Applications de la dérivée

4

4.1 Croissance, décroissance et extremums d'une fonction

Pierre Fermat
1601-1665

Mathématicien français, le plus grand du XVII^{e} siècle et l'un des plus grands de toute l'Histoire. Fermat fut un précurseur du calcul différentiel, de la géométrie analytique et du calcul des probabilités. C'est lui qui a introduit vers 1628 la notion de maximum et de minimum relatif d'une fonction. Il a démontré que les extremums relatifs d'une fonction $f(x)$ sont donnés par

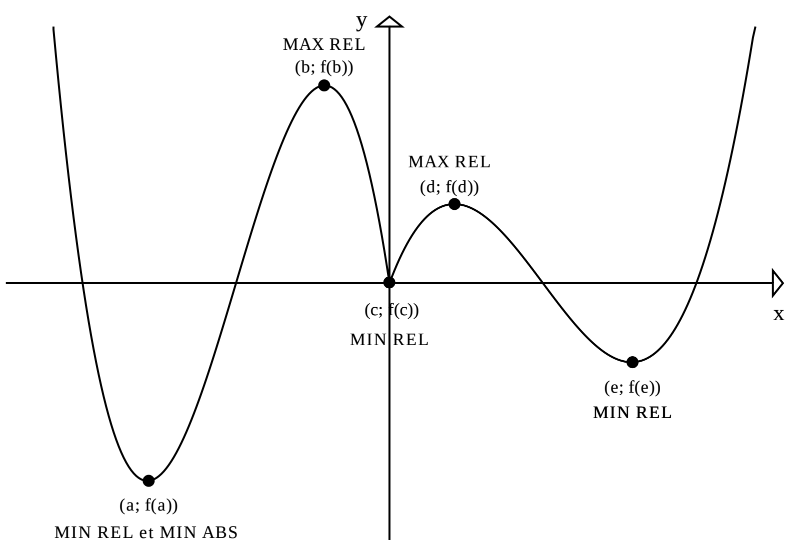
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

en faisant disparaître Δx. C'est en utilisant cette découverte qu'il a défini la droite tangente comme la limite de droites sécantes.

La dérivée d'une fonction nous renseigne sur certaines particularités de son graphique. Elle permet d'identifier entre autres,

- pour quelles valeurs de son domaine la courbe croît ou décroît,
- quelles sont les extremums relatifs ou absolus de la fonction.

Intuitivement lorsqu'on se déplace de gauche vers la droite sur l'axe des x et que le graphique d'une fonction monte, on dit que la fonction est *croissante;* lorsque le graphique descend, la fonction est dite *décroissante*. Le terme *extremums relatifs* se rapporte aux *maximums* et *minimums* d'une fonction sur une région particulière de son domaine tandis que le terme extremum absolu est relié au maximum et au minimum d'une fonction sur l'ensemble de son domaine. Pour bien saisir chacune de ces notions examinons d'abord le graphique ci-dessous.



La fonction associée à ce graphique est

- décroissante sur $]-\infty, a[\ \cup\ ]b, c[\ \cup\ ]d, e[$,
- croissante sur $]a, b[\ \cup\ ]c, d[\ \cup\ ]e, \infty[$.

Elle possède

$$5 \text{ extremums relatifs} \begin{cases} 2 \text{ maximums relatifs: } f(\text{b}) \text{ et } f(\text{d}) \\ 3 \text{ minimums relatifs: } f(\text{a}) \text{ , } f(\text{c}) \text{ et } f(\text{e}) \end{cases}$$

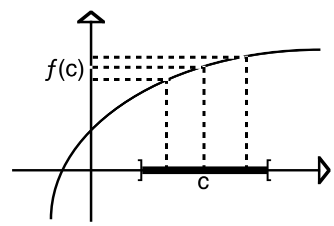
- parmi les minimums relatifs, $f(\text{a})$ est le minimum absolu,
- parmi les maximums relatifs, aucun n'est un maximum absolu; en fait la fonction ne possède pas de maximum absolu.

