Fonction exponentielle et fonction logarithmique

5

5.1 Rappel

Nous nous sommes jusqu'à maintenant limités à l'étude des fonctions algébriques. Nous sommes par conséquent familiers avec des fonctions telles

$$f(x) = x^2 \quad \text{ou} \quad g(x) = \sqrt{x}\ .$$

Ces deux fonctions ont pour caractéristique d'être définies à l'aide d'une expression contenant une variable élevée à une puissance constante. En inversant les rôles et en élevant une constante (non négative et différente de l'unité) à une puissance variable, on obtient une des plus importantes classes de fonctions qui existent en mathématiques, la *fonction exponentielle*. En voici deux exemples:

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x .$$

La fonction exponentielle possède une fonction inverse toute aussi importante, la *fonction logarithmique*.

Avant d'aborder l'étude de ces fonctions, rappelons d'abord les propriétés des exposants que l'on aura souvent l'occasion d'utiliser dans cette section.

propriétés des exposants

bien que ces propriétés aient été utilisées jusqu'ici uniquement avec des exposants rationnels, elles demeurent néanmoins valables lorsque l'exposant est un nombre irrationnel

Soit $a, b > 0$ et $m, n \in \mathbf{R}$.

1) $b^0 = 1$

2) $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$

3) $b^n\, b^m = b^{n+m}$

4) $\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

5) $(b^n)^m = b^{nm}$

6) $a^n b^n = (ab)^n$

7) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

exemples 5.1.1

Montrer que $\dfrac{(2a^2)^{1/2}}{8^{1/6}\, a^{-1}} = a^2 \quad (a > 0)$

a) la fonction exponentielle

définition 5.1.1

fonction exponentielle

La fonction définie par l'équation

$$y = b^x \qquad (b > 0 \text{ et } b \neq 1)$$

est appelée *fonction exponentielle* de base b .

exemple 5.1.2

les équations $y = 1^x$ ou $y = (-2)^x$ ne définissent pas des fonctions exponentielles

Les équations

$$y = 3^x \quad , \quad y = \left(\tfrac{1}{5}\right)^x \quad , \quad y = 10^x \quad , \quad y = (1{,}01)^x$$

$$y = (0{,}9)^x \quad , \quad y = \pi^x \quad , \quad y = e^x \quad (e = 2{,}718...)$$

définissent dans chacun des cas une fonction exponentielle.

Euler (1707-1783)

Dans le dernier cas, la fonction exponentielle est de base

$$e = 2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 36...$$

Ce nombre irrationnel est en fait un des plus importants que l'on retrouve en mathématiques. Il a été introduit en sciences vers 1748 par le mathématicien suisse Euler. Celui-ci le qualifia de *nombre transcendant*. On dit d'un nombre qu'il est transcendant s'il ne peut être racine d'aucune équation algébrique dont les coefficients sont des entiers. Pour Euler, ce nombre semblait "transcender la puissance des méthodes algébriques de son temps".

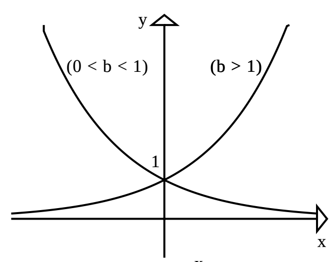
Le nombre *e* est la base par excellence utilisée en sciences. On verra que lorsque la valeur de *e* est utilisée comme base d'une fonction exponentielle, cette fonction devient une des plus faciles à dériver et par voie de conséquence, une des plus faciles à étudier.

graphique de la fonction exponentielle d'équation $y = b^x$

Le graphique de la fonction exponentielle possède une des deux formes apparaissant sur la figure de droite.

On constate que la fonction exponentielle d'équation

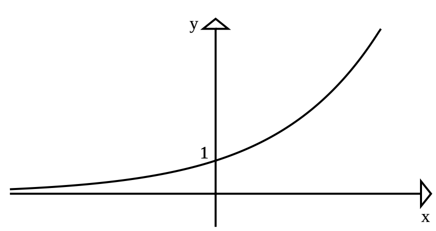
$$y = b^x \quad (b > 0, b \neq 1)$$



$y = b^x$

- est croissante si $b > 1$,
- est décroissante si $0 < b < 1$,
- est toujours positive quelle que soit la base b ,
- possède une asymptote horizontale d'équation $y = 0$,
- a pour *domaine* l'intervalle $]-\infty, \infty[$,
- a pour *image* l'intervalle $]0, \infty[$.

graphique de la fonction exponentielle d'équation $y = e^x$



$y = e^x$

proposition 5.1.1

1.		$b^x = b^y$	$\Leftrightarrow$	$x = y$	$(b > 0,\ b \neq 1)$
2.	a)	$b^x < b^y$	$\Leftrightarrow$	$x < y$	$(b > 1)$
	b)	$b^x < b^y$	$\Leftrightarrow$	$x > y$	$(0 < b < 1)$

Ces règles pourront dans certains cas être utilisées pour résoudre des équations ou des inéquations contenant des expressions de type exponentiel.

exemple 5.1.3

Résoudre l'équation: $2^x = 0{,}125$

$$2^x = 0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad 2^x = 2^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad x = -3 \qquad \text{(par la prop. 5.1.1)}$$

exemple 5.1.4

Résoudre l'inéquation: $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} < \frac{1}{32}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} < \frac{1}{32}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{6x} < \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\Rightarrow \quad 6x > 5 \qquad \text{(par la prop. 5.1.1)}$$

$$\Rightarrow \quad x > \frac{5}{6}$$

exemple 5.1.5

Trouver la valeur de n si :

a) $\dfrac{b^5\left(b^{1/3}\right)}{b^n} = b \qquad (b > 0,\ b \neq 1)$

b) $\left(\dfrac{1}{b^n}\right)^3 \geq b\left(b^{1/3}\right) \qquad (0 < b < 1)$

rép: $n = \frac{13}{3}$; b) $n \geq -\frac{4}{9}$

La fonction exponentielle est souvent utilisée pour décrire des phénomènes de croissance. En psychologie, on l'utilise entre autres pour étudier certains comportements d'apprentissage.

exemple 5.1.6

Pour une multitude de raisons, les lignes d'assemblage en industrie ont tendance à avoir un roulement important d'ouvriers. Les compagnies doivent dépenser beaucoup d'argent à entraîner de nouveaux effectifs. On a trouvé que le niveau de production d'un nouvel employé d'une chaîne de montage est décrit par la fonction

$$P(x) = 25 - 25e^{-0,3x}$$

P(x) représente le nombre d'unités fabriquées par l'employé x jours après son entrée en fonction. En utilisant l'équation, calculer le nombre d'unités que l'ouvrier produira à sa 8^{e} journée de travail.

(Utiliser votre calculatrice)

On doit évaluer

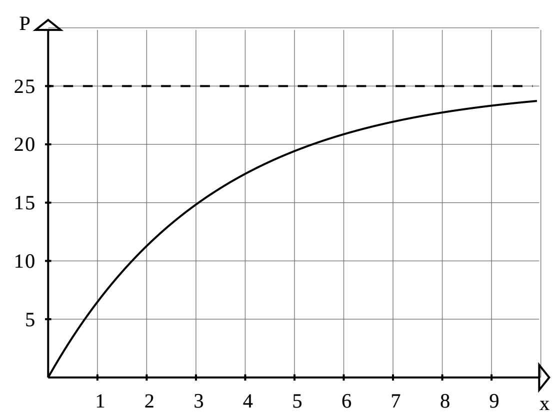
$$\begin{aligned} P(8) &= 25 - 25e^{-0,3(8)} \\ &= 25 - 25e^{-2,4} \\ &= 25 - 25(0,09071) \\ &= 22,7 \end{aligned}$$

Le 8^{e} jour l'ouvrier devrait fabriquer environ 23 unités.

En reprenant le calcul pour différentes valeurs de x, on obtient le tableau suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P(x)	0	6,5	11,3	14,8	17,5	19,4	20,9	21,9	22,7

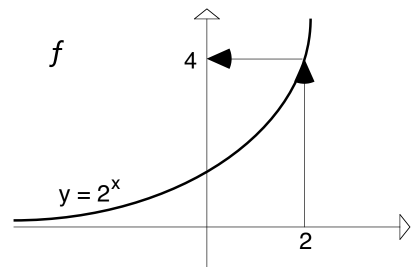
En psychologie la courbe de cette fonction s'appelle "courbe d'apprentissage".

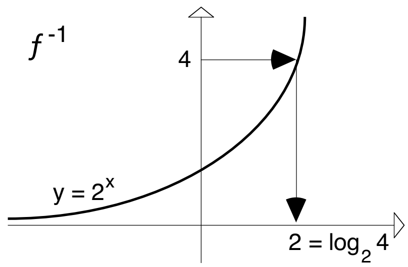


En examinant cette courbe, on remarque qu'à la longue, le rendement d'un ouvrier approche d'une valeur maximale de 25 unités et que toute formation ou expérience additionnelle n'aura que très peu d'effets sur son rendement.

b) la fonction logarithmique

Les fonctions exponentielle et logarithmique sont en relation directe l'une avec l'autre. On a vu que la fonction exponentielle définie par l'équation $y = 2^x$ associe à l'exposant $x = 2$, la valeur $y = 4$.





