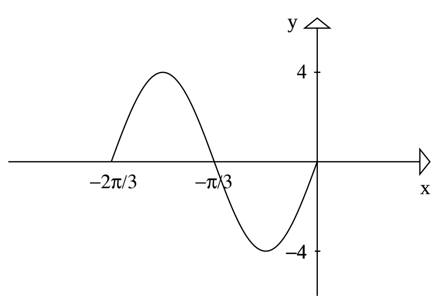
3. a) 5 b) $2\sqrt{2}$ c) $\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}$ e) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. a) $\{ \pi/6 , 5\pi/6 \}$
 b) $\{ 0 , \pi , \pi/2 , 3\pi/2 \}$
 c) $\{ \pi/2 \}$
 d) $\{ \pi/6 , 5\pi/6 , 7\pi/6 , 11\pi/6 \}$
 e) $\{ \pi/2 , 7\pi/6 , 11\pi/6 \}$
 f) $\{ \pi/6 , 5\pi/6 \}$
 g) $\{ 0 , \pi , 2\pi/3 , 4\pi/3 \}$
 h) $\{ 0 , \pi/3 , \pi , 5\pi/3 \}$
 i) $\{ \pi/4 , \pi/2 , 5\pi/4 , 3\pi/2 \}$
 j) $\{ \pi/3 , 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3 \}$

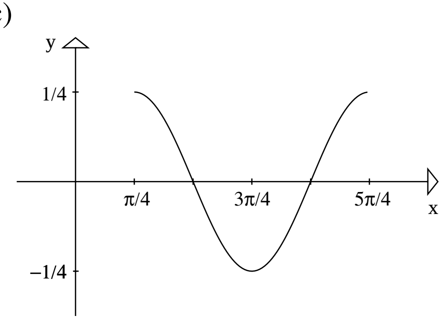
6. a)



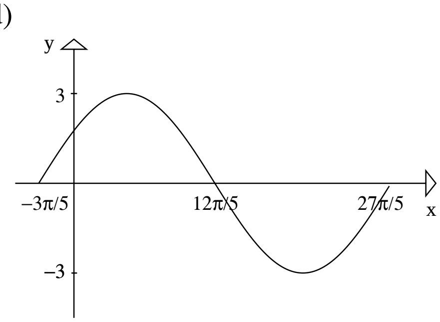
b)



c)



d)



7. a) $y = 5 \sin(x - \pi)$
 b) $y = \sin\left(\frac{4}{3} x\right)$
 c) $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$
 d) $y = \sin\left(\frac{3}{2} x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$
 e) $y = \frac{1}{2} \sin(3x - \pi)$

6.2 Limites et continuité *(fonctions trigonométriques)*

proposition 6.2.1

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ($a \in \overline{\mathbf{R}}$ et $b \in \mathbf{R}$)

alors a) $\lim\limits_{x \to a} \sin f(x) = \sin\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] = \sin b,$

b) $\lim\limits_{x \to a} \cos f(x) = \cos\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] = \cos b.$

exemple 6.2.1

Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

prop. 6.2.1 et prop. 1.2.3

a) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = \sin\left[\lim\limits_{x \to 0} x\right] = \sin 0 = 0,$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x + \pi)$

d) $\lim\limits_{x \to 3\pi/4} \left(\frac{1}{2} \cos^2 x\right)$

e) $\lim\limits_{r \to -\pi} \sec(3r)$

f) $\lim\limits_{x \to \pi/2^+} \operatorname{tg} x$

g) $\lim\limits_{u \to \pi^+} \operatorname{cosec} u$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sec\left(\frac{1}{x}\right)$

i) $\lim\limits_{\theta \to 0} \sqrt{1 - \cos \theta}$

rép: b) 1 ; c) -1 ; d) $\frac{1}{4}$; e) -1 ; f) $-\infty$; g) $-\infty$; h) 1 ; i) 0

les formes sin(±∞) et cos(±∞)

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ $\quad (a \in \overline{\mathbf{R}})$

alors $\lim\limits_{x \to a} \sin f(x)\ \nexists$ et $\lim\limits_{x \to a} \cos f(x)\ \nexists$.

Dans chacun des cas les fonctions ne s'approchent d'aucune valeur précise, ils oscillent indéfiniment entre -1 et 1.

exemple 6.2.2

cos(∞) ne s'approche d'aucune valeur précise

Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x = \cos\left[\lim\limits_{x \to \infty} x\right] = \cos \infty\ \nexists,$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{\sin x}{x}\right]$

rép: b) 0

Pour obtenir la dérivée de y = sin x ou de y = cos x nous aurons à utiliser les deux limites suivantes:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}}$$

Penchons-nous d'abord sur le premier problème.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

on doit s'assurer que la calculatrice est en mode <u>radian</u>

Pour lever l'indétermination, on doit transformer l'expression. Il n'est pas possible présentement de procéder de cette façon étant donné la nature de la fonction. Contentons-nous seulement d'estimer la limite en question en utilisant une calculatrice.

En examinant les tableaux du bas,

x	1	0,5	0,1	0,05	0,001
$\frac{\sin x}{x}$	0,84147	0,95885	0,99833	0,99958	0,99999

x	-1	-0,5	-0,1	-0,05	-0,001
$\frac{\sin x}{x}$	0,84147	0,95885	0,99833	0,99958	0,99999

on obtient

$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \displaystyle \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Si le tableau avait été complété en *mode degré*, on aurait obtenu une valeur limite de 0,01745... On verra à la section 3 que les dérivées des fonctions trigonométriques ont une forme beaucoup plus simple lorsque la limite précédente vaut 1 plutôt que 0,01745... Pour cette raison, le radian sera préféré au degré comme mesure d'angle dans le calcul différentiel.

exemple 6.2.3

Sachant que $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ évaluer dans $\overline{\mathbf{R}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2} .$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2} &= \frac{1}{4}\left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right]\left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right] \\ &= \frac{1}{4}\,(1)\,(1) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

exemple 6.2.4

Sachant que $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ évaluer dans $\overline{\mathbf{R}}$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{3\sin \theta - 5\theta}{2\theta + \sin \theta}$$

$\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{3\sin \theta - 5\theta}{2\theta + \sin \theta} =$

$\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{3\,\frac{\sin \theta}{\theta} - 5}{2 + \frac{\sin \theta}{\theta}} \right)$

rép: $-\frac{2}{3}$

exemple 6.2.5

Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ évaluer dans $\overline{\mathbf{R}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

---

on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de (cos x - 1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right]\left[\frac{-\sin x}{\cos x + 1}\right]$$

la limite d'un produit est égale au produit des limites si chacune des limites existe

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin x}{x}\right] \cdot \lim_{x \to 0} \left[\frac{-\sin x}{\cos x + 1}\right]$$

$\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\sin x}{x}\right] = 1$

$$= 1 \cdot \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

exemple 6.2.6

Sachant que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ évaluer dans $\overline{\mathbf{R}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} .$$

---

rép: 2

proposition 6.2.2

*sin x et cos x sont deux fonctions continues sur **R***

Si g(x) est continue sur l'intervalle ouvert I alors la fonction

a) $f(x) = \sin g(x)$ est continue sur I,
b) $f(x) = \cos g(x)$ est continue sur I.

exemple 6.2.7

Étudier la continuité de $f(x) = \cos\sqrt{1 - x}$ sur $]0, 2\pi[$.

$$f(x) = \underbrace{\cos\overbrace{\boxed{\sqrt{1 - x}}}^{\substack{\text{continue sur }]-\infty,\, 1[\\ \text{(forme irrationnelle)}}}}_{\substack{\text{la fonction } f(x) \text{ est donc} \\ \text{continue sur }]-\infty,\, 1[\\ \text{(prop. 6.2.2)}}}$$

La fonction n'est donc pas continue sur $]0, 2\pi[$.

exemple 6.2.8

Étudier la continuité de $f(x) = \text{tg } x$ sur $]0, 2\pi[$.

$$\underbrace{f(x) = \tan x = \frac{\overbrace{\boxed{\sin x}}^{\substack{\textit{la fonction sinus est continue sur } \boldsymbol{R} \\ \text{(prop. 6.2.2)}}}}{\underbrace{\boxed{\cos x}}_{\substack{\text{la fonction cosinus est} \\ \text{continue sur R (prop. 6.2.2)}}}}}_{\substack{\text{la fonction } f(x) \text{ est donc continue sur R} \\ \text{(l'intersection des deux réponses du haut)} \\ \text{sauf pour les valeurs qui annulent le} \\ \text{dénominateur c'est-à-dire sauf pour} \\ \{\pm\pi/2,\, \pm 3\pi/2,\, ...\} \text{ (prop.2.2.3)}}}$$

La fonction n'est donc pas continue sur $]0, 2\pi[$.

exemple 6.2.9

Étudier la continuité de $f(x) = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$ sur $]0, 2\pi[$.

rép: la fonction n'est pas continue sur $]0, 2\pi[$
(elle présente deux discontinuités une en $x = \pi/4$ et une en $x = 5\pi/4$)

exemple 6.2.10 Étudier la continuité de $f(x) = \sqrt{2 \sin x + 3}$ sur $]0, 2\pi[$.

rép: la fonction est continue sur $]0, 2\pi[$

Exercices 6.2

1. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to 1} (3x + 2) \cos \pi x$

b) $\lim\limits_{x \to \pi/3} \sec 2x$

c) $\lim\limits_{x \to -\pi} \sin^2\left(\frac{x - \pi}{8}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} (\text{tg } x - \sec x)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \text{cosec}^2 x$

f) $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \sec x$

g) $\lim\limits_{x \to \pi^-} \text{cotg } x$

h) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \text{cosec } x$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \text{cotg}\left(\frac{1}{x}\right)$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + \sin x\right)$

k) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sin x}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x}$

m) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \sqrt{\sin x - 1}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 2}{1 - \cos x}\right)$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \sin x}{4x}$

p) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{tg}^2 x}{x^2}$

q) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

r) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\cos^2 x - 1}{x \sin x}\right)$

s) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x - \sin x}{x}\right)$

t) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x - \sin x}{x}\right)$

u) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x + \text{tg } x}{\sin x}\right)$

v) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x^2 + 3x}\right)$

w) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{5x \sin x}\right)$

x) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}\right)$

y) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 + \cos x) \sin^2 x}{3x^2}$

z) $\lim\limits_{x \to 0} (\text{cosec } x - \text{cotg } x)$

2. Étudier la continuité de chacune des fonctions sur $]0, 2\pi[$.

a) $f(x) = x + \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

c) $f(x) = \sec x + \text{tg } x$

d) $h(x) = \dfrac{\text{cotg } x}{1 + 2 \sin x}$

e) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \sin x}}{\cos x + 2}$

Réponses aux exercices 6.2

1.
a)	-5	n)	$-\infty$
b)	-2	o)	$3/4$
c)	$1/2$	p)	1
d)	1	q)	2
e)	∞	r)	-1
f)	∞	s)	0
g)	$-\infty$	t)	1
h)	$-\infty$	u)	2
i)	∞	v)	$1/3$
j)	$\nexists$	w)	$-1/10$
k)	$\nexists$	x)	2
l)	0	y)	$2/3$
m)	$\nexists$	z)	0

2. a) la fonction est continue sur $]0, 2\pi[$.
   b) la fonction n'est pas continue sur $]0, 2\pi[$ (elle est discontinue en $x = \pi$).
   c) la fonction n'est pas continue sur $]0, 2\pi[$ (elle est discontinue en $x = \pi/2$ et $x = 3\pi/2$).
   d) la fonction n'est pas continue sur $]0, 2\pi[$ (elle est discontinue en $x = \pi$, $x = 7\pi/6$ et $x = 11\pi/6$).
   e) la fonction n'est pas continue sur $]0, 2\pi[$ (elle est continue sur $]0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi[$).
   f) la fonction est continue sur $]0, 2\pi[$.