La dérivée va nous permettre de déterminer à quel endroit de son domaine, une fonction est croissante ou décroissante. Elle permet aussi de localiser tous les extremums relatifs et absolus d'une fonction.

définition 4.1.1
croissance

Une fonction f est croissante en $\text{x} = \text{c}$, s'il existe un voisinage V(c) avec c dans le domaine de la fonction tel que

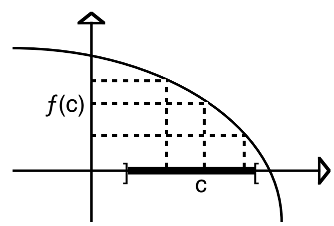
$$\forall \text{ x} \in \text{V(c)} \begin{cases} f(\text{x}) < f(\text{c}) \text{ pour } \text{x} < \text{c} \\ f(\text{x}) > f(\text{c}) \text{ pour } \text{x} > \text{c} \end{cases}$$



définition 4.1.2
décroissance

Une fonction f est décroissante en $\text{x} = \text{c}$, s'il existe un voisinage V(c) avec c dans le domaine de la fonction tel que

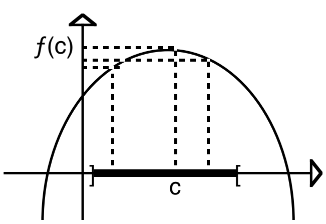
$$\forall \text{ x} \in \text{V(c)} \begin{cases} f(\text{x}) > f(\text{c}) \text{ pour } \text{x} < \text{c} \\ f(\text{x}) < f(\text{c}) \text{ pour } \text{x} > \text{c} \end{cases}$$



définition 4.1.3
maximum relatif

Une fonction f possède un maximum relatif $f(\text{c})$ en $\text{x} = \text{c}$, s'il existe un voisinage V(c) avec c dans le domaine de la fonction tel que

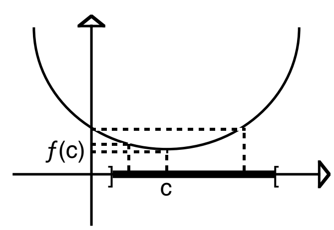
$\forall \text{ x} \neq \text{c}$ de V(c), on a $f(\text{x}) < f(\text{c})$



définition 4.1.4
minimum relatif

Une fonction f possède un minimum relatif $f(\text{c})$ en $\text{x} = \text{c}$, s'il existe un voisinage V(c) avec c dans le domaine de la fonction tel que

$\forall \text{ x} \neq \text{c}$ de V(c), on a $f(\text{x}) > f(\text{c})$



Les deux premières définitions vont nous permettre de démontrer le résultat qui suit.

proposition 4.1.1

> Soit f une fonction dérivable en $x = c$.
>
> a) Si $f'(c) > 0$ alors f est croissante en $x = c$,
>
> b) Si $f'(c) < 0$ alors f est décroissante en $x = c$.

a) Si $f'(c) > 0$

par définition

alors $$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

Il existe sûrement un voisinage troué de c pour lequel,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 .$$

car $\frac{-}{-} > 0$

car $\frac{+}{+} > 0$

Par conséquent $$\begin{cases} \text{si } x - c < 0 \text{ alors } f(x) - f(c) < 0 \\ \text{si } x - c > 0 \text{ alors } f(x) - f(c) > 0 \end{cases}$$

ou d'une façon équivalente $$\begin{cases} f(x) < f(c) \text{ lorsque } x < c \\ f(x) > f(c) \text{ lorsque } x > c \end{cases}$$

La fonction est donc croissante en $x = c$.

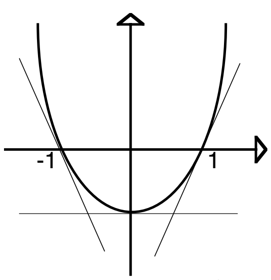
par la définition 4.1.1

b) La démonstration est semblable.

exemple 4.1.1

Déterminer si les fonctions suivantes sont croissantes ou décroissantes pour $x = -1$, $x = 1$ et $x = 0$.

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $g(x)= x^3$ c) $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$



$f(x) = x^2 - 1$

a) Si $f(x) = x^2 - 1$ alors $f'(x) = 2x$

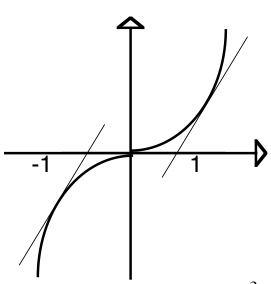
Par la proposition 4.1.1 on a

$f'(-1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ décroît lorsque $x = -1$,

$f'(1) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ croît lorsque $x = 1$,

$f'(0) = 0$ On ne peut rien conclure.