À l'inverse si l'on cherchait à trouver la valeur de l'exposant x associée à une valeur de y, on associerait à $y = 4$, l'exposant $x = 2$. On appelle cet exposant le logarithme de base 2 de 4 et on le note

$$\log_2 4$$

La fonction ainsi créée que l'on désigne par f^{-1} est appelée fonction logarithmique de base 2 et est notée $\log_2$.

définition 5.1.2
fonction logarithmique

La fonction logarithmique de base b ($b > 0$, $b \neq 1$) que l'on note $\log_b$ est définie par l'équation

$$y = \log_b x \iff b^y = x$$

À toute forme logarithmique correspond une forme exponentielle et inversement à toute forme exponentielle correspond une forme logarithmique. Pour bien saisir le passage de la forme logarithmique à la forme exponentielle (ou vice versa) examinons les tableaux équivalents suivants.

forme exponentielle		forme logarithmique
$3^2 = 9$	$\iff$	$\log_3 9 = 2$
$7^0 = 1$	$\iff$	$\log_7 1 = 0$
$10^3 = 1000$	$\iff$	$\log_{10} 1000 = 3$
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$\iff$	$\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2$

forme logarithmique		forme exponentielle
$\log_9 3 = \frac{1}{2}$	$\iff$	$9^{1/2} = 3$
$\log_8 \left(\frac{1}{8}\right) = -1$	$\iff$	$8^{-1} = \frac{1}{8}$
$\log_5 5 = 1$	$\iff$	$5^1 = 5$
$\log_{1/2} 4 = -2$	$\iff$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

exemple 5.1.7

Évaluer

a) $\log_5 125$ c) $\log_4 1$ e) $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$

b) $\log_2 128$ d) $\log_{1/2} 8$

---

a) $\log_5 125 = y \iff 5^y = 125$

Pour obtenir la valeur de $\log_5 125$ il suffit donc de trouver l'exposant qu'il faut donner à 5 pour obtenir 125.

$$5^3 = 125 \Rightarrow \log_5 125 = 3$$

rép: b) 7 ; c) 0 ; d) -3 ; e) -1

Une base retiendra notre attention. Cette base, vous l'aurez deviné, est la base $e = 2{,}718$ ... Les logarithmes de base e s'appellent logarithmes naturels ou logarithmes népériens en l'honneur du mathématicien écossais *John Napier* (1550-1617). Les logarithmes de base e s'écrivent sous forme abrégée

$$\ln x = \log_e x$$

Par définition

$$\boxed{y = \ln x \iff e^y = x}$$

exemple 5.1.8

Évaluer:

a) sans l'aide d'une calculatrice: $\ln e$ et $\ln 1$,

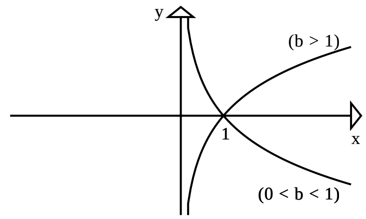
b) à l'aide d'une calculatrice: $\ln 2$ et $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

---

rép: a) 1 ; b) 0 ; c) 0,693147 ; d) -1,098612

graphique de la fonction logarithmique d'équation $y = \log_b x$

Le graphique de la fonction logarithmique possède une des deux formes apparaissant sur la figure de droite.



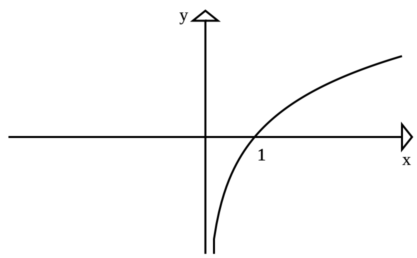
$y = \log_b x$

On constate que la fonction logarithmique d'équation

$$y = \log_b x \quad (b > 0, b \neq 1)$$

- est croissante si $b > 1$
- est décroissante si $0 < b < 1$
- possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$
- a pour *domaine* l'intervalle $]0, \infty[$
- a pour *image* l'intervalle $]-\infty, \infty[$

graphique de la fonction logarithmique d'équation $y = \ln x$



$y = \ln x$

L'équivalence $y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x$ provenant de la définition 5.1.2 amène à deux résultats fort utiles.

proposition 5.1.2

a)	$\log_b b^y = y$;	$\boxed{\ln e^y = y}$	$\forall\ y$
b)	$b^{\log_b x} = x$;	$\boxed{e^{\ln x} = x}$	$\forall\ x > 0$

exemple 5.1.9

Évaluer:

a) $2^{\log_2 3}$ c) $e^{3(\ln 2)}$

b) $e^{\ln 2}$ d) $\ln\sqrt{e}$

rép: a) 3 ; b) 2 ; c) 8 ; d) 1/2

Les règles issues de la proposition 5.1.1 en relation avec la fonction exponentielle ont leurs équivalents logarithmiques.

proposition 5.1.3

1.	$\log_b x = \log_b y$	$\Leftrightarrow$	$x = y$	$(b > 0, b \neq 1)$
2. a)	$\log_b x < \log_b y$	$\Leftrightarrow$	$x < y$	$(b > 1)$
b)	$\log_b x < \log_b y$	$\Leftrightarrow$	$x > y$	$(0 < b < 1)$

Étant donné la relation qui existe entre les formes exponentielle et logarithmique, on doit s'attendre à l'équivalence de leurs propriétés.

proposition 5.1.4

propriétés des logarithmes

Soit $m, n > 0$, $r \in \mathbf{R}$ et $b > 0, b \neq 1$.

1) $\log_b 1 = 0$

2) $\log_b b = 1$

3) $\log_b (mn) = \log_b m + \log_b n$

4) $\log_b \left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$

5) $\log_b \left(m^r\right) = r \log_b m$

démonstration

1) $\log_b 1 = 0 \iff b^0 = 1$. (propriété 1 des exposants)

2) $\log_b b = 1 \iff b^1 = b$.

Pour démontrer les trois dernières propriétés posons:

$$\log_b m = M \iff b^M = m$$
$$\log_b n = N \iff b^N = n \ .$$

3) Puisque $mn = b^M b^N$

alors $mn = b^{M+N}$ (propriété 3 des exposants)

et $mn = b^{M+N} \iff \log_b (mn) = M + N$ (par déf.)

donc $\log_b (mn) = \log_b m + \log_b n$.

car $M = \log_b m$, $N = \log_b n$

4) Puisque $\frac{m}{n} = \frac{b^M}{b^N}$

alors $\frac{m}{n} = b^{M-N}$ (propriété 4 des exposants)

et $\frac{m}{n} = b^{M-N} \iff \log_b \left(\frac{m}{n}\right) = M - N$ (par déf.)

donc $\log_b \left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$.

car $M = \log_b m$, $N = \log_b n$

5) Puisque $m^r = \left(b^M\right)^r$

alors $m^r = b^{Mr}$ (propriété 5 des exposants)

et $m^r = b^{Mr} \iff \log_b \left(m^r\right) = Mr$ (par déf.)

donc $\log_b \left(m^r\right) = r \log_b m$.

car $M = \log_b m$

exemple 5.1.10

En utilisant les propriétés des logarithmes évaluer $\log_9\left(\frac{\sqrt{3}}{81}\right)$.

On a $\log_9\left(\frac{\sqrt{3}}{81}\right) = \log_9 \sqrt{3} - \log_9 81$ (propriété 4 des log.)

$= \log_9 3^{1/2} - \log_9 81$

$= \frac{1}{2}\log_9 3 - \log_9 81$ (propriété 5 des log.)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2$

$= -\frac{7}{4}$

exemple 5.1.11

Sachant que $\ln 2 = 0{,}69$ et $\ln 3 = 1{,}10$ trouver à l'aide de ces deux quantités:

a) $\ln 6$

b) $\ln 1{,}5$

c) $\ln 4$

d) $\ln\left(\frac{8}{9}\right)$

---

rép: a) 1,79 ; b) 0,41 ; c) 1,38 ; d) -0,13

exemple 5.1.12

Quelle est la valeur de $\ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b^3}\right)$ si $\ln a = 10$ et $\ln b = 5$.

---

rép: -10

Il est possible de transformer un logarithme ou une exponentielle de base quelconque en base e.

proposition 5.1.5

formules de changement de base

Soit $m > 0$ et $b > 0$, $b \neq 1$.

1) $\log_b m = \dfrac{\ln m}{\ln b}$

2) $b^m = e^{km}$ où $k = \ln b$

démonstration

1) Soit $y = \log_b m \Rightarrow b^y = m$

$\Rightarrow \ln b^y = \ln m$

$\Rightarrow y \ln b = \ln m$

$\Rightarrow y = \dfrac{\ln m}{\ln b}$

$y = \log_b m$

$\Rightarrow \log_b m = \dfrac{\ln m}{\ln b}$

par la prop. 5.1.2

$b = e^{\ln b}$

2) $b^m = \left(e^{\ln b}\right)^m = e^{km}$ $(k = \ln b)$

exemple 5.1.13

a) À l'aide de votre calculatrice et des formules de changement de base, évaluer $\log_2 3$.

b) Réécrire 2^x dans la base e.

rép: a) 1,584963 ; b) $e^{x(\ln 2)}$

résolution d'une équation contenant des formes exponentielles ou logarithmiques

On aura souvent à résoudre des équations contenant des formes exponentielles ou logarithmiques. Pour résoudre de telles équations on utilise en général les mêmes techniques de solution qui ont été développées pour les équations algébriques.

exemple 5.1.14

Résoudre l'équation: $2 \ln x + 7 = 0$

$$2 \ln x + 7 = 0$$
$$\Rightarrow 2 \ln x = -7$$
$$\Rightarrow \ln x = -3{,}5$$
$$\Rightarrow x = e^{-3{,}5} \qquad \text{(par définition)}$$

pour éliminer le logarithme d'une équation de la forme ln x = c, il suffit de prendre l'exponentielle de base e de chaque côté de l'équation puis d'utiliser la prop. 5.1.2

Pour ceux qui auraient de la difficulté à passer de l'avant dernière équation à la dernière équation, on peut aussi utiliser la technique suivante.

$$\ln x = -3{,}5$$
$$\Rightarrow e^{\ln x} = e^{-3{,}5}$$
$$\Rightarrow x = e^{-3{,}5} \qquad (\text{car } e^{\ln x} = x)$$

exemple 5.1.15

Résoudre l'équation: $2 = e^{0,01x}$

$$
\begin{aligned}
& & 2 &= e^{0,01x} & & \\
&\Rightarrow & 0,01x &= \ln 2 & & \text{(par définition)} \\
&\Rightarrow & x &= \frac{\ln 2}{0,01} & & \\
&\Rightarrow & x &= 100 \ln 2 & &
\end{aligned}
$$

On peut aussi se servir de la technique suivante pour passer de la première équation à la seconde équation.

pour éliminer l'exponentielle d'une équation de la forme $e^x = c$, il suffit de prendre le logarithme de base e de chaque côté de l'équation puis d'utiliser la propriété 5 des logarithmes

$$
\begin{aligned}
& & 2 &= e^{0,01x} & & \\
&\Rightarrow & \ln 2 &= \ln e^{0,01x} & & \\
&\Rightarrow & \ln 2 &= 0,01x \ln e & & \\
&\Rightarrow & x &= \frac{\ln 2}{0,01} & & (\text{car } \ln e = 1) \\
&\Rightarrow & x &= 100 \ln 2 & &
\end{aligned}
$$

exemple 5.1.16

Résoudre les équations suivantes

a) $9e^{-2x} = 1$ c) $(e^x + 1)(e^{x/2} - 7) = 0$

b) $5 - \ln(3x - 2) = 0$ d) $\ln(x^2 + x - 2) = 1 + \ln(x + 2)$

---

rép: a) $\{ \ln 3 \}$; b) $\left\{ \frac{e^5+2}{3} \right\}$; c) $\{ 2 \ln 7 \}$; d) $\{ e + 1 \}$

exemple 5.1.17

Résoudre l'équation: $\ln^2 x - 2 \ln x^2 - 5 = 0$

par convention
$\ln^2 x = (\ln x)^2$
et

par la propriété 5 des logarithmes pour $x > 0$
$\ln x^2 = 2 \ln x$

rép: $\left\{ e^5, \frac{1}{e} \right\}$

remarque On doit être prudent lorsqu'on utilise les propriétés des logarithmes. Ces propriétés, on s'en souvient, sont valables seulement si les logarithmes considérés ont des arguments positifs. Lorsqu'on résout une équation en appliquant les propriétés des logarithmes sans se soucier des conditions préalables à leur utilisation, on risque de perdre certaines solutions ou encore d'obtenir comme solution des valeurs ne satisfaisant pas l'équation.

exemple 5.1.18

Résoudre l'équation: $\ln x^2 = 0$.