6.3 Dérivée (fonctions trigonométriques)

proposition 6.3.1

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin x = \cos x}$$

par définition

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$\sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sin x \cos \Delta x - \sin x) + \sin \Delta x \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1) + \sin \Delta x \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\sin x \left(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}\right) + \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right) \cos x \right]$$

la limite d'une somme est égale à la somme des limites et la limite d'un produit est égale au produit des limites

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sin x \, . \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right) . \lim_{\Delta x \to 0} \cos x$$

** les deux limites ont été évaluées à la section précédente*

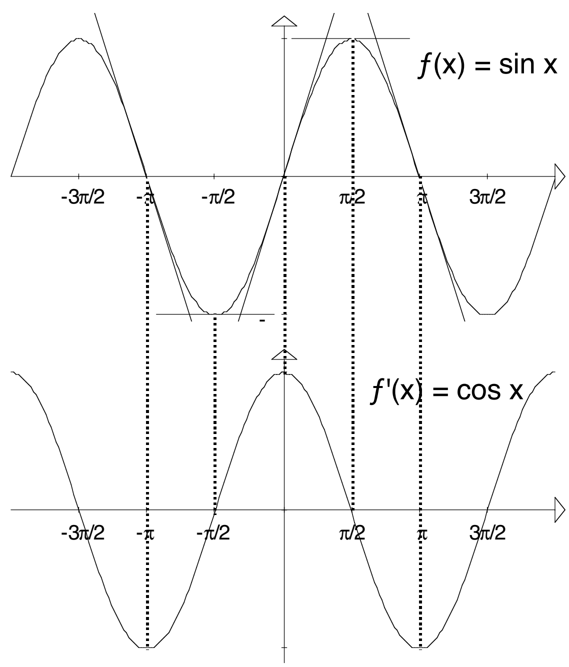
$$= \sin x \, . \, (0)^{*} + (1)^{*} \, . \cos x$$

$$= \cos x$$

La dérivée de la fonction sinus en $x = c$ correspond à l'image de la fonction cosinus en $x = c$.

Si $f(x) = \sin x$ alors

$f'(-\pi) = \cos(-\pi) = -1$,
$f'(-\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0$,
$f'(0) = \cos 0 = 1$,
$f'(\pi) = \cos \pi = -1$, etc.



proposition 6.3.2

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

démonstration

exemple 6.3.1

Trouver $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{1 - \cos x}\right)$.

toutes les formules de dérivation déjà vues s'appliquent ainsi que les deux nouvelles règles:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{1 - \cos x}\right) = \frac{(1 - \cos x)\overbrace{\frac{d}{dx}\sin x}^{\cos x} - \sin x\ \overbrace{\frac{d}{dx}(1 - \cos x)}^{\sin x}}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \cos x)\cos x - \sin x \sin x}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(1 - \cos x)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\cos x - 1}$$

proposition 6.3.3

$$\frac{d}{dx}\,\text{tg } x = \sec^2 x$$

démonstration

$$\frac{d}{dx}\,\text{tg } x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}\sin x}^{\cos x} - \sin x \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}\cos x}^{-\sin x}}{\cos^2 x}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$\frac{1}{\cos x} = \sec x$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{ou} \quad \sec^2 x$$

proposition 6.3.4

$$\frac{d}{dx}\,\text{cotg } x = -\,\text{cosec}^2 x$$

démonstration

proposition 6.3.5

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \,\text{tg } x$$

démonstration

proposition 6.3.6

$$\frac{d}{dx}\,\text{cosec } x \;=\; -\,\text{cosec } x \,\text{cotg } x$$

démonstration

exemple 6.3.2

Trouver $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\text{tg}^2\,\theta}{2}\right)$.

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\text{tg}^2\,\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\overbrace{\frac{d}{d\theta}(\text{tg }\theta)^2}^{2\,(\text{tg }\theta)\,\overbrace{\frac{d}{d\theta}\text{tg }\theta}^{\sec^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\;(2\;\text{tg }\theta\;\sec^2\theta)$$

$$= \text{tg }\theta\;\sec^2\theta$$

Lorsque l'argument est composé on aura recours à la règle de dérivation en chaîne.

exemple 6.3.3

Trouver $\frac{d}{dx}\;\sin 2x$

$y = \sin 2x$ est le résultat de la composition de $\begin{cases} y = \sin u \\ u = 2x \end{cases}$

Par la règle de dérivation en chaîne, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\sin 2x = \frac{d}{du}\sin u \;.\; \frac{d}{dx}\,2x$$

$$= \cos u \;.\; (2)$$

puisque u = 2x

$$= 2\cos 2x$$

De la même façon on obtient les formules générales des 6 fonctions trigonométriques.

règle 14	$\frac{d}{dx} \sin f(x) = \cos f(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 15	$\frac{d}{dx} \cos f(x) = -\sin f(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 16	$\frac{d}{dx} \text{tg } f(x) = \sec^2 f(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 17	$\frac{d}{dx} \text{cotg } f(x) = -\text{cosec}^2 f(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 18	$\frac{d}{dx} \sec f(x) = \sec f(x) \text{ tg } f(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 19	$\frac{d}{dx} \text{cosec } f(x) = -\text{cosec } f(x) \text{ cotg } f(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$

exemple 6.3.4 Trouver $\frac{d}{dx} \sin(3x^2 + 5)$.

par la règle 14

$$\frac{d}{dx} \sin(3x^2 + 5) = \cos(3x^2 + 5) \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(3x^2 + 5)}^{6x}$$

$$= 6x \cos(3x^2 + 5)$$

exemple 6.3.5 Trouver $\frac{d}{dx} \text{tg } (5 - 2x)^3$.

par la règle 16

$$\frac{d}{dx} \text{tg } (5 - 2x)^3 = \sec^2(5 - 2x)^3 \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(5 - 2x)^3}^{3(5-2x)^2 \overbrace{\frac{d}{dx}(5-2x)}^{-2}}$$

$$= -6(5 - 2x)^2 \sec^2(5 - 2x)^3$$

exemple 6.3.6 Trouver $\frac{d}{dt} \sec^4(5 - 2t)$.

rép: $-8 \sec^4(5 - 2t) \text{ tg}(5 - 2t)$

exemple 6.3.7

Trouver $\frac{d}{dv} \cos^4 (5 - 2v)^3$.

rép: $24(5 - 2v)^2 \sin(5 - 2v)^3 \cos^3(5 - 2v)^3$

exemple 6.3.8

Trouver $\frac{d^{39}}{dx^{39}} \sin x$.

rép: $- \cos x$

exemple 6.3.9

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $\sin^2 y = y - \cos x$.

on trouve y' implicitement

$$\sin^2 y = y - \cos x$$

$$(\sin y)^2 = y - \cos x$$

$$2 \sin y \overbrace{\frac{d}{dx} \sin y}^{\cos y \frac{dy}{dx}} = \frac{dy}{dx} - (- \sin x)$$

$$2 \sin y \cos y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + \sin x$$

$$2 \sin y \cos y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} (2 \sin y \cos y - 1) = \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2\sin y \cos y - 1} \text{ ou } \frac{\sin x}{\sin 2y - 1}$$

Exercices 6.3

1. Trouver $\frac{dy}{dx}$.

a) $y = \sin 3x$

b) $y = \cos(1 - 2x)$

c) $y = 3 \sin x^2$

d) $y = \cos^3(4x - 1)$

e) $y = \frac{\sin^2(1 - 3x)^3}{18}$

f) $y = 4\sqrt{\sin \sqrt{x}}$

g) $y = \sin^2(\cos 2x)$

h) $y = \sin x - x \cos x$

i) $y = (\cos x + 2x \sin x)^3$

j) $y = \sec 3x$

k) $y = 2 \operatorname{tg} \sqrt{x}$

l) $y = \operatorname{cosec}^2 5x$

m) $y = \frac{\sec^3 2x}{3}$

n) $y = \operatorname{cotg} \sqrt{3x^2 + 1}$

o) $y = \sqrt{\operatorname{cosec} x^2}$

p) $y = \sec^3(2x - 1)^2$

q) $y = \frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x}$

r) $y = \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5}$

s) $y = 2x \sin x + 2 \cos x - x^2 \cos x$

t) $y = 2 \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$

u) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

v) $y = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$

w) $y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

x) $y = \operatorname{cotg}^4 x - \operatorname{cosec}^4 x$

y) $y = x \cos^2 x \sin^3 x$

z) $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$

2. Trouver y'.

a) $y = e^{2 \sin 5x}$

b) $y = \sec e^{3x}$

c) $y = \ln|\sec x|$

d) $y = \ln|\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} 2x|$

e) $y = \ln(\cos^2 e^{3x})$

3. Trouver $\frac{d^2y}{dx^2}$.

   a) $y = (1 + \cos x) \sin x$

   b) $y = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

   c) $y = 3x^2 \sin x - 6 \sin x - x^3 \cos x + 6x \cos x$

4. Trouver

   a) $\frac{d^{36}}{dx^{36}} \sin x$

   b) $\frac{d^{61}}{dx^{61}} \cos x$

5. Trouver $\frac{dy}{dx}$ implicitement.

   a) $x \sin x + y \cos y = 0$

   b) $\cos 3y = \operatorname{tg} 2x$

   c) $x \cos y = \sin(x + y)$

6. Trouver $\frac{dy}{dx}$ en utilisant le procédé de dérivation logarithmique.

   a) $y = \dfrac{x \sin^3 x}{\sqrt{1 + \sec^2 x}}$

   b) $y = (\sin x)^x \quad (\sin x > 0)$

Réponses aux exercices 6.3

1. a) $3 \cos 3x$

b) $2 \sin(1 - 2x)$

c) $6x \cos x^2$

d) $-12 \sin(4x - 1) \cos^2(4x - 1)$

e) $- (1 - 3x)^2 \sin(1 - 3x)^3 \cos(1 - 3x)^3$

f) $\dfrac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x \sin \sqrt{x}}}$

g) $-4 \sin 2x \sin(\cos 2x) \cos(\cos 2x)$

h) $x \sin x$

i) $3(\sin x + 2x \cos x) (\cos x + 2x \sin x)^2$

j) $3 \sec 3x \operatorname{tg} 3x$

k) $\dfrac{\sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

l) $-10 \operatorname{cotg} 5x \operatorname{cosec}^2 5x$

m) $2 \sec^3 2x \operatorname{tg} 2x$

n) $- \dfrac{3x \operatorname{cosec}^2 \sqrt{3x^2 + 1}}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

o) $- x \operatorname{cotg} x^2 \sqrt{\operatorname{cosec} x^2}$

p) $12(2x - 1) \sec^3(2x - 1)^2 \operatorname{tg}(2x - 1)^2$

q) $\sec^2 x$

r) $\sec^5 x \operatorname{tg}^3 x$

s) $x^2 \sin x$

t) $3 \cos x \cos 2x$

u) $\dfrac{-1}{1 + \sin x}$

v) $- \dfrac{4 \sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2}$

w) $\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} \; \dfrac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$