Par définition on a

$$\begin{aligned} \ln x^2 = 0 &\Leftrightarrow e^0 = x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc: $\{ -1, 1 \}$.

lorsque la valeur de x peut aussi bien être positive que négative, la propriété 5 des logarithmes devient
$\ln x^2 = 2 \ln|x|$

Si la propriété 5 des logarithmes avait été utilisée sans se soucier que la valeur de x peut aussi bien être positive que négative, on aurait perdu la solution $x = -1$. En effet,

l'équation $\ln x^2 = 0$ serait devenue $2 \ln x = 0$

et
$$\begin{aligned} 2 \ln x = 0 &\Leftrightarrow \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 . \end{aligned}$$

exemple 5.1.19

Une compagnie désire accroître sa part du marché pour un de ses produits. Elle entreprend une campagne publicitaire. Le volume des ventes mensuelles de ce produit t mois après le début de la campagne est donné par l'équation

$$V(t) = 800 - 500\, e^{-0,2t}$$

Au bout de combien de temps le volume des ventes mensuelles sera-t-il le double de ce qu'il était au tout début de la campagne?

rép: 4,58 mois

Exercices 5.1

1. Traduire chaque équation exponentielle sous la forme d'une équation logarithmique et chaque équation logarithmique sous la forme d'une équation exponentielle.

a) $2^3 = 8$

b) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

c) $\log_7 49 = 2$

d) $16^{3/4} = 8$

e) $\log_{10} 0{,}01 = -2$

f) $\log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$

g) $\ln e = 1$

h) $e^0 = 1$

i) $e^2 = 7{,}389...$

j) $\ln 5 = 1{,}609...$

2. Résoudre (sans l'aide de votre calculatrice)

a) $3^x = 81$

b) $2^{2x} = \frac{1}{4}$

c) $2^{2x - 1} = 8^{x + 3}$

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \frac{\sqrt{3}}{3^x}$

3. Évaluer (sans l'aide de votre calculatrice)

a) $\log_2 64$

b) $\log_6\left(\frac{1}{36}\right)$

c) $\log_8 2$

d) $\log_{1/2} 4$

e) $\log_2(\log_3(\log_4 64))$

4. Évaluer (sans l'aide de votre calculatrice)

a) $e^{\ln 7}$

b) $e^{-\ln 8}$

c) $2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

d) $e^{5\ln(1/2)}$

e) $\ln(\ln e^e)$

f) $e^{\ln 2 + \ln 3}$

g) $e^{3\ln 2 - 2\ln 3}$

5. Quelle est la valeur de

a) $\ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)^2$ si $\ln a = 6$ et $\ln b = -2$

b) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{ab^3}}\right)$ si $\ln a = 2$ et $\ln b = 4$

6. Trouver le domaine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = e^{2x - 1}$

b) $f(x) = \ln(x + 3)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{1 - 1/x}}$

d) $f(x) = 2 \ln x - \ln(5 - x)$

e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{5 - x}\right)$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\ln|3x - 2|}$

7. Vrai ou faux $(x > 0)$

a) $\ln(x + 25) = \ln x + \ln 25$

b) $\sqrt{\ln x} = \frac{1}{2} \ln x$

c) $\ln 3x = \ln 3 + \ln x$

d) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = - \ln x$

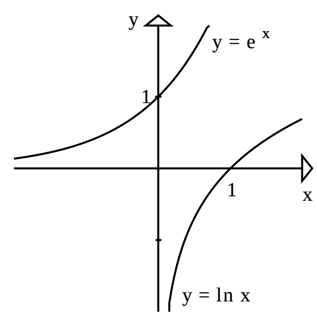
e) $\dfrac{\ln x}{\ln 3} = \ln x - \ln 3$

f) $(e^x)^3 = e^{x^3}$

g) $2^x = e^{2 \ln x}$

h) $\log_x e = \dfrac{1}{\ln x}$ $(x \neq 1)$

8. En vous servant des graphiques de droite, tracer le graphique de chacune des fonctions définies par les équations suivantes.



a) $y = \ln(x + 1)$

b) $y = \ln x + 1$

c) $y = \ln(-x)$

d) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

e) $y = e^{x - 1}$

f) $y = 1 - e^{-x}$

9. Tracer sur le même plan cartésien les fonctions définies par les équations suivantes.

a) $y = e^x$; $y = e^{2x}$; $y = e^{x/2}$

b) $y = \ln x$; $y = \ln 2x$; $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

10. Résoudre chacune des équations.

a) $\ln(3x - 2) = 4$

b) $e^{(x/10)} = 3$

c) $\ln x = \ln 5 + \ln 8$

d) $\ln x^2 = 2 \ln 6 - \ln 4$

e) $1 = \ln(\ln x)$

f) $e^{3x+2} = 5^{1-2x}$

11. Résoudre chacune des équations.

a) $17 = 2 + 5e^{1 - 4x}$

b) $4 - 3 \ln(x + 1) = 0$

c) $(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$

d) $\ln^2 x - 1 = 0$

e) $3 \ln x^2 - \ln^2 x = 0$

f) $e^{3x} - 5e^x = 0$

g) $e^{2x} + 2e^x - 15 = 0$

h) $\ln^2 x + 3 \ln x = 4$

12. Un liquide bouillant est placé dans une pièce dont la température ambiante est de 20°C. La température du liquide en fonction du temps est donnée par l'équation

$$T(t) = 20 + 80e^{-0,2t} \text{ °C}$$

où t est le nombre d'heures écoulées depuis le moment où le liquide a été placé dans la pièce. Combien de temps faudra-t-il pour que la température du liquide soit de 50 °C.

13. Selon un psychologue, si on soumet une liste de 100 mots à une personne, la fonction

$$N(t) = \frac{720}{10 + \ln^2 t} \qquad (t \geq 1)$$

représente le nombre de mots que cette personne se souviendra après t heures d'étude.

a) Combien de mots cette personne se souviendra-t-elle après 2 heures d'étude?
b) Après combien d'heures d'étude la personne se souvient de 60 mots?

14. Montrer que $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_4 x} = \dfrac{1}{\log_{24} x}$

Réponses aux exercices 5.1

1. a) $\log_2 8 = 3$
   b) $\log_3 \left(\frac{1}{3}\right) = -1$
   c) $7^2 = 49$
   d) $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$
   e) $10^{-2} = 0{,}01$
   f) $0{,}5^3 = \frac{1}{8}$
   g) $e^1 = e$
   h) $\ln 1 = 0$
   i) $\ln 7{,}389... = 2$
   j) $e^{1{,}609...} = 5$

2. a) 4
   b) -1
   c) -10
   d) $]-1/2, \infty[$

3. a) 6
   b) -2
   c) $\frac{1}{3}$
   d) -2
   e) 0

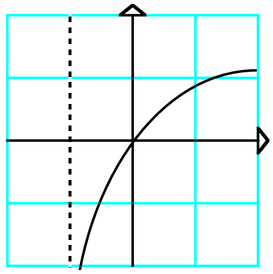
4. a) 7
   b) $\frac{1}{8}$
   c) -1
   d) $\frac{1}{32}$
   e) 1
   f) 6
   g) $\frac{8}{9}$

5. a) 10
   b) -7

6. a) **R**
   b) $]-3, \infty[$
   c) $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$
   d) $]0, 5[$
   e) $]-\infty, 5[\setminus \{0\}$
   f) $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$

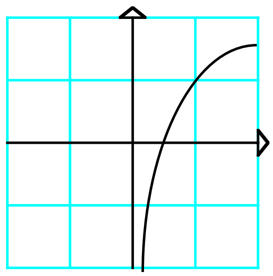
7. a) F
   b) F
   c) V
   d) V
   e) F
   f) F
   g) F
   h) V

8. a)



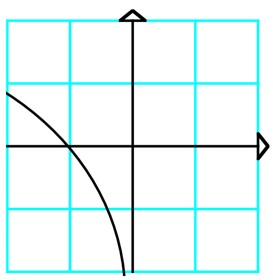
Le graphique de $\ln x$ subit une translation horizontale de 1 unité vers la gauche.

b)



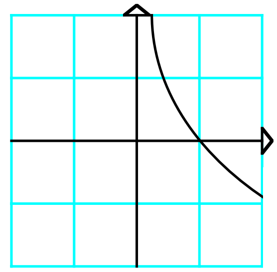
Le graphique de $\ln x$ subit une translation verticale de 1 unité vers le haut.

c)



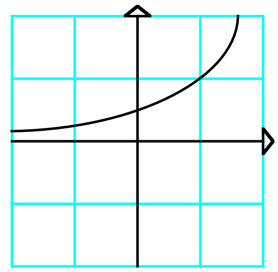
Le graphique de $\ln x$ subit une rotation autour de l'axe des y.

d)



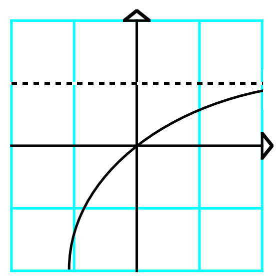
Le graphique de $\ln x$ subit une rotation autour de l'axe des x puisque $\ln(1/x) = -\ln x$.

e)



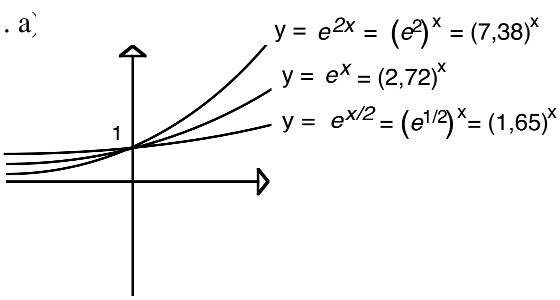
Le graphique de e^x subit une translation horizontale de 1 unité vers la droite.

f)

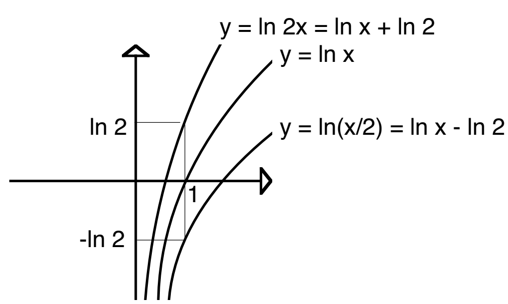


Le graphique de e^x subit une rotation autour de l'axe des y, une rotation autour de l'axe des x et pour finir, une translation verticale de 1 unité vers le haut.

9 . a)



b)



10. a) $\left\{ \dfrac{2 + e^4}{3} \right\}$

b) $\{ 10 \ln 3 \}$

c) $\{ 40 \}$

d) $\{ -3, 3 \}$

e) $\{ e^e \}$

f) $\left\{ \dfrac{\ln 5 - 2}{3 + 2 \ln 5} \right\}$

11. a) $\left\{ \dfrac{1 - \ln 3}{4} \right\}$

b) $\left\{ e^{4/3} - 1 \right\}$

c) $\{ 0 , \ln 2 \}$

d) $\left\{ e , \dfrac{1}{e} \right\}$

e) $\{ 1 , e^6 \}$

f) $\left\{ \dfrac{\ln 5}{2} \right\}$

g) $\{ \ln 3 \}$

h) $\left\{ e , \dfrac{1}{e^4} \right\}$

12. 4,9 heures

13. a) 68,7 mots

b) 4,1 heures

5.2 Limite et continuité *(fonctions exponentielle et logarithmique)*

Lorsqu'on évalue une limite sur une fonction qui contient des expressions de type exponentiel ou logarithmique, on pourra utiliser toutes les règles se rapportant aux fonctions algébriques ainsi que la proposition suivante.

proposition 5.2.1

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \quad (a, c \in \overline{\mathbf{R}})$ alors

$b > 0$, $b \neq 1$

a) $\lim\limits_{x \to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = b^c$

b) $\lim\limits_{x \to a} \log_b f(x) = \log_b \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right) = \log_b c \quad (\text{si } c > 0)$

exemple 5.2.1

Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{3x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \ln(2x - 3)$

---

prop. 5.2.1 a) et prop. 1.2.3

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{3x - 1} = 2^{\lim\limits_{x \to 0}(3x - 1)} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$.

prop. 5.2.1 b) et prop. 1.2.3

b) $\lim\limits_{x \to 2} \ln(2x - 3) = \ln\left(\lim\limits_{x \to 2} (2x - 3)\right) = \ln 1 = 0$

exemple 5.2.2

Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x}$

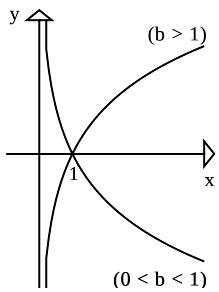
c) $\lim\limits_{x \to \infty} \log_3 (7x + 5)$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 - \ln x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{5 - 3e^x}$

rép: a) ∞ ; b) 0 ; c) ∞ ; d) $-\infty$; e) $-\frac{1}{3}$

la forme $\boldsymbol{\log_b 0}$



$y = \log_b x$

a) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \log_b f(x)$ <u>peut exister</u> dans $\overline{\mathbf{R}}$.

En effet si la fonction $f(x)$ s'approche de zéro tout en demeurant toujours positive quelle que soit la valeur de x dans un voisinage troué du point a alors on aura

$$\lim_{x \to a} \log_b f(x) = \log_b\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = \log_b 0^+ = \begin{cases} -\infty & \text{si } b>1 \\ \infty & \text{si } 0<b<1 \end{cases}$$

Autrement la limite n'existe pas.

b) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) < 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \log_b f(x)$ n'existe pas dans $\overline{\mathbf{R}}$.

exemple 5.2.3

Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x$

---

prop. 5.2.1 a) et prop. 1.2.3

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \ln\left(\lim\limits_{x \to 0^+} x\right) = \ln 0^+ = -\infty$

prop. 5.2.1 b) et prop. 1.2.3

b) $$\lim_{x \to 0} \ln x = \ln\left(\lim_{x \to 0} x\right) = \ln 0 = \begin{cases} \ln\left(\lim\limits_{x \to 0^-} x\right) = \ln 0^- = \nexists \\ \ln\left(\lim\limits_{x \to 0^+} x\right) = \ln 0^+ = -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \ln x \quad \nexists$$

exemple 5.2.4

Évaluer chacune des limites si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to 4} \log_5 (3 - x)$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \log_{1/3} \left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x - 1}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x - \ln x^3$

rép: a) $\nexists$; b) ∞ ; c) ∞ ; d) $-\infty$

Penchons-nous maintenant sur la limite suivante: $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = 1^{1/0} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} (1+x)^{1/x} = 1^{-\infty} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x} = 1^{\infty} \end{cases}$$

Lorsque $x \to 0^+$ l'expression $(1+x)^{1/x}$ subit l'effet de deux attractions opposées. La base $(1 + x)$ diminue pour s'approcher de 1 tandis que l'exposant $1/x$ augmente sans limite. Comment ces deux attractions se combinent-elles? Laquelle des deux l'emportera? L'expression s'approchera-t-elle de 1 ou s'éloignera-t-elle vers l'infini? Pour répondre à ces questions et pour voir ce qui ce passe lorsque $x \to 0^-$, examinons les tableaux suivants. (Les quantités ont été arrondies à cinq décimales.)

il existe évidemment une approche directe (sans tableau) au problème mais cette approche dépasse le niveau du cours; dans un cours plus avancé (MATH 203), nous verrons que les quantités $1^{-\infty}$ et 1^{∞} sont des formes indéterminées et nous verrons comment lever ces indéterminations

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$(1+x)^{1/x}$	2	2,59374	2,70481	2,71693	2,71815	2,71827	2,71828

x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001	-0,000001
$(1+x)^{1/x}$	0	2,86797	2,73200	2,71964	2,71842	2,71829	2,71828

Il paraît évident à la lecture des tableaux que plus x s'approche de 0 plus $(1+x)^{1/x}$ s'approche de la valeur $e = 2{,}71828...$

proposition 5.2.2

définition du nombre *e*

$$\boxed{\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e \qquad \text{où } e = 2{,}718\,281\,828\,...}$$

corollaire 5.2.1

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

démonstration

Si $x \to 0 \Rightarrow (1+x)^{1/x} \approx e$ (prop. 5.2.2)

$$\Rightarrow \left[(1+x)^{1/x}\right]^x \approx e^x$$

$$\Rightarrow (1+x) \approx e^x$$

$$\Rightarrow x \approx e^x - 1$$

$$\Rightarrow 1 \approx \frac{e^x - 1}{x}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

proposition 5.2.3

b > 0, b ≠ 1

Si g(x) est continue sur l'intervalle ouvert I alors la fonction

a) $f(x) = b^{g(x)}$ est continue sur I,

b) $f(x) = \log_b g(x)$ est continue sur I si $g(x) > 0 \quad \forall\, x \in I$.

exemple 5.2.5

Étudier la continuité de $f(x) = e^{2x + 1}$ sur l'ensemble des réels.

$$\underbrace{f(x) = e^{\overbrace{\boxed{2x + 1}}^{\substack{g(x) = 2x + 1 \text{ est continue} \\ \text{sur l'ensemble des réels} \\ \text{(forme polynomiale)}}}}}_{}$$

$f(x)$ est par conséquent continue sur l'ensemble des réels
prop. 5.2.3 a)

exemple 5.2.6

Étudier la continuité de $f(x) = \ln(x + 1)$ sur l'ensemble des réels.

$$\underbrace{f(x) = \ln \overbrace{\boxed{x + 1}}^{\substack{g(x) = x + 1 \text{ est continue} \\ \text{sur l'ensemble des réels} \\ \text{(forme polynomiale)} \\ \text{et} \\ x + 1 > 0 \text{ si } x > -1}}}_{}$$

$f(x)$ est par conséquent continue sur]-1, ∞[
prop. 5.2.3 b)

exemple 5.2.7

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur **R**.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)$

b) $f(x) = \dfrac{\ln(x + 1) - \ln(2 - x)}{e^x - 1}$

rép: a) f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$; b) f est continue sur $]-1, 2[\setminus \{ 0 \}$

Exercices 5.2

1. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\lim\limits_{x \to -5} \log_3 (4 - x)$

b) $\lim\limits_{x \to e} x \ln x$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \log_2 (x + 1)$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \log_3 (2 + x)$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

g) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{1/2} x$

h) $\lim\limits_{x \to 0} (x + 1) \ln x$

i) $\lim\limits_{x \to 3} \ln|3 - x|$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 + 2e^{-x}}{10 + 4e^{-x}}$

k) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln x}$

l) $\lim\limits_{x \to 0^+} 3^{1/x}$

m) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^{-x}}{x}$

n) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$

o) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x}$

p) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x + 3^x}{x^2}$

q) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln x}$

r) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{3 + 5^{1/x}}$

s) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\ln x^2}$

t) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 - 3e^{-x}}{5e^{-x} + 2}$

u) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\dfrac{2x}{x + 1}\right)$

v) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(2x) - \ln(3x - 1)$

w) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x^2 - x + 3)$

x) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 + 5e^{-x}}{10 + 7e^{-x}}$

y) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(3x)}{\ln(5x)}$

z) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - e^{2x}}{e^x + e^{2x}}$

2. En utilisant votre calculatrice compléter les tableaux ci-dessous.

a)

x	10	100	1000	10 000
$\frac{\ln x}{x}$				

b)

x	-1	-5	-10	-100
xe^x				

3. En utilisant les deux tableaux précédents estimer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$

4. Étudier la continuité de chacune des fonctions sur l'ensemble des réels.

a) $f(x) = \ln(x + 3)$

b) $f(x) = \log_2 (x^2 - 1)$

c) $f(x) = e^{4x - 1}$

d) $f(x) = e^{\sqrt{2 - x}}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{\ln(4 - x) + \ln x}{e^x - 2}$

Réponses aux exercices 5.2

1. a) 2
   b) e
   c) $\nexists$ (à gauche: $-\infty$ et à droite: ∞)
   d) 0
   e) $\nexists$
   f) 0
   g) ∞
   h) $\nexists$ (à gauche: $\nexists$ et à droite: $-\infty$)
   i) $-\infty$
   j) $\frac{5}{14}$
   k) 0
   l) ∞
   m) 0
   n) 0
   o) ∞
   p) ∞
   q) ∞
   r) $\frac{1}{3}$
   s) $\frac{1}{2}$
   t) 1
   u) ln 2
   v) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$
   w) ∞
   x) $\frac{5}{7}$
   y) 1
   z) -1