x) $4 \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^2 x$

y) $\sin^2 x \cos x (\sin x \cos x - 2x \sin^2 x + 3x \cos^2 x)$

z) $\dfrac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$

2. a) $10 e^{2 \sin 5x} \cos 5x$

b) $3 e^{3x} \sec(e^{3x}) \operatorname{tg}(e^{3x})$

c) $\operatorname{tg} x$

d) $2 \operatorname{cosec} 2x$

e) $-6 e^{3x} \operatorname{tg}(e^{3x})$

3. a) $- (4 \cos x + 1) \sin x$

b) $-16 \cos 4x$ ou $-16(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

c) $x^2(3 \sin x + x \cos x)$

4. a) $\sin x$

b) $- \sin x$

5. a) $\dfrac{\sin x + x\cos x}{y\sin y - \cos y}$

   b) $-\dfrac{2\sec^2 2x}{3\sin 3y}$

   c) $\dfrac{\cos y - \cos(x+y)}{x\sin y + \cos(x+y)}$

6. a) $\dfrac{x\sin^3 x}{\sqrt{1 + \sec^2 x}}\left(\dfrac{1}{x} + 3\,\mathrm{cotg}\, x - \dfrac{\sec^2 x\,\mathrm{tg}\, x}{1 + \sec^2 x}\right)$

   b) $(\sin x)^x\left[\ln(\sin x) + x\,\mathrm{cotg}\, x\right]$

6.4 Applications *(fonctions trigonométriques)*

exemple 6.4.1

Tracer le graphique de la fonction $f(x) = 3x - 4 \sin x + \sin 2x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

---

a) dom $f = [0, 2\pi]$,

la fonction est continue sur ***R***

b) f est continue sur $[0, 2\pi]$,

c) sans intérêt puisque l'étude porte seulement sur $[0, 2\pi]$,

les asymptotes horizontales et obliques sont sans intérêt lorsque l'étude porte sur [0,2π]

d) asymptote verticale: aucune puisque la fonction ne possède pas de point de discontinuité sur $[0, 2\pi]$,

e) $$f'(x) = (2 \cos x - 1)^2 \quad = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \pi/3,\ 5\pi/3 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ n.c.: $\{ \pi/3, 5\pi/3 \}$

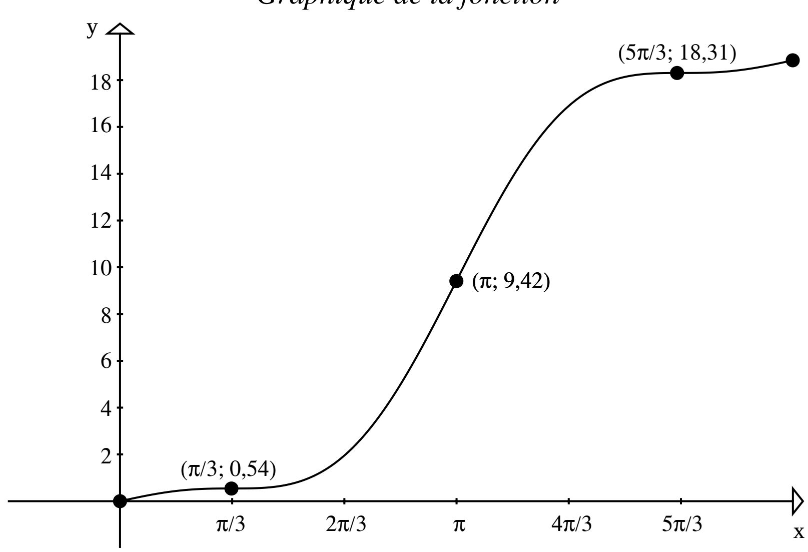
$$f''(x) = 4 \sin x\,(1 - 2 \cos x) \quad = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0,\ \pi/3,\ \pi,\ 5\pi/3,\ 2\pi \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ n.t.: $\{ 0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi \}$

f) tableau de variation de la fonction.

x	0		π/3		π		5π/3		2π
$f'(x)$		+	0	+	+	+	0	+	
$f''(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	0		PI: (0,54)		PI: (9,42)		PI: (18,31)		18,85

Graphique de la fonction

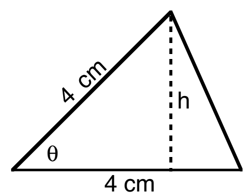


exemple 6.4.2

Un triangle a deux côtés de 4 cm de longueur.

a) Quelle doit être la mesure de l'angle θ déterminé par ces deux côtés pour que l'aire du triangle soit maximale?
b) Quelle est l'aire maximale?

- Représentation graphique et identification des variables.



Soit

θ : l'angle (en radians) déterminé par les deux côtés de 4 cm,
h: la hauteur du triangle (en cm)

- Quantité à optimiser.

Soit A l'aire du triangle: $A = \frac{4h}{2} = 2h.$

Étant donné que $\sin\theta = \frac{h}{4}$

alors $h = 4 \sin\theta$

et par conséquent $A = 2(4 \sin\theta)$

$\Rightarrow$ $\boxed{A = 8 \sin\theta}$

dans un triangle tout angle est compris entre 0° et 180°

- Domaine et étude de continuité.
  - dom $A =]0, \pi[$,
  - A est continue sur $]0, \pi[$ ($\sin\theta$ est continue sur **R**).

- Extremums absolus.

$$A' = 8\cos\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta = \pi/2 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases} \Rightarrow \text{n.c.: } \{\pi/2\}$$

θ	0		π/2		π
A'		+	0	-	
A	0	↗	MAX ABSOLU (8)	↘	0

- Réponse du problème.

L'aire maximale est 8 cm^2 lorsque l'angle θ est 90°.

Exercices 6.4

1. Calculer la pente de la tangente à chacune des fonctions pour les valeurs suivantes:

$$x = 0 \quad ; \quad x = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad x = -\pi$$

a) $f(x) = \sin 3x$

b) $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $h(x) = \cos 3x - 3 \sin x$.

2. Trouver les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les extremums relatifs de chacune des fonctions sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = -(\sin x + \cos x)$ sur $]0, 2\pi[$

b) $g(x) = \sin^2 x - \cos x$ sur $]0, 2\pi[$

c) $h(x) = \dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{3}$ sur $]0, \pi[$.

3. Pour chacune des fonctions, déterminer sur l'intervalle indiqué:
   - pour quelles valeurs la fonction est continue,
   - les *asymptotes verticales* de la fonction,
   - $f'(x)$ et les *nombres critiques* de la fonction,
   - $f''(x)$ et les *nombres de transition* de la fonction,
   - le *tableau de variation* de la fonction,
   - le *graphique* de la fonction.

a) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ sur $[0, 2\pi]$

b) $g(x) = x + \cos x$ sur $[0, 2\pi]$

c) $h(x) = 4 \sin^2 x$ sur $[0, \pi]$

4. L'équation $s(t) = 10 \sin\left(5t - \frac{\pi}{4}\right)$ décrit la position (en cm) d'une particule après t secondes par rapport à un point fixe O.

a) Représenter graphiquement ce mouvement sur une période.

b) Déterminer la vitesse et l'accélération de la particule au temps t.

c) Quelle est la position, la vitesse et l'accélération initiale de la particule.

d) Est-ce que la particule se rapproche ou s'éloigne du point O au temps $t = 0$?

e) La particule accélère-t-elle ou décélère-t-elle au temps $t = 0$?

5. Après t secondes, la hauteur atteinte par un objet en mouvement oscillatoire est donnée par l'équation

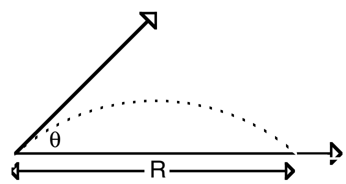
$$y = a \cos t + b \sin t + 5 \quad \text{centimètres}$$

Si au temps $t = 0$ s, la hauteur de l'objet est $y = 6$ cm et sa vitesse est $v = 3$ cm/s alors trouver

a) a et b,
b) l'accélération initiale de l'objet.

6. Un golfeur frappe une balle avec une vitesse initiale $V_o = 30$ m/s. En négligeant la résistance de l'air, la portée R en mètres de la balle frappée à un angle θ du plan horizontal est donnée par

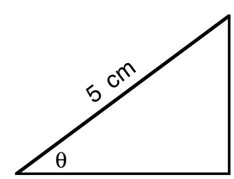
$$R = \frac{V_o^2 \sin 2\theta}{g} \quad \text{où } g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$



a) Calculer la portée pour $\theta = 30°$ puis pour $\theta = 40°$.
b) Déterminer l'angle θ pour lequel la portée R sera maximale.
c) Si la balle est frappée par le golfeur avec l'angle obtenu en b), calculer la distance horizontale R parcourue par celle-ci.

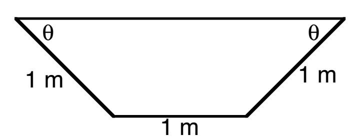
7. Soit un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 5 cm.

a) Déterminer la valeur de l'angle θ qui maximise l'aire du triangle.
b) Quelle est cette aire maximale?



8. Trouver la valeur de l'angle θ pour que l'aire du trapèze de la figure de droite soit maximale. Trouver cette aire maximale.

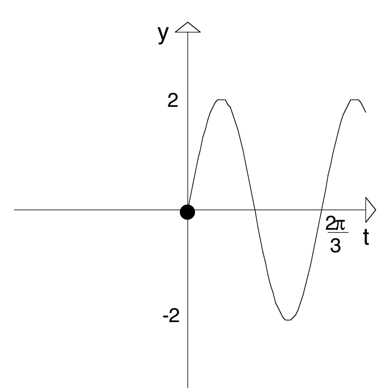
$$\boxed{\text{aire du trapèze} = \frac{(\text{grande base} + \text{petite base})\ \text{hauteur}}{2}}$$



9. Un poids suspendu à l'extrémité d'un ressort décrit un mouvement de va-et-vient de telle façon que sa position y (en cm) par rapport à un point fixe O après t secondes est représentée par le graphique ci-contre.

Au temps $t = \frac{5\pi}{18}$ secondes,

a) quelle est la position du poids ?
b) quelle est la vitesse du poids ?
c) quelle est l'accélération du poids ?
d) le poids accélère ou décélère ?