2. a)

x	10	100	1000	10 000
$\frac{\ln x}{x}$	0,2302	0,0461	0,0069	0,0009

b)

x	-1	-5	-10	-100
xe^x	-0,368	-0,034	-0.0005	$-3{,}72\times10^{-42}$

3. a) 0 b) 0

4. a) continue sur $]-3, \infty[$
   b) continue sur $]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, \infty[$
   c) continue sur **R**
   d) continue sur $]-\infty, 2[$
   e) continue sur $]0, \infty[\ \setminus \{ e \}$
   f) continue sur $]0, 4[\ \setminus \{ \ln 2 \}$

5.3 Dérivée *(fonctions exponentielle et logarithmique)*

proposition 5.3.1

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

démonstration

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} e^x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{(x + \Delta x)} - e^x}{\Delta x} && \text{(par définition)} \\
&= \frac{0}{0} \text{ IND.} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x . e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} && \text{(propriété 3 des exposants)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
&= e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\
&= e^x \ (1) && \text{(corollaire 5.2.1)} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est égale à la fonction elle-même ce qui en fait la fonction la plus simple à dériver.

exemple 5.3.1

Trouver $\frac{d}{dx}(3e^x - 1)$

les règles de dérivation précédentes peuvent être utilisées y compris la prop. 5.3.1

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(3e^x - 1) &= 3 \overbrace{\frac{d}{dx} e^x}^{e^x} - \overbrace{\frac{d}{dx} 1}^{0} . \\
&= 3e^x
\end{aligned}$$

exemple 5.3.2

Trouver $\frac{d}{dt}\left(\frac{1 + e^t}{1 - e^t}\right)$

rép: $\frac{2e^t}{(1 - e^t)^2}$

exemple 5.3.3

Trouver $\frac{d}{dx}\sqrt{a + be^x}$ (a et b sont des constantes).

rép: $\frac{be^x}{2\sqrt{a + be^x}}$

D'une façon générale on obtient la dérivée de $y = e^{g(x)}$ en posant

$$y = e^u \quad \text{où} \quad u = g(x)$$

Selon la règle de dérivation en chaîne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= e^u \frac{d}{dx} g(x)$$

$$= e^{g(x)} \frac{d}{dx} g(x)$$

règle 10

$$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right) = e^{g(x)} \frac{d}{dx} g(x)$$

exemple 5.3.4

Trouver $\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

par la règle 10

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$= e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

exemple 5.3.5

Trouver y' si $y = 2e^{2x} - \frac{4}{e^x}$

rép: $\frac{4(e^{3x} + 1)}{e^x}$

exemple 5.3.6

Soit $y = x^2e^{3x}$, trouver $\dfrac{dy}{dx}$.

rép: $xe^{3x}(2 + 3x)$

exemple 5.3.7

Soit l'équation $e^{xy} = x + y$, trouver $\dfrac{dy}{dx}$ implicitement .

rép: $\dfrac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}$

exemple 5.3.8

Trouver $\dfrac{d^4}{dt^4}\left(e^{-kt}\right)$ où k est une constante

rép: k^4e^{-kt}

On obtient la dérivée d'une fonction exponentielle de base b quelconque en utilisant la proposition 5.1.5 (formules de changement de base) et la règle 10.

règle 11

$$\frac{d}{dx}\left(b^{g(x)}\right) = b^{g(x)} (\ln b) \frac{d}{dx} g(x)$$

démonstration

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(b^{g(x)}\right) &= \frac{d}{dx} e^{(\ln b)g(x)} && \left(b^{g(x)} = e^{(\ln b)g(x)} \right) \\
&= e^{(\ln b)g(x)} \frac{d}{dx}\left[(\ln b)\ g(x)\right] && \text{(par la règle 10)} \\
&= e^{(\ln b)g(x)} (\ln b) \frac{d}{dx} g(x) && \text{(} \ln b \text{ est constant)} \\
&= b^{g(x)} (\ln b) \frac{d}{dx} g(x) && \left(e^{(\ln b)g(x)} = b^{g(x)} \right)
\end{aligned}$$

exemple 5.3.9

Trouver $\frac{d}{dx}\left(3^{5x - 1}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(3^{5x - 1}\right) &= \left(3^{5x - 1}\right). (\ln 3) . \frac{d}{dx}(5x - 1) \\
&= \left(3^{5x - 1}\right). (\ln 3) . 5 \\
&= 5 (\ln 3) \left(3^{5x - 1}\right)
\end{aligned}$$

exemple 5.3.10

Trouver $\frac{d}{dx}\ 4^{x/2}\, 2^{\sqrt{x}\ - x}$

rép: $\dfrac{2^{\sqrt{x}\ - 1} \ln 2}{\sqrt{x}}$

proposition 5.3.2

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

démonstration

Soit $y = \ln x \iff e^y = x$

$\iff e^y \dfrac{dy}{dx} = 1$ (par dérivation implicite)

$\iff \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y}$

$\iff \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ (puisque $e^y = x$)

exemple 5.3.11

Trouver $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{x\overbrace{\frac{d}{dx}\ln x}^{\frac{1}{x}} - \ln x\overbrace{\frac{d}{dx}x}^{1}}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

exemple 5.3.12

Trouver $\dfrac{d}{dx}\sqrt{1 - 2\ln x}$

rép: $\dfrac{-1}{x\sqrt{1 - 2\ln x}}$

D'une façon générale on obtient la dérivée de $y = \ln g(x)$ en posant

$$y = \ln u \quad \text{où} \quad u = g(x)$$

Selon la règle de dérivation en chaîne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u} \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

$$= \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

règle 12

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{d}{dx} g(x)}$$

exemple 5.3.13

Trouver $\frac{d}{dx} \ln(2x - 1)$

par la règle 12

$$\frac{d}{dx} \ln(2x - 1) = \frac{1}{2x - 1} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(2x - 1)}^{2}$$

$$= \frac{2}{2x - 1}$$

exemple 5.3.14

Trouver $\frac{d}{dx} \ln\sqrt{x + 1}$

$$\frac{d}{dx} \ln\sqrt{x + 1} = \frac{d}{dx} \ln(x + 1)^{1/2}$$

propriété 5 des log.

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \ln(x + 1)\right)$$

propriété de la dérivée et règle 12

$$= \frac{1}{2}\left(\overbrace{\frac{d}{dx} \ln(x + 1)}^{\frac{1}{x + 1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2(x + 1)}$$

exemple 5.3.15

Trouver $\dfrac{d}{dx}\left[\ln(3x+4)^3 + \ln^3(3x+4)\right]$

rép: $\dfrac{9}{3x+4}\left[1 + \ln^2(3x+4)\right]$

exemple 5.3.16

Trouver $\dfrac{d}{dx}\left[\ln\left(\dfrac{3-x}{x^2+1}\right) + \ln\left(x\sqrt{x-1}\right)\right]$

rép: $\dfrac{-1}{3-x} - \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x-1)}$

En utilisant la règle 12, on peut facilement démontrer le résultat suivant.

$\mathbf{\dfrac{d}{dx}\ \ln|g(x)|}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|g(x)| = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{d}{dx}g(x)}$$

En effet,

$$\frac{d}{dx}\ln|g(x)| = \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\ln g(x) = \dfrac{1}{g(x)} \cdot \dfrac{d}{dx}g(x) & \text{si } g(x) > 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dx}\ln(-g(x)) = \dfrac{1}{(-g(x))} \cdot \dfrac{d}{dx}(-g(x)) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas la réponse est la même,

$$\frac{d}{dx}\ln|g(x)| = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{d}{dx}g(x)$$

exemple 5.3.17

Trouver $\dfrac{d}{dx}\ln|2x^3 - 5|$

$$\frac{d}{dx}\ln|2x^3 - 5| = \frac{1}{2x^3 - 5} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(2x^3 - 5)}^{6x^2} = \frac{6x^2}{2x^3 - 5}$$

Pour obtenir la dérivée d'une fonction logarithmique de base b quelconque on utilise la proposition 5.1.5 et la règle 11

règle 13

$$\frac{d}{dx}\log_b g(x) = \frac{1}{g(x)\ln b}\frac{d}{dx}g(x)$$

démonstration

$$\frac{d}{dx}\log_b g(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln g(x)}{\ln b}\right] \qquad \text{(prop. 5.1.5)}$$

$$= \frac{1}{\ln b}\left(\frac{d}{dx}\ln g(x)\right) \qquad \text{(ln b est constant)}$$

$$= \frac{1}{\ln b}\left(\frac{1}{g(x)}\frac{d}{dx}g(x)\right) \qquad \text{(règle 11)}$$

$$= \frac{1}{g(x)\ln b}\frac{d}{dx}g(x)$$

exemple 5.3.18

Trouver $\frac{d}{dx}\log_2(2x - 1)$

par la règle 12

$$\frac{d}{dx}\log_2(2x - 1) = \frac{1}{(2x - 1)\ln 2}\overbrace{\frac{d}{dx}(2x - 1)}^{2}$$

$$= \frac{2}{(2x - 1)\ln 2}$$

exemple 5.3.19

Trouver $\frac{d}{dx}\log_{10}\left[\frac{1}{(5x - 1)^2}\right]$

rép: $\frac{-10}{(5x - 1)\ln 10}$

la dérivation logarithmique

La *dérivation logarithmique* est une technique qui a pour but de simplifier la dérivation de l'équation $y = f(x)$ lorsque $f(x)$ est constitué de produits, de quotients ou d'exposants.

Il s'agit d'abord de prendre le logarithme naturel (de base e) de chaque côté de l'équation $y = f(x)$. On obtient ainsi l'équation

$$\ln y = \ln f(x).$$

On transforme ensuite $\ln f(x)$ en utilisant les propriétés des logarithmes. Finalement, on dérive implicitement chaque membre de la nouvelle équation. L'exemple ci-dessous illustre la méthode.

exemple 5.3.20

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{(2x - 5)^3}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}$.

Imaginez le travail que demande cette dérivée. On doit utiliser les formules du quotient, du produit ainsi que d'une puissance de fonction.