Réponses aux exercices 6.4

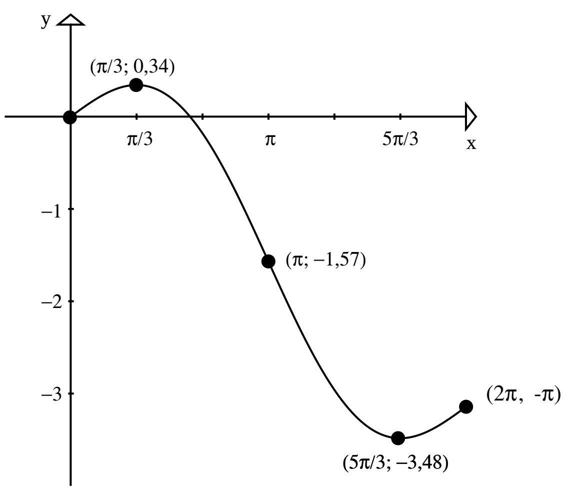
1. a) 3 0 -3 b) 0 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\frac{1}{2}$ c) -3 3 3

2. a) croissante sur $]\pi/4, 5\pi/4[$
décroissante sur $]0, \pi/4[\cup]5\pi/4, 2\pi[$
minimum relatif $(\pi/4, -\sqrt{2})$
maximum relatif $(5\pi/4, \sqrt{2})$

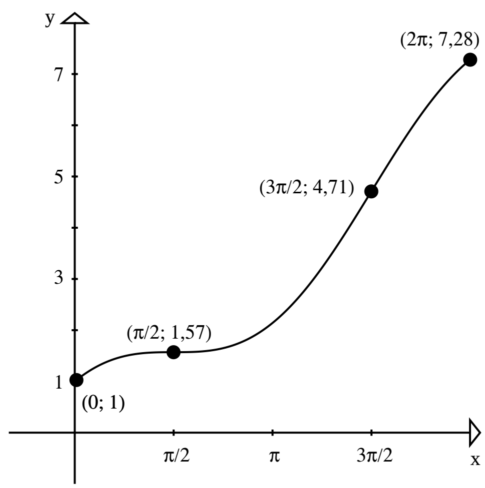
b) croissante sur $]0, 2\pi/3[\cup]\pi, 4\pi/3[$
décroissante sur $]2\pi/3, \pi[\cup]4\pi/3, 2\pi[$
minimum relatif $(\pi, 1)$
maximums relatifs $(2\pi/3, 5/4)$, $(4\pi/3, 5/4)$

c) croissante sur $]\pi/4, \pi/2[$
décroissante sur $]0, \pi/4[\cup]\pi/2, \pi[$
minimum relatif $(\pi/4, \sqrt{2}/6)$
maximum relatif $(\pi/2, 1/3)$

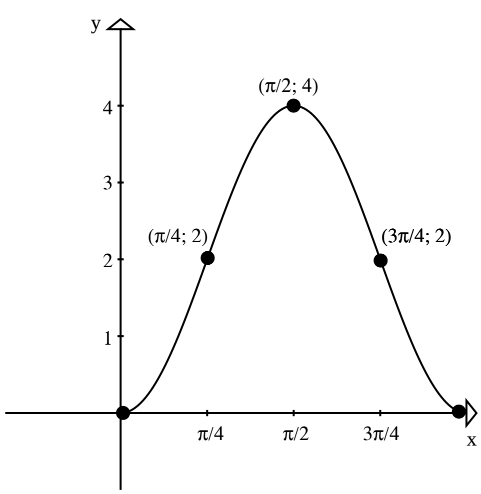
3. a) $f'(x) = \cos x - 1/2$; $f''(x) = -\sin x$



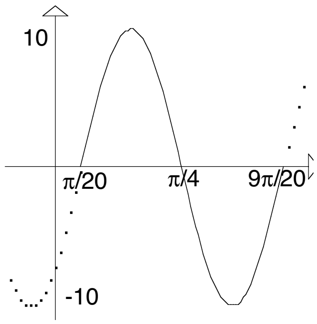
b) $f'(x) = 1 - \sin x$; $f''(x) = -\cos x$



c) $f'(x) = 8 \sin x \cos x$ ou $4 \sin 2x$;
$f''(x) = 8(\cos^2 x - \sin^2 x)$ ou $8 \cos 2x$



4 a)



b) $s(t) = 10 \sin(5t - \pi/4)$; $v(t) = 50 \cos(5t - \pi/4)$; $a(t) = -250 \sin(5t - \pi/4)$

c) position initiale: $-5\sqrt{2}$ cm ; vitesse initiale: $25\sqrt{2}$ cm/s ; accélération initiale: $125\sqrt{2}$ cm/s^2

d) se rapproche du point fixe O (car la position et la vitesse sont de signe contraire)

e) accélère (car la vitesse et l'accélération initiale sont du même signe)

5. a) $a = 1$ et $b = 3$

b) -1 cm/s^2 (à ce moment la vitesse diminue et la hauteur augmente)

6. a) Lorsque l'angle est de 30°, la portée est 79,5 m,
lorsque l'angle est de 40°, la portée est 90,4 m,

b) 45°

c) 91,8 m

7. a) 45°

b) 6,25 cm^2

8. a) 60°

b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ m^2

9. a) 1 cm

b) $-3\sqrt{3}$ cm/s

c) -9 cm/s^2

d) il accélère puisque v et a sont de même signe

6.5 Rappel (fonctions trigonométriques inverses)

Il arrive souvent que l'on doive trouver la mesure d'un angle à partir d'une équation trigonométrique. Par exemple $\sin x = 1/2$ possède plusieurs solutions.

$$\sin x = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \to (\sqrt{3}/2,\ 1/2) & \Rightarrow \quad x = \pi/6 \\ x \to (-\sqrt{3}/2,\ 1/2) & \Rightarrow \quad x = 5\pi/6 \end{cases}$$

l'ensemble des solutions de $\sin x = 1/2$ correspond à

$$\begin{cases} \pi/6 + 2\pi n \\ 5\pi/6 + 2\pi n \end{cases}$$

où $n \in \mathbf{Z}$

Cette fonction étant périodique de période de 2π, les angles $13\pi/6$, $17\pi/6$, ... ou $-7\pi/6$, $-11\pi/6$, ... sont autant de solutions possibles.

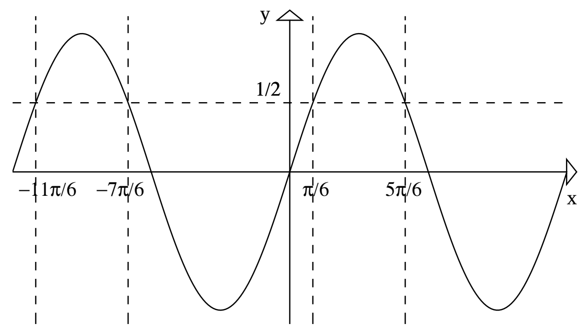


figure 6.5.1

En principe, ces fonctions ne peuvent pas avoir de réciproque qui soit fonctionnelle. En pratique toutefois on peut remédier à cet inconvénient en limitant leur domaine.

Soit Sin la fonction définie par l'équation.

$$y = \sin x, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$$

la courbe en trait continu correspond au graphique de la fonction Sin tandis que la courbe en pointillés fait partie du graphique de la fonction sin

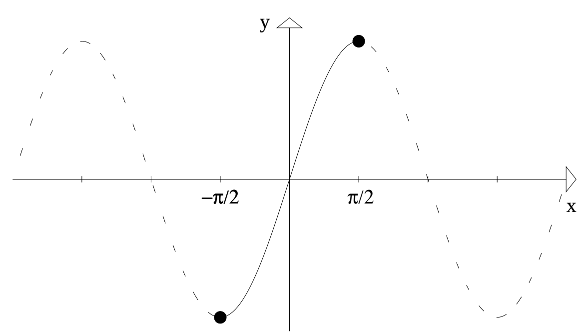


figure 6.5.2

Ainsi définie cette fonction est biunivoque*. Par conséquent elle possède une réciproque fonctionnelle que l'on appelle

$$\mathit{Arc\ Sin} \quad \text{ou} \quad \mathit{Sin}^{-1}$$

Pour éviter toute confusion avec $(\sin x)^{-1}$ (l'inverse multiplicatif de $\sin x$), on utilisera la notation Arc Sin plutôt que Sin^{-1}. Il en sera de même pour les autres fonctions trigonométriques.

** une relation est biunivoque si tout élément du domaine est associé à un et un seul élément de l'image et réciproquement tout élément de l'image est associé à un et un seul élément du domaine*

définition 6.5.1
Arc Sin

La fonction Arc Sin est définie par l'équation

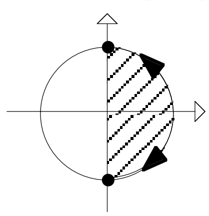
$$y = \arcsin x \iff \begin{cases} \sin y = x \\ -\pi/2 \le y \le \pi/2 \end{cases}$$

pourquoi utilise-t-on le nom Arc Sin ?

Quand on cherche à évaluer arcsin 1/2, on cherche à trouver la longueur de l'arc d'un cercle de rayon unitaire dont le sinus vaut 1/2. Puisque par définition la réponse doit se situer dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, on obtient $\arcsin 1/2 = \pi/6$. La longueur de l'arc de cercle demandée est donc $\pi/6$ ou 0,52.

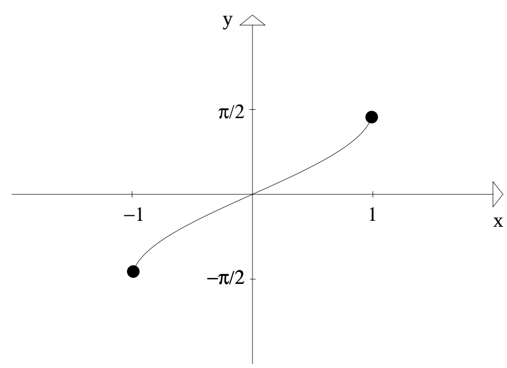
On peut vérifier les résultats qui figurent dans tableau du bas puis, les comparer avec les points du graphique de la fonction Arc Sin.

on retient que la fonction Arc Sin a pour domaine l'intervalle [-1, 1]



et pour image, l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ (un angle de la région hachurée)

x	arc sin x
1	$\pi/2$
$\sqrt{3}/2$ (0.87)	$\pi/3$
$\sqrt{2}/2$ (0,71)	$\pi/4$
$1/2$	$\pi/6$
0	0
$-1/2$	$-\pi/6$
$-\sqrt{2}/2$ (-0,71)	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$ (-0,87)	$-\pi/3$
-1	$-\pi/2$



- dom Arc Sin = [-1, 1]
- ima Arc Sin = $[-\pi/2, \pi/2]$

exemple 6.5.1

Évaluer

a) $\sin(\arcsin \sqrt{2}/2)$,
b) $\arcsin(\sin(-\pi/3))$.

---

a) $\sin(\arcsin \sqrt{2}/2) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$,
b) $\arcsin(\sin(-\pi/3)) = \arcsin(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3$.

D'une façon générale

$$\begin{cases} \sin(\arcsin x) = x \quad \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ \arcsin(\sin y) = y \quad \text{si} \quad y \in [-\pi/2, \pi/2] \end{cases}$$

En procédant de la même façon définissons maintenant la fonction Arc Cos. Restreignons d'abord le domaine de la fonction cosinus de façon à obtenir une fonction biunivoque. Soit Cos la fonction définie par l'équation $y = \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$.

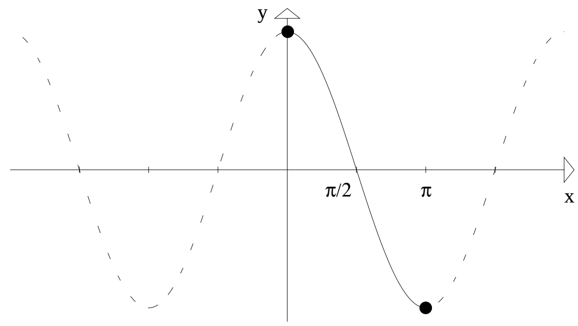


figure 6.5.3

La fonction Cos possède une réciproque fonctionnelle que l'on appelle

Arc Cos ou *Cos*$^{-1}$

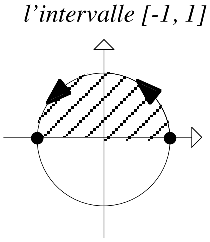
définition 6.5.2
Arc Cos

La fonction Arc Cos est définie par l'équation

$$y = \arccos x \iff \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$$

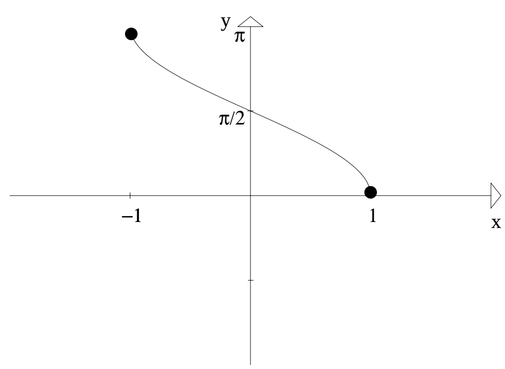
On peut vérifier les résultats qui figurent dans tableau du bas puis, les comparer avec les points du graphique de la fonction Arc Cos.

on retient que la fonction Arc Cos a pour domaine l'intervalle [-1, 1]



et pour image, l'intervalle [0, π] (un angle de la région hachurée)

x	*arccos x*
1	*0*
$\sqrt{3}/2$ *(0.87)*	$\pi/6$
$\sqrt{2}/2$ *(0,71)*	$\pi/4$
1/2	$\pi/3$
0	$\pi/2$
-1/2	$2\pi/3$
$-\sqrt{2}/2$ *(-0,71)*	$3\pi/4$
$-\sqrt{3}/2$ *(-0,87)*	$5\pi/6$
-1	π



- dom Arc Cos = [-1, 1]
- ima Arc Cos = [0, π]

☞ De plus on a
$$\begin{cases} \cos(\arccos x) = x & \text{si} \quad x \in [-1, 1] \\ \arccos(\cos y) = y & \text{si} \quad y \in [0, \pi] \end{cases}$$

La fonction Arc Tg est la réciproque de la fonction Tangente définie par l'équation $y = \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

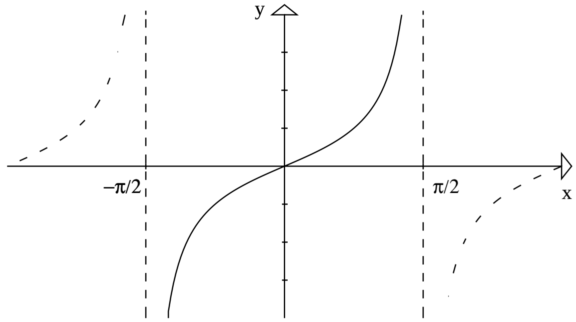


figure 6.5.4

La fonction Tg possède une réciproque fonctionnelle que l'on appelle

Arc Tg ou Tg^{-1}

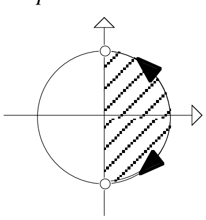
définition 6.5.3
Arc Tg

La fonction Arc Tg est définie par l'équation

$$y = \operatorname{arctg} x \iff \begin{cases} \operatorname{tg} y = x \\ -\pi/2 < y < \pi/2 \end{cases}$$

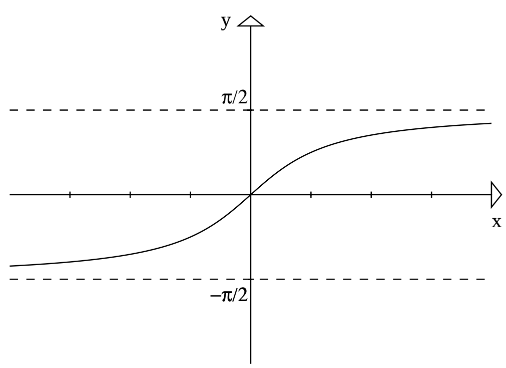
On peut vérifier les résultats qui figurent dans tableau du bas puis, les comparer avec les points du graphique de la fonction Arc Tg.

on retient que la fonction Arc Tg a pour domaine ***R***



et pour image, l'intervalle]-π/2, π/2[(un angle de la région hachurée)

x	*arctg x*
$\sqrt{3}$ *(1,73)*	*π/3*
1	*π/4*
$1/\sqrt{3}$ *(0,57)*	*π/6*
0	*0*
$-1/\sqrt{3}$ *(0,57)*	*-π/6*
-1	*-π/4*
$-\sqrt{3}$ *(-1,73)*	*-π/3*



• dom Arc Tg = **R**
• ima Arc Tg =]-π/2, π/2[

De plus on a
$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{si} \quad x \in \mathbf{R} \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y \quad \text{si} \quad y \in \,]-\pi/2, \pi/2[\end{cases}$$

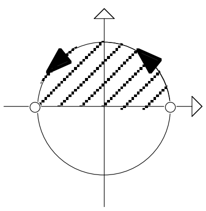
Les trois dernières fonctions trigonométriques inverses sont définies d'une façon analogue.

définition 6.5.4
Arc Cotg

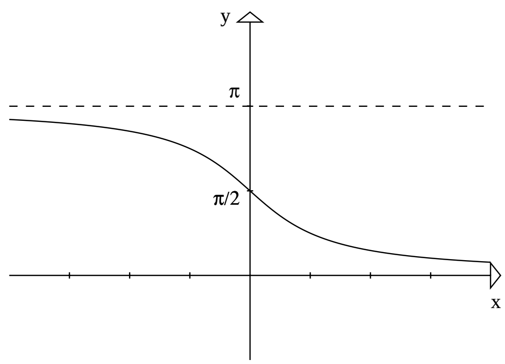
La fonction Arc Cotg est définie par l'équation

$$y = \operatorname{arccotg} x \iff \begin{cases} \operatorname{cotg} y = x \\ 0 < y < \pi \end{cases}$$

on retient que la fonction Arc Cotg a pour domaine ***R***



et pour image, l'intervalle]0, π[(un angle de la région hachurée)



• dom Arc Cotg = **R**
• ima Arc Cotg =]0, π[

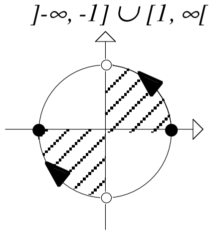
De plus on a $\begin{cases} \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x \quad \text{si} \quad x \in \mathbf{R} \\ \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} y) = y \quad \text{si} \quad y \in \,]0, \pi[\end{cases}$

définition 6.5.5
Arc Sec

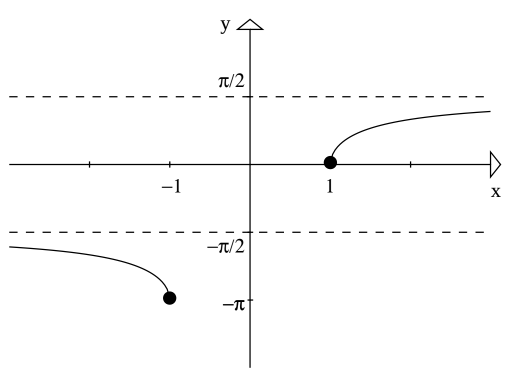
La fonction Arc Sec est définie par l'équation

$$y = \operatorname{arcsec} x \iff \begin{cases} \sec y = x \\ -\pi \leq y < -\pi/2 \ \text{ ou } \ 0 \leq y < \pi/2 \end{cases}$$

on retient que la fonction Arc Sec a pour domaine]-∞, -1] ∪ [1, ∞[



et pour image, [-π, -π/2[∪ [0, π/2[(un angle de la région hachurée)



• dom Arc Sec =]-∞, -1] ∪ [1, ∞[
• ima Arc Sec = [-π, -π/2[∪ [0, π/2[

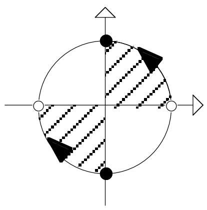
De plus on a $\begin{cases} \sec(\operatorname{arcsec} x) = x \quad \text{si} \quad x \in \,]-\infty, -1] \cup [1, \infty[\\ \operatorname{arcsec}(\sec y) = y \quad \text{si} \quad y \in [-\pi, -\pi/2[\cup [0, \pi/2[\end{cases}$

définition 6.5.6
Arc Cosec

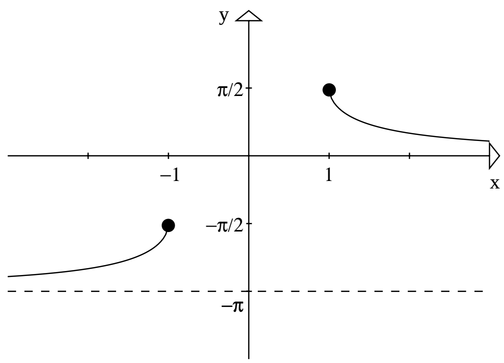
La fonction Arc Cosec est définie par l'équation

$$y = \text{arccosec } x \iff \begin{cases} \text{cosec } y = x \\ -\pi < y \leq -\pi/2 \text{ ou } 0 < y \leq \pi/2 \end{cases}$$

on retient que la fonction Arc Cosec a pour domaine
]-∞, -1] ∪ [1, ∞[



et pour image, l'intervalle
]-π, -π/2] ∪]0, π/2]
(un angle de la région hachurée)



- dom Arc Cosec =]-∞, -1] ∪ [1, ∞[
- ima Arc Cosec =]-π, -π/2] ∪]0, π/2]

De plus on a
$$\begin{cases} \text{cosec}(\text{arccosec } x) = x \quad \text{si} \quad x \in \,]-\infty, -1] \cup [1, \infty[\\ \text{arccosec}(\text{cosec } y) = y \quad \text{si} \quad y \in \,]-\pi, -\pi/2] \cup \,]0, \pi/2] \end{cases}$$

exemple 6.5.2

Évaluer (sans l'aide de votre calculatrice)

a) arccotg 1,

b) arccotg (-1),

c) arcsec $\sqrt{2}$,

d) arcsec $(-\sqrt{2})$,

e) arccosec 2,

f) arccosec (-2),

g) sin(arcsec (-1)),

h) cotg(arccotg 3),

L'évaluation des fonctions trigonométriques inverses s'effectue rapidement pour certaines valeurs de l'argument mais en général, on doit utiliser une calculatrice. Les calculatrices scientifiques permettent l'évaluation des fonctions Arcsin, Arccos et Arctg. Pour les trois dernières fonctions on utilise les identités suivantes.