La dérivée logarithmique fait le travail beaucoup plus rapidement. On doit d'abord prendre le logarithme naturel de chaque côté de l'équation.

$$\ln y = \ln\left[\frac{(2x - 5)^3}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}\right]$$

par les propriétés des logarithmes

$$= 3 \ln(2x - 5) - 2 \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

En dérivant les deux membres de cette égalité, nous trouvons

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{2x - 5}\right)2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)2x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

Multiplions chaque membre de l'équation par y

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}\right]$$

Remplaçons ensuite y par $\frac{(2x - 5)^3}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x - 5)^3}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}\left[\frac{6}{2x - 5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}\right]$$

exemple 5.3.21

Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \dfrac{(x + 1)^2\sqrt{x - 1}}{(x + 4)^3\, e^x}$.

utiliser le procédé de dérivation logarithmique

rép: $\dfrac{(x + 1)^2\sqrt{x - 1}}{(x + 4)^3 e^x}\left[\dfrac{2}{x + 1} + \dfrac{1}{2(x - 1)} - \dfrac{3}{x + 4} - 1\right]$

fonction composée exponentielle

On appelle *fonction composée exponentielle* toute fonction exponentielle dont la base et l'exposant sont des fonctions de x. Par exemple $y = x^{4x}$, $y = (3x - 2)^{1/x}$ ou en général toute fonction d'équation

$$y = f(x)^{g(x)}$$

est une fonction composée exponentielle. Étant donné que $f(x)$ et $g(x)$ ne représentent pas nécessairement des constantes, il ne sera pas possible d'utiliser les règles précédentes. Dans ce cas on utilisera plutôt la technique de dérivation logarithmique.

exemple 5.3.22

Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = x^{4x}$ $(x > 0)$

$$\ln y = \ln\left(x^{4x}\right)$$

par les propriétés des logarithmes

$$\Rightarrow \quad \ln y = 4x \ln x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln x\, \overbrace{\frac{d}{dx}\, 4x}^{4} + 4x\, \overbrace{\frac{d}{dx} \ln x}^{1/x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 4 \ln x + 4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x^{4x}(4 \ln x + 4)$$

proposition 5.3.3
dérivée d'une fonction composée exponentielle

Soit $y = u^v$ (u, v sont des fonctions de x)

$$\frac{dy}{dx} = v\,u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}$$

On peut facilement démontrer cette proposition en utilisant le procédé de dérivation logarithmique sur l'équation $y = u^v$. La démonstration est laissée à l'étudiant.

Ainsi, la dérivée d'une fonction composée exponentielle comprend deux termes: on obtient le premier en supposant au cours de la dérivation que u est une fonction de x et v une constante (c'est-à-dire en considérant u^v comme une fonction puissance); on obtient le second terme en supposant que v est une fonction de x et u une constante (c'est-à-dire en considérant u^v comme une fonction exponentielle.

exemple 5.3.23

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = (3x - 2)^{1/x}$

rép: $\frac{3(3x - 2)^{1/x - 1}}{x} - \frac{(3x - 2)^{1/x}\ln(3x - 2)}{x^2}$

Il est facile d'obtenir la dérivée de $|f(x)|$ en utilisant le procédé de dérivation logarithmique,

exemple 5.3.24

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = |3x - 2|$

$$\ln y = \ln|3x - 2|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x - 2}\overbrace{\frac{d}{dx}(3x - 2)}^{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = |3x - 2|\frac{3}{3x - 2}$$

$$= \frac{3|3x - 2|}{3x - 2}$$

proposition 5.3.4

dérivée d'une fonction en valeur absolue

$$\frac{d}{dx}|f(x)| = \frac{|f(x)|}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

La démonstration est laissée à l'étudiant.

exemple 5.3.25

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = \left|\frac{x}{5 - x}\right|$

rép: $\left|\frac{x}{5 - x}\right| \frac{5}{x(5 - x)}$

Exercices 5.3

1. Trouver $\frac{dy}{dx}$

a) $y = e^{-x/2}$

b) $y = e^{\sqrt{x+4}}$

c) $y = x^2 e^x$

d) $y = \frac{e^x}{x}$

e) $y = \left(e^{3x-1}\right)^3$

f) $y = \sqrt{e^{(1-x)}}$

g) $y = \frac{1 - 3x}{e^{-3x}}$

h) $y = \frac{3}{4 + 5e^{2x}}$

i) $y = \left(e^{-2x} + x\right)^4$

j) $y = \frac{e^{-x/6} - e^{-x/3}}{6}$

k) $y = x^3 e^{-x/3}$

l) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

m) $y = -e^{-ax}\left(\frac{ax + 1}{a^2}\right)$ $(a \neq 0)$

n) $y = 5^{2x-1}$

o) $y = \sqrt{3^x}$

p) $y = (1{,}6)^x + x^{1{,}6}$

q) $y = x^2\, 3^{-1/x}$

r) $y = \frac{3}{2^{(6 - x)}}$

2. Trouver $\frac{dy}{dx}$

a) $y = \ln(5x + 2)$

b) $y = \ln(1 - 3x)^2$

c) $y = 5(\ln x)^2$

d) $y = \ln(\ln x)$

e) $y = \ln^2(1 - 3x)$

f) $y = \ln\sqrt{3 - x^2}$

g) $y = \sqrt{\ln(3x^2)}$

h) $y = \ln^3(x^2)$

i) $y = x \ln x - x$

j) $y = \frac{\ln x^2}{x^2}$

k) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\ln x}$

l) $y = \ln|4 - 7x|$

m) $y = \ln((x + 1)(x^2 - 1))$

n) $y = \ln\left(\frac{x^2}{3x - 4}\right)^2$

o) $y = \ln\sqrt{(2x + 1)(x^2 - 4)}$

p) $y = \ln\left[\frac{1}{\sqrt{(1 - 3x)^3}}\right]$

q) $y = \frac{\ln(4x)}{\ln(2x)}$

r) $y = \ln|x + \sqrt{1 + x^2}|$

s) $y = \ln\left(\frac{\sqrt{x + 1} - 1}{\sqrt{x + 1} + 1}\right)$

t) $y = \frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{2} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 4}\right)$

u) $y = \log_5(3x^2 + 1)$

v) $y = \frac{\log_2 x}{x}$

w) $y = \log_2(\log_3 x)$

x) $y = \log_{10}\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$

3. Trouver $\frac{dy}{dx}$ implicitement.

a) $x^2 + y^2 = xe^y$

b) $e^x + e^y = e^{x + y}$

c) $\ln(xy) + x + y = 2$

d) $\ln\left(\frac{y}{x}\right) + xy = 1$

4. Trouver $\frac{d^{42}y}{dx^{42}}$

a) $y = e^{kx}$ (k est une constante)

b) $y = xe^x$

c) $y = x \ln x$

5. Trouver $\frac{dy}{dx}$ en utilisant le procédé de dérivation logarithmique.

a) $y = (x^2 + 2)^3(1 - x^3)^4$

b) $y = \frac{x(1 - x^2)^2}{\sqrt{1 + x^2}}$

c) $y = \frac{x\sqrt{x + 1}}{\sqrt[3]{x - 1}}$

6. Trouver $\frac{dy}{dx}$

a) $y = x^x$ $(x > 0)$

b) $y = x^{\ln x}$ $(x > 0)$

c) $y = (\ln x)^x$ $(\ln x > 0)$

d) $y = (3x^2 + 1)^{x + 2}$

7. Trouver $\frac{dy}{dx}$

a) $y = |\ln x|$ b) $y = \frac{1}{|1 - x|}$

Réponses aux exercices 5.3

1. a) $-\dfrac{e^{-x/2}}{2}$

b) $\dfrac{e^{\sqrt{x+4}}}{2\sqrt{x+4}}$

c) $xe^x(2 + x)$

d) $\dfrac{e^x(x - 1)}{x^2}$

e) $9e^{9x-3}$

f) $-\dfrac{\sqrt{e^{1-x}}}{2}$

g) $-9xe^{3x}$

h) $\dfrac{-30e^{2x}}{(4 + 5e^{2x})^2}$

i) $4(1 - 2e^{-2x})(e^{-2x} + x)^3$

j) $\dfrac{2e^{-x/3} - e^{-x/6}}{36}$

k) $\dfrac{(9 - x)\,x^2\,e^{-x/3}}{3}$

l) $\dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

m) $x\,e^{-ax}$

n) $5^{2x-1}\,2\ln 5$

o) $\dfrac{\ln 3\,\sqrt{3^x}}{2}$

p) $(1{,}6)^x\,(\ln 1{,}6) + 1{,}6\,x^{0{,}6}$

q) $(2x + \ln 3)\,3^{-1/x}$

r) $3(\ln 2)\,2^{(x - 6)}$

2. a) $\dfrac{5}{5x + 2}$

b) $\dfrac{-6}{1 - 3x}$

c) $\dfrac{10\ln x}{x}$

d) $\dfrac{1}{x\ln x}$

e) $\dfrac{-6\ln(1 - 3x)}{1 - 3x}$

f) $\dfrac{-x}{3 - x^2}$

g) $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln(3x^2)}}$

h) $\dfrac{6\ln^2(x^2)}{x}$

i) $\ln x$

j) $\dfrac{2(1 - \ln x^2)}{x^3}$

k) $\dfrac{1 - \ln^2 x}{x\ln^2 x}$

l) $\dfrac{-7}{4 - 7x}$

m) $\dfrac{3x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$

n) $\dfrac{2(3x - 8)}{x(3x - 4)}$

o) $\dfrac{(3x + 4)(x - 1)}{(2x + 1)(x - 2)(x + 2)}$

p) $\dfrac{9}{2(1 - 3x)}$

q) $\dfrac{-\ln 2}{x \ln^2(2x)}$

r) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

s) $\dfrac{1}{x\sqrt{x + 1}}$

t) $\sqrt{x^2 - 4}$

u) $\dfrac{6x}{(\ln 5)(3x^2 + 1)}$

v) $\dfrac{1 - (\ln 2) \log_2 x}{(\ln 2)\, x^2}$

w) $\dfrac{1}{(\ln 2)(\ln 3)\, x \log_3 x}$

x) $\dfrac{-4}{(\ln 10)(x^2 - 1)}$

3. a) $\dfrac{e^y - 2x}{2y - xe^y}$

b) $\dfrac{e^x(e^y - 1)}{e^y(1 - e^x)}$

c) $-\dfrac{y(1 + x)}{x(1 + y)}$

d) $\dfrac{y(1 - xy)}{x(1 + xy)}$

4. a) $k^{42}e^{kx}$

b) $(42 + x)e^x$

c) $\dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 40}{x^{41}}$

5. a) $(x^2 + 2)^3(1 - x^3)^4\left(\dfrac{6x}{x^2 + 2} - \dfrac{12x^2}{1 - x^3}\right)$

b) $\dfrac{x(1 - x^2)^2}{\sqrt{1 + x^2}}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{4x}{1 - x^2} - \dfrac{x}{1 + x^2}\right)$

c) $\dfrac{x\sqrt{x + 1}}{\sqrt[3]{x - 1}}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x + 1)} - \dfrac{1}{3(x - 1)}\right)$

6. a) $x^x(1 + \ln x)$

b) $2\, x^{\ln x - 1} \ln x$

c) $(\ln x)^x\left(\dfrac{1}{\ln x} + \ln(\ln x)\right)$

d) $(3x^2 + 1)^{x + 2}\left(\ln(3x^2 + 1) + \dfrac{6x(x + 2)}{3x^2 + 1}\right)$

7. a) $\dfrac{|\ln x|}{x \ln x}$

b) $\dfrac{1}{|1 - x|\,(1 - x)}$

5.4 Applications *(fonctions exponentielle et logarithmique)*

exemple 5.4.1

La fonction d'équation

$$M(t) = \frac{24}{2 + e^{-t}}$$

représente la masse (en grammes) d'une culture bactérienne après t heures.

a) Calculer la masse initiale de cette culture ?
b) Évaluer $\lim\limits_{t \to \infty} M(t)$ et interpréter votre réponse.
c) Après combien d'heures, la culture bactérienne aura-t-elle une masse de 10 g ?
d) Quel est le taux de croissance moyen de la masse de cette culture durant la première heure ?
e) Quel est le taux de croissance initial de la masse de cette culture ?
f) Évaluer $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{dM}{dt}$ et interpréter votre réponse.

rép: a) 8 g b) à long terme, la masse s'approche de 12 g
c) après 0,92 h (environ 55 min) d) 2,14 g/h e) 2,67 g/h
f) à long terme, le taux de croissance de la masse s'approche de 0 g/h

exemple 5.4.2

Tracer le graphique de la fonction $f(x) = e^{1/x}$.

a) dom $f = \mathbf{R} \setminus \{ 0 \}$,

b) f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{ 0 \}$,

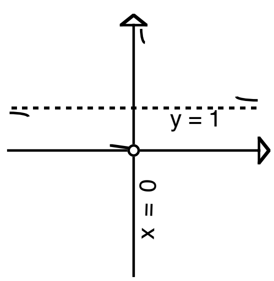
c) La fonction est ni paire, ni impaire puisque

$$f(-x) = e^{1/(-x)} = e^{-1/x} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

d) Asymptote verticale: $\boxed{x = 0}$.

f est discontinue au point 0 et,

$$\lim_{x \to 0} e^{1/x} = e^{1/0} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x} = e^{1/0^+} = e^{\infty} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = 0 \ (0^+) \end{cases}$$



Asymptote horizontale: $\boxed{y = 1}$.

$$\lim_{x \to \infty} e^{1/x} = e^{1/\infty} = e^0 = 1 \ (1^+)$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = e^{1/-\infty} = e^0 = 1 \ (1^-)$$

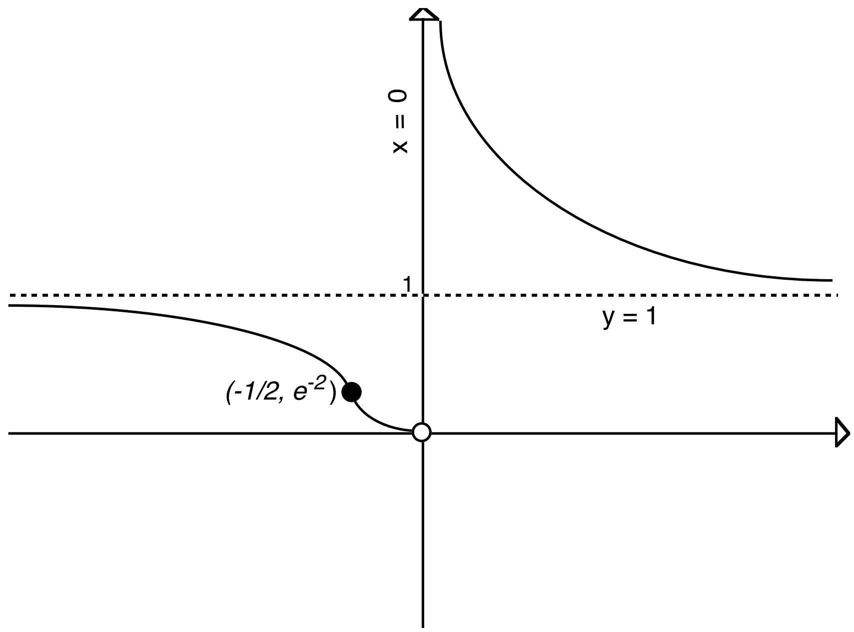
e) $$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} = \begin{cases} 0 & \text{aucune valeur} \\ \nexists & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{n.c.: } \{ \ \}$$

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1/2 \\ \nexists & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{n.t.: } \{ -1/2 \}$$

f) Tableau de variation de la fonction.

x	$-\infty$		$-1/2$		0		∞
$f'(x)$		-	-	-	$\nexists$	-	
$f''(x)$		-	0	+	$\nexists$	+	
$f(x)$	1^-	↘	PI e^{-2}	↘ 0^+	$\nexists$	∞ ↘	1^+

Graphique de la fonction



Exercices 5.4

1. Une firme estime que le montant de ses ventes mensuelles $V(x)$ croît d'une façon logarithmique suivant l'équation

$$V(x) = 2000 \ln x \quad \text{dollars}$$

où x représente le montant (en dollars) dépensé en publicité. Quel est le taux de variation des ventes de la compagnie lorsqu'elle dépense 500 $ en publicité ?

2. On prévoit que dans t années, la population d'une ville sera de

$$P(t) = 100\,000\, e^{0{,}05t} \quad \text{habitants}$$

Quel sera le taux de croissance de la population de la ville dans 10 ans ?

3. Trouver les nombres critiques des fonctions définies par les équations suivantes:

a) $y = xe^{-x}$

b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

c) $y = x^2 \ln x$

d) $y = e^{3x} - 2e^x$

4. Trouver les extremums relatifs de la fonction d'équation $y = x \ln x - x$.

5. Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction d'équation

$$y = x^2 e^{-x}$$

6. Déterminer les points d'inflexion de la fonction définie par l'équation $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

7. Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe de $y = \ln(2 - e^{-3x}) - 1$ lorsque $x = 0$.

8. La fonction

$$C(t) = 110\left(\frac{\ln t - 2}{t}\right) \quad \text{où} \quad t \geq 10$$

représente la capacité pulmonaire d'une personne en fonction de son âge t exprimé en années. Calculer l'âge auquel la capacité pulmonaire d'une personne est maximale.

9. Un manufacturier de disquette pour micro-ordinateur estime ses revenus hebdomadaires à

$$R(x) = 1000x(3 - \ln x) \quad \text{dollars}$$

où x représente le prix de vente (en dollars) d'une boîte de disquettes.

a) Quel doit être le prix de vente d'une boîte de disquettes pour que le revenu de la compagnie soit maximal ?
b) Quel est ce revenu maximal ?

10. La compagnie SUPERMAR a récemment ouvert une nouvelle station genre libre-service. Pour les premiers jours d'opération, elle a effectué beaucoup de publicité pour attirer de nouveaux clients. La compagnie a par la suite déterminé que le nombre de litres d'essence qui s'est vendu le t^e jour après l'ouverture de cette station pouvait être estimé à l'aide de la fonction

$$Q(t) = 60t^2e^{-t/4} + 1500 \text{ litres } \quad (4 \le t \le 20)$$

a) Combien de jours après l'ouverture, la station a-t-elle vendu la plus grande quantité d'essence ?
b) Quelle est cette quantité maximale ?

11. D'après un modèle sur la croissance de la population mondiale, on estime que dans t années après 1975, le nombre d'habitants sur la terre sera d'environ

$$N(t) = \frac{12}{1 + 2e^{-0,03t}} \quad \text{milliards d'habitants}$$

Selon ce modèle,

a) quelle sera la population du globe en l'an 2000 ?
b) que deviendra la population du globe à long terme ?
c) en quelle année la population sera-t-elle de 10 milliards d'habitants ?
d) quel sera le taux de croissance de la population mondiale en l'an 2000 ?

12. Lorsqu'on administre un médicament antibiotique par voie intraveineuse, la concentration de cette substance augmente dans le sang jusqu'à un certain moment et diminue par la suite. Dans le cas d'une pneumonie à mycoplasme, la concentration sanguine de l'antibiotique approprié est donnée par

$$C(t) = 0,3\left(e^{-0,18t} - e^{-1,2t} \right)$$

où t représente le nombre d'heures après l'injection.

a) Que devient la concentration à long terme?
b) Après combien de temps la concentration est-t-elle maximale ?

13. Dans une usine d'équipement industriel, on estime qu'en vendant x machines, le prix de vente de chacune d'elles sera de $200\,000\, e^{-x/40}$ dollars.

a) Exprimer en fonction de x le revenu $R(x)$ de l'usine.
b) Combien de machines doit-on vendre annuellement pour que le revenu soit maximal ?
c) Quel est le revenu maximal ?
d) Quel sera alors le prix par machine ?

14. Un fabricant produit des radios au coût de 5 $ l'unité et il estime que s'il les vend x dollars chacun, les consommateurs en achèteront environ $1000\, e^{-0,1x}$ par semaine.
À quel prix le fabricant devrait-il vendre ses radios pour maximiser son profit hebdomadaire ?