1) $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \qquad \forall x \in \mathbf{R},$

l'identité 2 est de loin la plus utile

2) $$\operatorname{arcsec} x = \begin{cases} -\arccos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \leq -1 \\ \arccos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3) $$\operatorname{arccosec} x = \begin{cases} -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \pi & \text{si } x \leq -1 \\ \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

exemple 6.5.3

À l'aide d'une calculatrice (en mode radians) vérifier les évaluations suivantes.

a) $\operatorname{arctg} 3 = 1{,}25$

b) $\arcsin 0{,}2 = 0{,}20$

c) $\operatorname{arcsec} 1{,}5 = 0{,}84$

d) $\operatorname{arcsec} (-4) = -1{,}82$

e) Qu'arrive-t-il lorsqu'on tente d'évaluer $\arcsin 2$ à l'aide d'une calculatrice? Pourquoi?

exemple 6.5.4

Résoudre les équations suivantes (utiliser une calculatrice)

a) $5 \arcsin x = \pi$

b) $\cos(3x - 1) = 0{,}25 \qquad (0 < 3x - 1 < \pi/2)$

c) $\sin x - 2 \cos x = 0 \qquad (0 < x < \pi/2)$

exemple 6.5.5

Soit $y \in]0, \pi/2[$ tel que $y = \arcsin(3/5)$, trouver sans l'aide d'une calculatrice

a) $\sin y$ b) $\cos y$ c) $\text{tg } y$.

---

proposition 6.5.1

limite

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \quad (a, b \in \overline{\boldsymbol{R}})$ alors

a) $\lim\limits_{x \to a} \arcsin f(x) = \arcsin\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] = \arcsin b \qquad (-1 < b < 1)$

b) $\lim\limits_{x \to a} \arccos f(x) = \arccos\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] = \arccos b \qquad (-1 < b < 1)$

c) $\lim\limits_{x \to a} \text{arctg } f(x) = \text{arctg}\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] = \text{arctg } b$

d) $\lim\limits_{x \to a} \text{arccotg } f(x) = \text{arccotg}\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] = \text{arccotg } b$

e) $\lim\limits_{x \to a} \text{arcsec } f(x) = \text{arcsec}\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] = \text{arcsec } b \qquad (b < -1, b > 1)$

f) $\lim\limits_{x \to a} \text{arccosec } f(x) = \text{arccosec}\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] = \text{arccosec } b \quad (b < -1, b > 1)$

exemple 6.5.6

Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

---

prop. 6.5.1 b)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \arccos x = \arccos\left[\lim\limits_{x \to 0} x\right] = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \text{arctg}(3x^2 - 4) =$

c) $\lim\limits_{x \to 2\pi/3} \arcsin(\cos x) =$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \text{arccotg}\left(\dfrac{1}{x}\right) =$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \text{arcsec}\left(\dfrac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 + 8x + 12}\right)$

cas d'exception

arcsin(±1), arccos(±1), arcsec(±1), arccosec(±1)

Si à la suite de l'évaluation d'une limite on obtient arcsin(±1), arccos(±1), arcsec(±1) ou arccosec(±1) on est alors confronté à un nouveau cas d'exception. Chacune de ces limites peut exister et correspondre à son image lorsque la fonction est définie près de la valeur de l'argument. Autrement, elles n'existent pas.

- $\arcsin 1 = \begin{cases} \arcsin 1^+ \ \nexists \\ \arcsin 1^- = \pi/2 \end{cases}$ • $\arccos 1 = \begin{cases} \arccos 1^+ \ \nexists \\ \arccos 1^- = 0 \end{cases}$

- $\text{arcsec } 1 = \begin{cases} \text{arcsec } 1^+ = 0 \\ \text{arcsec } 1^- \ \nexists \end{cases}$ • $\text{arccosec } 1 = \begin{cases} \text{arccosec } 1^+ = \pi/2 \\ \text{arccosec } 1^- \ \nexists \end{cases}$

- $\arcsin -1 = \begin{cases} \arcsin -1^+ = -\pi/2 \\ \arcsin -1^- = \nexists \end{cases}$ • $\arccos -1 = \begin{cases} \arccos -1^+ = \pi \\ \arccos -1^- = \nexists \end{cases}$

- $\text{arcsec } -1 = \begin{cases} \text{arcsec } -1^+ \ \nexists \\ \text{arcsec } -1^- = -\pi \end{cases}$ • $\text{arccosec } -1 = \begin{cases} \text{arccosec } -1^+ \ \nexists \\ \text{arccosec } -1^- = -\pi/2 \end{cases}$

exemple 6.5.7

Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \arccos(\sin x) = \arccos\left[\lim\limits_{x \to \pi/2} \sin x\right]$

$= \arccos 1^-$ (car $\sin x \leq 1 \ \forall x$)

$= \arccos 1 = 0$ (puisque $-1 < 1^- < 1$)

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\arcsin x}{1 - x} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \arccos(x^2 - 1) =$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \text{arcsec } 2^x =$

les formes

arcsin(±∞), arccos(±∞), arctg(±∞), arccotg(±∞), arcsec(±∞), arccosec(±∞)

À l'aide des graphiques des fonctions trigonométriques inverses on admet sans peine que

- $\arcsin \infty \ \nexists$ • $\arccos \infty \ \nexists$ • $\text{arctg } \infty = \pi/2$
- $\arcsin(-\infty) \ \nexists$ • $\arccos(-\infty) \ \nexists$ • $\text{arctg}(-\infty) = -\pi/2$
- $\text{arccotg } \infty = 0$ • $\text{arcsec } \infty = \pi/2$ • $\text{arccosec } \infty = 0$
- $\text{arccotg}(-\infty) = \pi$ • $\text{arcsec}(-\infty) = -\pi/2$ • $\text{arccosec}(-\infty) = -\pi$

exemple 6.5.8

Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\text{arcsec}(1 - x^3)} =$

b) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{\text{arctg } x}{\text{arccotg } x} =$

proposition 6.5.2
continuité

Si $g(x)$ est une fonction continue sur l'intervalle ouvert I alors

a) $f(x) = \arcsin g(x)$ et $f(x) = \arccos g(x)$ sont continues sur I pourvu que $-1 < g(x) < 1 \ \forall \in I$,

b) $f(x) = \text{arctg } g(x)$ et $f(x) = \text{arccotg } g(x)$ sont continues sur I,

c) $f(x) = \text{arcsec } g(x)$ et $f(x) = \text{arccosec } g(x)$ sont continues sur I pourvu que $g(x) > 1$ ou $g(x) < -1 \ \ \forall \in I$.

exemple 6.5.9

Étudier la continuité de chacune des fonctions sur **R.**

a) $f(x) = \dfrac{\arccos x}{x}$

b) $g(x) = \dfrac{\text{arctg } x}{\arcsin x - \arccos x}$

Exercices 6.5

1. Évaluer sans l'aide d'une calculatrice.

a) $\arcsin 0$

b) $\arcsin(-1/2)$

c) $\arccos \sqrt{3}$

d) $\arccos(-\sqrt{3}/2)$

e) $\text{arctg}(\sqrt{3}/3)$

f) $\text{arctg}(-\sqrt{3})$

g) $\arccos(-\sqrt{2}/2)$

h) $\text{arccotg}(-\sqrt{3})$

i) $\text{arcsec}(2\sqrt{3}/3)$

j) $\text{arccosec}(1/2)$

k) $\text{arcsec}(-2)$

l) $\text{arccosec}(-2\sqrt{3}/3)$

m) $\text{cotg}(\text{arcsec}(-1))$

n) $\sec(\text{arctg } 1)$

o) $\sin(\arcsin 1 - \arccos(\sqrt{3}/2))$

p) $\arcsin(2 \cos(2\pi/3))$

2. Évaluer à l'aide d'une calculatrice.

a) $\arcsin(-0{,}6)$

b) $\text{arctg } 5$

c) $\arccos \sqrt{2}$

d) $\text{arcsec}(4/3)$

e) $\text{arcsec}(-\pi)$

f) $\arccos(\sqrt{5}/2)$

3. Soit $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

a) Si $\theta = \arcsin(1/3)$ alors trouver $\cos \theta$ et $\text{tg } \theta$.

b) Si $\theta = \text{arcsec}(\sqrt{5}/2)$ alors trouver $\sin \theta$ et $\text{cotg } \theta$.

c) Si $\theta = \arccos 3x$ alors trouver $\sin \theta$ et $\text{tg } \theta$.

d) Si $\theta = \text{arctg } x^2$ alors trouver $\sec \theta$ et $\sin \theta$.

(compléter ce numéro sans l'aide d'une calculatrice)

4. Résoudre sans l'aide d'une calculatrice.

a) $3 \arcsin x = \pi/2$

b) $\text{arctg}(x - 1) = \pi/3$

c) $2 \sin(\arcsin x) = 1/3$

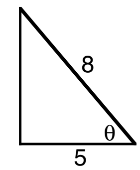
d) $\text{arctg}(\text{tg } x^2) = \pi/9$

5. Résoudre à l'aide d'une calculatrice.

a) $\arccos 2x = 1/4$

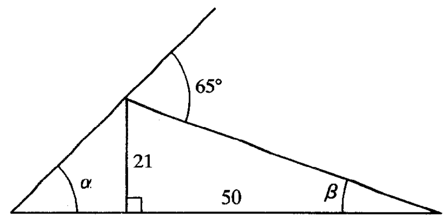
b) $3 \text{ tg } x = \sqrt{10} \quad (0 < x < \pi/2)$

6. Une échelle de 8 mètres est appuyée contre un mur. Si le pied de l'échelle est à 5 mètres du mur, trouver l'angle θ (en degrés) que fait le pied de l'échelle avec le sol.



7. Soit a et b des nombres positifs. Montrer que si $\arcsin a = \arccos b$ alors $a^2 + b^2 = 1$.

8. Trouver la valeur de l'angle α



9. Évaluer les expressions suivantes provenant du calcul d'une limite.

a) $\operatorname{arctg} \infty$
b) $\arccos 1^+$
c) $\arcsin 0$
d) $\operatorname{arctg} (-1)$
e) $\operatorname{arccotg}(-\infty)$
f) $\operatorname{arcsec} 1^-$
g) $\arccos \infty$
h) $1/\arccos 1^-$
i) $\operatorname{arctg}(-\infty)$
j) $\operatorname{arcsec} 1^+$

10. Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$

a) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \arcsin(x/2)$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\arcsin x}{\ln x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\arccos x}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{arcsec} x}{\pi}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arctg}(1/x)$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{arcsec} x}{\operatorname{arctg} x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} x \operatorname{arctg}(x - 2)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\operatorname{arccotg} x}$

i) $\lim\limits_{x \to 1} \arcsin(1/x)$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{arctg}(\ln x)$

k) $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{arcsec}(x - 1)$

l) $\lim\limits_{x \to 3} x \arcsin(x - 4)$

m) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$

n) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}/2} \operatorname{arctg} 2x$

o) $\lim\limits_{x \to -1/2} (\arcsin x + \arccos x)$

p) $\lim\limits_{x \to \infty} \arccos\left(\dfrac{x^2 + 1}{x^3}\right)$

11. Étudier la continuité de chacune des fonctions sur **R.**

a) $f(x) = (\text{arctg } x)^3 - 1$

b) $f(x) = \arcsin x - \sqrt{2x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x}$

d) $f(x) = \ln(\text{arccotg } x)$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\text{arctg } x}}{1 - \arccos x}$

Réponses aux exercices 6.5

1. a) 0 — i) $\pi/6$
   b) $-\pi/6$ — j) $\nexists$
   c) $\nexists$ — k) $-2\pi/3$
   d) $5\pi/6$ — l) $-2\pi/3$
   e) $\pi/6$ — m) $\nexists$
   f) $-\pi/3$ — n) $\sqrt{2}$
   g) $3\pi/4$ — o) $\sqrt{3}/2$
   h) $5\pi/6$ — p) $-\pi/2$

2. a) -0,64 — d) 0,72
   b) 1,37 — e) -1,89
   c) $\nexists$ — f) $\nexists$

3. a) $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ et $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

   b) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et $\operatorname{cotg}\theta = 2$

   c) $\sin\theta = \sqrt{1 - 9x^2}$ et $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{1 - 9x^2}}{3x}$

   d) $\sec\theta = \sqrt{1 + x^4}$ et $\sin\theta = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^4}}$

4. a) $\dfrac{1}{2}$ — c) $\dfrac{1}{6}$
   b) $1 + \sqrt{3}$ — d) $\pm\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$

5. a) 0,48 — b) 0,81

6. 51,3°

7.