15. Pour chacune des fonctions suivantes,

- trouver son domaine,
- étudier la continuité ,
- déterminer si f est paire, impaire ou ni paire et ni impaire,
- déterminer les asymptotes (verticales et horizontales),
- trouver $f'(x)$ et les nombres critiques,
- trouver $f''(x)$ et les nombres de transition,
- construire le tableau de variation de f en indiquant clairement, les intervalles de croissance et de décroissance, les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas, les extremums relatifs et les points d'inflexion,
- tracer le graphique.

a) $f(x) = \ln^2 x$

b) $f(x) = 2e^x - xe^x$

$$\lim_{x \to -\infty} (2e^x - xe^x) = 0 \ (0^+) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} (2e^x - xe^x) = -\infty$$

c) $f(x) = x^2(3 - 2 \ln x)$

$$f'(x) = 4x(1 - \ln x) \quad , \quad f''(x) = -4 \ln x \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} x^2(3 - 2 \ln x) = 0 \ (0^+)$$

d) $f(x) = e^{1/x^2}$

$$f'(x) = -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{2\, e^{1/x^2}\,(3x^2 + 2)}{x^6}$$

e) $f(x) = \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$

$$f'(x) = \frac{4e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{4e^{-x}\,(e^{-x} - 1)}{(1 + e^{-x})^3}$$

Réponses aux exercices 5.4

1. 4 $ de vente / dollar dépensé en publicité

2. 8 244 habitants / année

3. a) $\{ 1 \}$ c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{e}} \right\}$

   b) $\{ e \}$ d) $\left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} \right\}$

4. Minimum relatif au point: $(1, -1)$; aucun maximum relatif .

5. Croissante sur $]\, 0\, , 2\, [$ et décroissante sur $]\, -\infty\, , 0\, [\cup]\, 2\, , \infty\, [$

6. PI: $\left(e\sqrt{e}\ ,\ \frac{3}{2e\sqrt{e}} \right)$

7. $y = 3x - 1$

8. 20 ans

9. a) 7,39 $ la boîte b) 7390 $

10. a) 8 jours b) 2020 litres

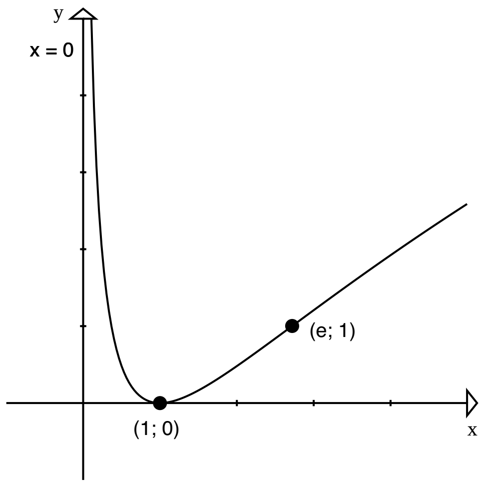
11. a) 6,17 milliards d'habitants c) en 2052
    b) 12 milliards d'habitants d) 0,0899 milliards d'habitants /année (89 900 000 habitants/année)

12. a) La concentration à long terme est nulle puisque $\lim\limits_{t \to \infty} M(t) = 0$.
    b) La concentration est maximale après 1,86 heure.

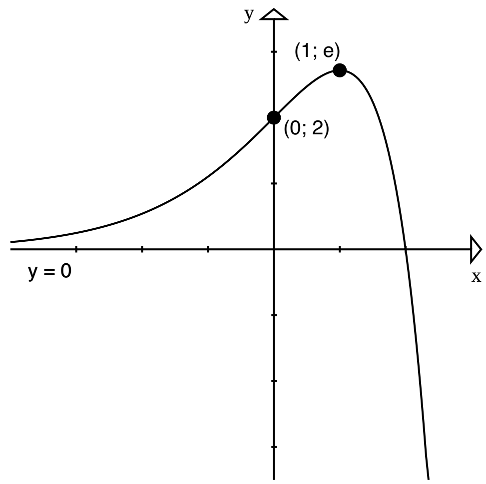
13. a) $R(x) = 200\,000\, x e^{-x/40}$ c) 2 943 036 $
    b) 40 d) 73 576 $

14. 15 $

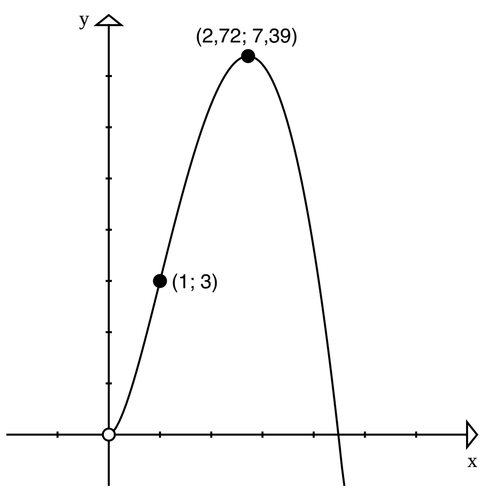
15. a) $f'(x) = \dfrac{2 \ln x}{x}$; $f''(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x^2}$



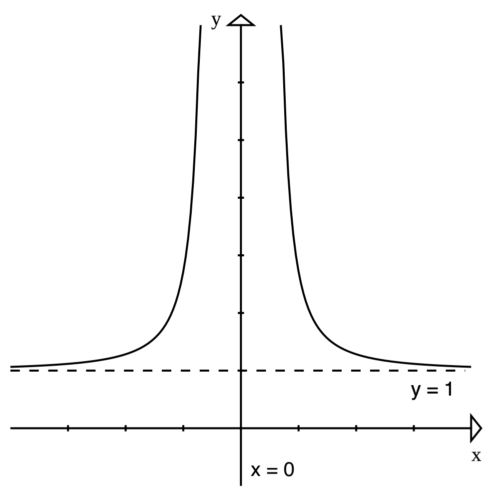
b) $f'(x) = (1 - x)e^x$; $f''(x) = - xe^x$



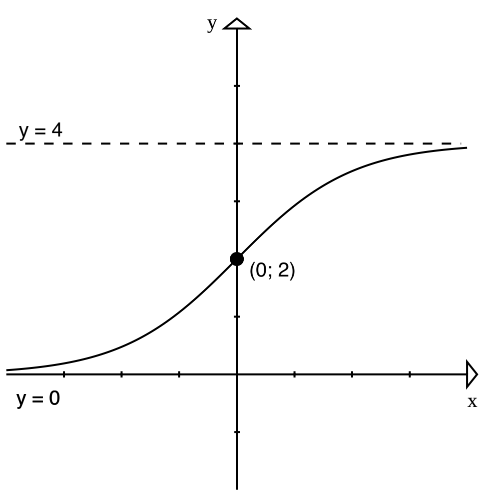
c)



d)



e)



Exercices de révision (fonctions exponentielle et logarithmique)

1. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{\ln^2 x}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - 2}{\ln^2 x}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x}$

f) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{-x}}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$

h) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{3e^x - 1}{1 - e^x}$

i) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{3^x}$

j) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x^2}{\ln 3x}$

2. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur l'ensemble des réels.

a) $f(x) = x^2 + \ln(1 - 2x)$

b) $g(x) = \dfrac{\ln x}{e^x - 2}$

3. Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ (a est une constante).

a) $y = \dfrac{5}{1 - 2e^{-3x}}$

b) $y = \ln(ax + 1)^2 + \ln^2(ax + 1)$

c) $y = \ln^5(1 - 3x)^2$

d) $y = \dfrac{2x + 1}{4e^{3x}}$

e) $y = (x + 3)^2 e^{-2x}$

f) $y = \ln\left[\dfrac{(x^2 + 1)(1 - 3x)}{x}\right]$

4. Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ si $y^3 \ln x - y^2 = 5$

5. Trouver les extremums relatifs de $f(x) = e^x(1 - x)^2$

6. On injecte des cellules cancéreuses à un rat. Ces cellules se développent et après t jours, on en dénombre $N(t) = 100\, e^{0,1t}$

a) Combien de cellules cancéreuses a-t-on injecté ?
b) Combien y aura-t-il de cellules cancéreuses dans 10 jours ?
c) Calculer le taux de croissance moyen des cellules cancéreuses durant les 10 premiers jours.
d) Calculer le taux de croissance des cellules cancéreuses la 10e journée.
e) Dans combien de jours prévoyez-vous la mort du rat si 40 000 cellules cancéreuses sont suffisantes pour le tuer ?

7. Selon une étude démographique, la population d'une région canadienne sera de

$$P(t) = 40\ 000\, t\left(1 - \ln\left(\frac{t}{7}\right)\right)$$

t années après 1995.

a) En quelle année la population sera t-elle maximale selon l'étude ?
b) Quelle sera alors la population ?

8. Pour fêter son 10^e anniversaire, un magasin d'appareils électriques met en vente un télé-couleur. Le gérant contacte une agence de publicité. Cette agence soutient qu'une campagne de publicité échelonnée sur t jours rapportera au magasin un profit de

$$P(t) = 1000\left(95 - t - 100e^{-0,2t}\right) \text{ dollars}$$

a) Combien de jours devrait durer la campagne de publicité pour que le magasin retire un profit maximal ?
b) Quel sera le profit maximal ?

9. Pour chacune des fonctions suivantes,

- trouver son domaine,
- étudier la continuité ,
- déterminer si f est paire, impaire ou ni paire et ni impaire,
- déterminer les asymptotes,
- trouver $f'(x)$ et les nombres critiques,
- trouver $f''(x)$ et les nombres de transition,
- construire le tableau de variation de f en indiquant clairement s'il y a lieu, les intervalles de croissance et de décroissance, les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas, les extremums relatifs et les points d'inflexion,
- tracer le graphique.

a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$$f'(x) = \frac{e^x(x - 1)}{x^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0\ (0^+)$$

Réponses aux exercices de révision

1. a) 0
   b) 1
   c) $-\infty$
   d) $\nexists$ (à gauche: $\nexists$ et à droite: 0)
   e) 0
   f) ∞
   g) 0
   h) -3
   i) 0
   j) 2

2. a) la fonction est continue sur $]-\infty\,,\ 1/2\,[$
   b) la fonction est continue sur $]\,0\,,\ \infty\,[\ \backslash\ \{\ln 2\}$

3. a) $\dfrac{-30e^{-3x}}{(1-2e^{-3x})^2}$
   b) $\dfrac{2a(1+\ln(ax+1))}{ax+1}$
   c) $-\dfrac{30\ln^4(1-3x)^2}{1-3x}$
   d) $-\dfrac{(6x+1)}{4e^{3x}}$
   e) $-2(x+2)(x+3)\,e^{-2x}$
   f) $\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{3}{1-3x}-\dfrac{1}{x}$

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-y^2}{x(3y\ln x-2)}$

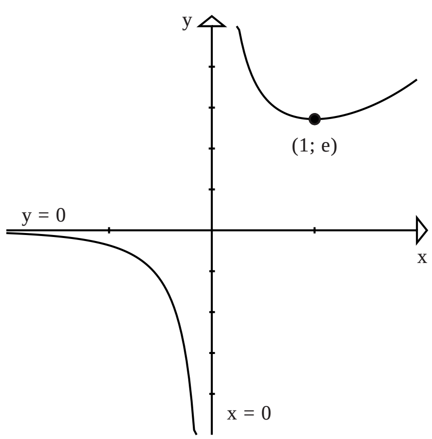
5. Maximum relatif au point: $(-1\,,\,4/e)$; minimum relatif au point: $(1\,,\,0)$

6. a) 100 cellules
   b) 272 cellules
   c) 17,2 cellules/jour
   d) 27,2 cellules/jour
   e) 60 jours

7. a) en 2002
   b) 280 000 habitants

8. a) 15 jours
   b) 75 021 $

9. a)



b)