8. 42,22°

9.
- a) $\pi/2$
- b) $\nexists$
- c) 0
- d) $-\pi/4$
- e) π
- f) $\nexists$
- g) $\nexists$
- h) ∞
- i) $-\pi/2$
- j) 0

10.
- a) $\pi/3$
- b) 0
- c) 0
- d) $1/3$
- e) $\nexists$ (à gauche: $-\pi/2$; à droite: $\pi/2$)
- f) 1
- g) $-\pi/4$
- h) e^{π}
- i) $\nexists$ (à gauche: $\nexists$; à droite: $\pi/2$)
- j) 0
- k) $\nexists$ (à gauche: $\nexists$; à droite: 0)
- l) $\nexists$ (à gauche: $\nexists$; à droite: $-3\pi/2$)
- m) $-\infty$
- n) $-\pi/3$
- o) $\pi/2$
- p) $\pi/2$

11.
- a) continue sur **R**
- b) continue sur $]1/2, 1[$
- c) continue sur $]-1, 1[\setminus \{ 0 \}$
- d) continue sur **R**
- e) continue sur $]0, 1[\setminus \{ 0{,}5403 \}$

6.6 Dérivée et applications (fonctions trigonométriques inverses)

proposition 6.6.1

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

démonstration

Par définition

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x \qquad (-\pi/2 \le y \le \pi/2)$$

En dérivant implicitement l'équation de droite on obtient,

$$\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}\,x$$

$$\cos y\,\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \qquad (-\pi/2 \le y \le \pi/2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{car } \sin y = x)$$

puisque
$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$
alors
$\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$
mais $\cos y \ge 0$
lorsque $y \in [-\pi/2, \pi/2]$,
par conséquent
$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$

proposition 6.6.2

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

démonstration

proposition 6.6.3

$$\frac{d}{dx}\,\text{arctg } x = \frac{1}{1 + x^2}$$

démonstration

proposition 6.6.4

$$\frac{d}{dx}\,\text{arccotg } x = \frac{-1}{1 + x^2}$$

démonstration

proposition 6.6.5

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

démonstration

proposition 6.6.6

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

démonstration

exemple 6.6.1

Trouver $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\text{arcsin x}}{\text{arccos x}}\right]$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\text{arcsin x}}{\text{arccos x}}\right] = \frac{\text{arccos x}\ \dfrac{d}{dx}\text{arcsin x} - \text{arcsin x}\ \dfrac{d}{dx}\text{arccos x}}{(\text{arccos x})^2}$$

$$= \frac{\text{arccos x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) - \text{arcsin x}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)}{(\text{arccos x})^2}$$

$$= \frac{\text{arccos x} + \text{arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}\,(\text{arccos x})^2}$$

exemple 6.6.2

Trouver $\dfrac{d}{dx}\ x(\text{arctg x})^2$

---

rép: $\text{arctg x}\left(\text{arctg x} + \dfrac{2x}{1 + x^2}\right)$

exemple 6.6.3

Trouver $\dfrac{d}{dx}\ \text{arcsin 5x}$

---

rép: $\dfrac{5}{\sqrt{1 - 25x^2}}$

Pour obtenir la dérivée de $y = \arcsin f(x)$ on décompose la fonction de la façon suivante.

$$y = \arcsin u \quad \text{et} \quad u = f(x)$$

Puis par la règle de dérivation en chaîne on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{d}{dx} f(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - f(x)^2}} \cdot \frac{d}{dx} f(x)\end{aligned}$$

On obtient de la même façon les formules générales des autres fonctions trigonométriques inverses.

règle 20	$\frac{d}{dx} \arcsin f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - f(x)^2}} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 21	$\frac{d}{dx} \arccos f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - f(x)^2}} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 22	$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} f(x) = \frac{1}{1 + f(x)^2} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 23	$\frac{d}{dx} \operatorname{arccotg} f(x) = \frac{-1}{1 + f(x)^2} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 24	$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} f(x) = \frac{1}{f(x)\sqrt{f(x)^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
règle 25	$\frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} f(x) = \frac{-1}{f(x)\sqrt{f(x)^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$

exemple 6.6.4

Trouver $\frac{d}{dx} \arcsin \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \arcsin \sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1 - x)}}\end{aligned}$$

exemple 6.6.5

Trouver $\dfrac{d}{dx}$ arcsec(e^{2x})

rép: $\dfrac{2}{\sqrt{e^{4x} - 1}}$

exemple 6.6.6

Trouver $\dfrac{d}{dt}\arccos\left(\dfrac{1}{3t}\right)$ $(t < 0)$

rép: $-\dfrac{1}{t\sqrt{9t^2 - 1}}$

exemple 6.6.7

Trouver y' si $y = 2x(\arccos 2x) - \sqrt{1 - 4x}^2$

rép: 2 arccos 2x

exemple 6.6.8

Calculer la pente de la droite tangente à la fonction

$$f(x) = (\arcsin x)(\arccos x)$$

lorsque $x = -1/2$.

rép: $\dfrac{5\sqrt{3}\pi}{9}$

exemple 6.6.9

Tracer le graphique de la fonction $f(x) = x(\arcsin x) + \sqrt{1 - x^2}$.

a) dom f = [-1, 1]

b) f est continue sur]-1, 1[

arcsin(-x) = -arcsin x

c) $f(-x) = (-x)(\arcsin(-x) + \sqrt{1 - (-x)^2}$
$= x(\arcsin x) + \sqrt{1 - x^2}$
$= f(x)$ (f est symétrique par rapport à l'axe des y)

les asymptotes horizontales et obliques sont sans intérêt car le dom f = [-1, 1]

d) asymptote verticale: aucune car pour les deux points de discontinuité x = -1 et x = 1 on a

$$\lim_{x \to 1^-} x(\arcsin x) + \sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \lim_{x \to -1^+} x(\arcsin x) + \sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{2}$$

e) $$f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \arcsin x = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \nexists & \text{si } x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{n.c.: } \{-1, 0, 1\}$$

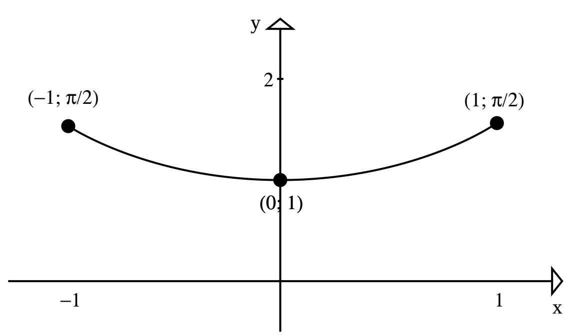
$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{aucune valeur} \\ \nexists & x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \text{n.t.: } \{-1, 1\}$$

f) Tableau de variation de la fonction.

seules les valeurs de x dans l'intervalle [0, 1] sont considérées dans le tableau de variation car la fonction est symétrique par rapport à l'axe des y

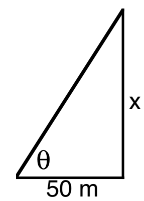
x	0	1
$f'(x)$	+	
$f''(x)$	+	
$f(x)$	1	$\pi/2$

Graphique de la fonction



exemple 6.6.10

Un ballon lâché au niveau d'un observateur s'élève à la vitesse de 5 m/s. Si l'observateur est placé à 50 m du ballon, trouver le taux de variation de l'angle d'élévation du ballon par rapport au temps lorsque celui-ci est à 30 m du sol.



rép: 4,2°/s

Exercices 6.6

1. Trouver $\frac{dy}{dx}$

a) $y = \arcsin 3x$

b) $y = 2(\arcsin \sqrt{x})$

c) $y = \arccos x^2$

d) $y = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

e) $y = \text{arctg } 3x^2$

f) $y = \text{arctg}\left(\frac{3}{x}\right)$

g) $y = \text{arccosec } \sqrt{x}$

h) $y = \text{arccotg}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$

i) $y = (\text{arcsec } 2x)^2$

j) $y = \left(\arcsin \sqrt{1 - x}\right)^4$

k) $y = \frac{1}{\text{arccosec } x}$

l) $y = a\left[\text{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$ $(a < 0)$

m) $y = \text{arccotg}(\sin x)$

n) $y = \frac{\text{arcsec } 2x}{\text{arccosec } 2x}$

o) $y = \text{arctg}(\text{tg } x)$

p) $y = \ln(\arcsin 5x)^2$

q) $y = x^2 \arccos\left(\frac{2}{x}\right)$ $(x < 0)$

r) $y = x(\text{arccotg } x) + \ln\sqrt{1 + x^2}$

s) $y = x\sqrt{4 - x^2} + 4\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

t) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} + \frac{1}{2}\text{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)$

u) $y = \frac{1}{ab}\text{arctg}\left(\frac{b \text{ tg } x}{a}\right)$

v) $y = x\left[\text{arccosec}\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \sqrt{1 - x^2}$ $(x > 0)$

2. Trouver la pente de la droite tangente à chacune des fonctions au point indiqué.

a) $f(x) = \arcsin x$; $x = 0$

b) $g(x) = (\text{arctg } x)^2$; $x = -1$

c) $h(x) = x(\arccos x)$; $x = 1/2$

3. Trouver $\frac{dy}{dx}$ implicitement si $\ln(x^2 + y^2) = \text{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

4. Trouver les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les extremums relatifs de chacune des fonctions.

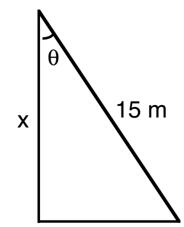
   a) $f(x) = \text{arctg}(x^3 - 12x)$ b) $g(x) = \text{arccotg } x^2$

5. Trouver x qui maximise θ si

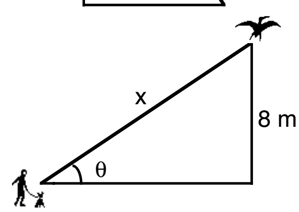
$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{2}{x}\right) - \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x > 0)$$

6. Soit $f(x) = x + 3 \cos x$. Trouver le maximum absolu et le minimum absolu de cette fonction sur $[0, \pi/2]$. (Utiliser une calculatrice pour résoudre ce problème.)

7. Le sommet d'une échelle de 15 m glisse vers le bas d'un mur à raison de 3 m/s. Calculer le taux de variation par rapport au temps de l'angle que fait l'échelle avec le mur lorsque celle-ci est à une hauteur de 9 m.



8. Un observateur regarde un oiseau à 8 m d'altitude. L'oiseau s'éloigne à une vitesse de 1 m/s. Quel est le taux de variation par rapport au temps de l'angle que fait le segment qui relie l'observateur à l'oiseau et le sol lorsque la distance qui sépare l'observateur à l'oiseau est de 10 m.



9. Tracer le graphique de chacune des fonctions en indiquant

   - pour quelles valeurs la fonction est continue,
   - si la fonction est paire, impaire ou ni paire, ni impaire,
   - les *asymptotes verticales* de la fonction,
   - $f'(x)$ et les *nombres critiques* de la fonction,
   - $f''(x)$ et les *nombres de transition* de la fonction,
   - le *tableau de variation* de la fonction,
   - le *graphique* de la fonction.

   a) $f(x) = \arcsin x - 3(\arccos x)$ b) $g(x) = \text{arctg } x - \frac{x}{2}$

Réponses aux exercices 6.6

1. a) $\dfrac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1 - x}}$

c) $\dfrac{-2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

d) $\dfrac{-1}{\sqrt{4 - x^2}}$

e) $\dfrac{6x}{1 + 9x^4}$

f) $\dfrac{-3}{x^2 + 9}$

g) $\dfrac{-1}{2x\sqrt{x - 1}}$

h) $\dfrac{-1}{1 + x^2}$

i) $\dfrac{2(\text{arcsec } 2x)}{x\,\sqrt{4x^2 - 1}}$

j) $\dfrac{-2\left(\arcsin\sqrt{1 - x}\right)^3}{\sqrt{x}\,\sqrt{1 - x}}$

k) $\dfrac{1}{x\,\sqrt{x^2 - 1}\,(\text{arccosec } x)^2}$

l) $\dfrac{-a^2}{x\,\sqrt{x^2 - a^2}}$

m) $\dfrac{-\cos x}{1 + \sin^2 x}$

n) $\dfrac{\text{arccosec } 2x \;+\; \text{arcsec } 2x}{x\,\sqrt{4x^2 - 1}\,(\text{arccosec } 2x)^2}$

o) 1

p) $\dfrac{10}{\sqrt{1 - 25x^2}\,\arcsin 5x}$

q) $\dfrac{-2x}{\sqrt{x^2 - 4}} + 2x\left[\arccos\left(\dfrac{2}{x}\right)\right]$

r) $\text{arccotg } x$

s) $2\,\sqrt{4 - x^2}$

t) $\dfrac{8}{x^3\,\sqrt{x^2 - 4}}$

u) $\dfrac{\sec^2 x}{a^2 + b^2\,\text{tg}^2\,x}$

v) $\text{arccosec}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2. a) 1

b) $-\dfrac{\pi}{4}$

c) $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi - \sqrt{3}}{3}$

3. $\dfrac{y - 2x}{2y + x}$

4. a) croissante sur $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$
décroissante sur $]-2, 2[$
min. rel. au point: (2; arctg -16)
max. rel. au point: (-2; arctg 16)

b) croissante sur $]-\infty, 0[$
décroissante sur $]0, \infty[$
min. rel. au point: aucun
max. rel. au point: $(0; \pi/2)$

5. $\sqrt{2}$

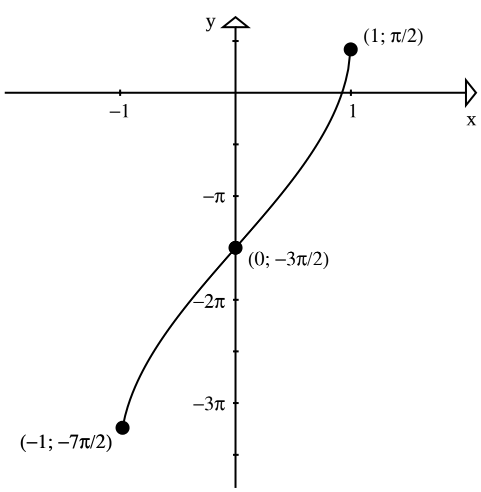
6. max. abs. au point: (0,34; 3,17)
min. abs. au point: (1,57; 1,57)

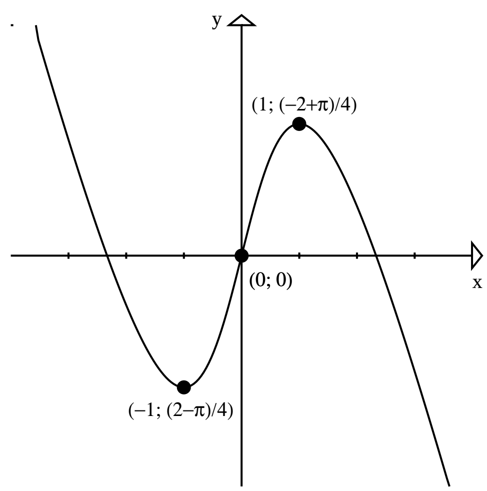
7. 14,3°/s (l'angle augmente de 14,3° par seconde)

8. -7,6°/s (l'angle diminue de 7,6° par seconde)

9. a) $f'(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x^2}}$; $f''(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

b) $f'(x) = \dfrac{(1 - x)(1 + x)}{2(1 + x^2)}$; $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}$





Exercices de révision

1. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{cosec} x$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sec x}{1 - \cos^2 x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 2 \sin x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 4x}{(\sin x)(\cos x)}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - \sin x}{\cos x - 3x}$

2. Étudier la continuité de chacune des fonctions sur $]0, 2\pi[$.

a) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x + 2}}$

3. Trouver la dérivée de chacune des fonctions.

a) $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$

b) $y = 2 \operatorname{cosec}^3 \sqrt{x}$

c) $y = \dfrac{\sin^5 x}{5} - \dfrac{2 \sin^3 x}{3} + \sin x$

d) $y = \sec^3 2x - 3 \sec 2x$

e) $y = x\sqrt{\operatorname{cotg} x^2}$

f) $y = \ln^3(\sin^2 x)$

g) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{6} + \dfrac{\ln(\cos 3x)}{3}$

h) $y = e^x (\sin 2x - 2\cos 2x)$

4. Trouver $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si $y = \operatorname{cosec} 3x$.

5. Trouver $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x = \pi/6}$ si $y = \operatorname{tg}^3 2x$

6. Utiliser la dérivée logarithmique pour obtenir $\dfrac{dy}{dx}$

a) $y = \dfrac{\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}}{\operatorname{tg}^3 x}$

b) $y = (\sin x)^{\sin x} \quad (\sin x > 0)$

7. Trouver les extremums relatifs de

$$y = 2 \sin x - \cos 2x \quad \text{sur }]0, 2\pi[.$$

8. Tracer le graphique de la fonction

$$f(x) = 8 \cos x - 2 \cos 2x \quad \text{sur } [0, 2\pi]$$

si $f'(x) = 8(\sin x)(\cos x - 1)$

$f''(x) = 8(2 \cos x + 1)(\cos x - 1)$

9. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\operatorname{arctg}(\cos x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} (\arcsin x - \arccos x)$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} \arcsin\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x}$

10. Étudier la continuité de chacune des fonctions sur **R**.

a) $f(x) = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$

b) $g(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{6 \operatorname{arccotg} x - \pi}$

11. Trouver la dérivée de chacune des fonctions.

a) $y = (\arcsin x)(\arccos x)$

b) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^3$

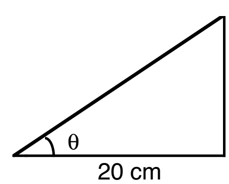
c) $y = \arcsin\left(\dfrac{t - 1}{t + 1}\right) \quad (t > 0)$

d) $y = \operatorname{arcsec}\sqrt{x^2 + 1} \quad (x < 0)$

e) $y = e^{\arcsin 3x}$

f) $y = x(\operatorname{arccotg} x) + \ln\sqrt{1 + x^2}$

12. La base d'un triangle rectangle est de 20 cm. Si la hauteur du triangle augmente à raison de 5 cm par minute, à quelle vitesse augmente l'angle opposé à la hauteur lorsque le triangle est isocèle.



13. Tracer le graphique de la fonction $f(x) = \operatorname{arccotg}(\sin x)$ sur $[0, 2\pi]$

si $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{1 + \sin^2 x}$

$f''(x) = \dfrac{(\sin x)(2 + \cos^2 x)}{(1 + \sin^2 x)^2}$

Réponses aux exercices de révision

1. a) $-\infty$ d) $1/2$
   b) ∞ e) -4
   c) 3 f) $-2/3$

2. a) continue sur $]0, 2\pi[\setminus \{ \pi/2, \pi, 3\pi/2 \}$
   b) continue sur $]0, 2\pi[$

3. a) $\dfrac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$
   b) $\dfrac{-3\left(\operatorname{cosec}^3 \sqrt{x}\right)\left(\operatorname{cotg} \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$
   c) $\cos^5 x$
   d) $6(\operatorname{tg}^3 2x)(\sec 2x)$
   e) $\dfrac{\operatorname{cotg} x^2 - x^2(\operatorname{cosec}^2 x^2)}{\sqrt{\operatorname{cotg} x^2}}$
   f) $6 \operatorname{cotg} x \ln^2(\sin^2 x)$
   g) $\operatorname{tg}^3 3x$
   h) $5 e^x \sin 2x$

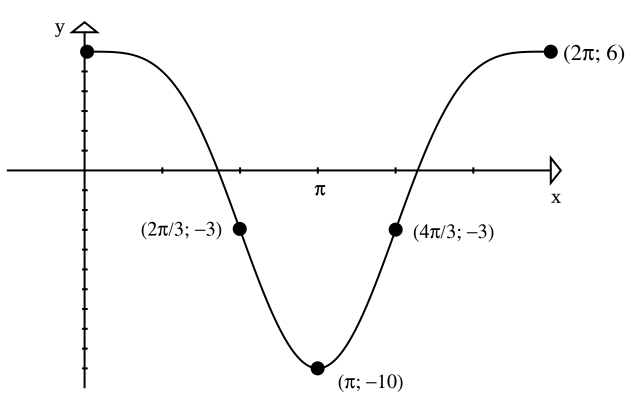
4. $9(\operatorname{cosec} 3x)(\operatorname{cotg}^2 3x + \operatorname{cosec}^2 3x)$

5. 72

6. a) $\dfrac{\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}}{\operatorname{tg}^3 x}\left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{(\sin x)(\cos x)}{1 + \cos^2 x} - \dfrac{3 \sec^2 x}{\operatorname{tg} x} \right)$
   b) $(\sin x)^{\sin x} \cos x \left(\ln(\sin x) + 1\right)$

7. MIN REL: $(7\pi/6, -3/2), (11\pi/6, -3/2)$
   MAX REL: $(\pi/2, 3), (3\pi/2, -1)$

8.



9. a) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ c) $\nexists$

b) $\frac{\pi}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

10. a) continue sur]-1, 1[sauf { 0 } b) continue sur **R** sauf { $\sqrt{3}$ }

11. a) $\frac{\text{arccos } x - \text{arcsin } x}{\sqrt{1 - x^2}}$ d) $\frac{-1}{x^2 + 1}$

b) $\frac{6(\text{arctg } 2x)^2}{1 + 4x^2}$ e) $\frac{3\, e^{\text{arcsin } 3x}}{\sqrt{1 - 9x^2}}$

c) $\frac{1}{(t + 1)\sqrt{t}}$ f) arccotg x

12. 7,16°/min (l'angle augmente de 7,16° par minute)

13.