Si on examine le graphique de la fonction, on note que lorsque x=0 la fonction est ni croissante, ni décroissante. Elle passe par un minimum relatif.



$g(x)= x^3$

b) Si $g(x)= x^3$ alors $g'(x) = 3x^2$

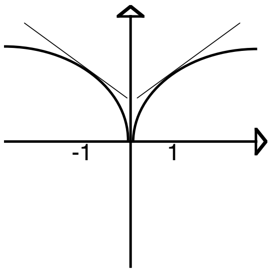
Par la proposition 4.1.1 on a

$g'(-1) = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad g$ croît en $x = -1$,

$g'(1) = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad g$ croît en $x = 1$,

$g'(0) = 0$ On ne peut rien conclure.

Si on examine le graphique de la fonction, on note que lorsque x=0 la fonction est croissante.



$h(x) = \sqrt[3]{x^2}$

c) Si $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$ alors $h'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$,

Par la proposition 4.1.1 on a

$h'(-1) = -\dfrac{2}{3} < 0 \quad \Rightarrow$ h décroît lorsque $x = -1$,

$h'(1) = \dfrac{2}{3} > 0 \quad \Rightarrow$ h croît lorsque $x = 1$,

$h'(0) \ \nexists$ On ne peut rien conclure.

Si on examine le graphique de la fonction, on note que la fonction est ni croissante, ni décroissante lorsque $x = 0$. Elle passe par un minimum relatif.

remarque

Si $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \ \nexists$ alors f peut être

- croissante en $x = c$,
- décroissante en $x = c$,
- ni croissante, ni décroissante en $x = c$.

définition 4.1.5

nombre critique

on utilise les lettres n.c. pour désigner un nombre critique

Soit f une fonction et c une valeur du domaine de cette fonction. Si

$$f'(c) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(c) \ \nexists$$

alors c est appelé *nombre critique* de la fonction f.

exemple 4.1.2

Trouver les nombres critiques de $f(x) = \sqrt[3]{x^4} + 4\sqrt[3]{x}$.

a) dom $f = \mathbf{R}$,

b) $f'(x) = \dfrac{4}{3}x^{1/3} + \dfrac{4}{3}x^{-2/3} = \dfrac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \\ \nexists & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) n.c.: $\{-1, 0\}$.

$x = -1$ et $x = 0$ sont deux valeurs du domaine de la fonction

exemple 4.1.3

Trouver les nombres critiques de $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}.$

a) dom $f = \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$,

b) $f'(x) = -\dfrac{(3x-2)}{x^3(x-1)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \dfrac{2}{3} \\ \nexists & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$

c) n.c.: $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

seul $x = \frac{2}{3}$ fait partie du domaine de la fonction

Étudier la croissance (ou la décroissance) d'une fonction d'une manière ponctuelle n'est pas très pratique spécialement lorsqu'on désire obtenir le comportement graphique de la fonction. Une étude globale serait plus appropriée.

proposition 4.1.2

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $I =]a, b[$. Si $\forall$ x dans l'intervalle I,

a) $f'(x) > 0$ alors f est croissante sur I,
b) $f'(x) < 0$ alors f est décroissante sur I.

exemple 4.1.4

Trouver les intervalles de croissance et de décroissance de

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \ .$$

---

a) dom $f = \mathbf{R}$,

si la dérivée change de signe lorsque $x = c$ alors $f'(c) = 0$ ou f' est discontinue en $x = c$ mais, pour tous les problèmes que nous allons considérer, les points de discontinuité seront les mêmes que les points où la dérivée n'existe pas

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Pour déterminer où sur le domaine de la fonction, la dérivée est positive et où, elle est négative, on construit le tableau des signes de f'. Pour cela on doit d'abord déterminer les endroits où la dérivée peut changer de signe. Il peut se produire un changement de signe seulement aux endroits où la dérivée passe par zéro ou n'existe pas. On doit d'abord trouver ces valeurs

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x - 3)(x - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 3 \text{ ou } x = 1 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases} \end{aligned}$$

n.c.: $\{1, 3\}$.

la première ligne du tableau des signes de la dérivée contient dans l'ordre croissant, les valeurs du domaine de la fonction pour lesquelles la dérivée s'annule ou n'existe pas ainsi que toutes les valeurs isolées ne faisant pas partie du domaine de cette fonction;
la deuxième ligne contient les signes de la dérivée;
la troisième ligne reproduit le comportement de la fonction à l'aide de la proposition 4.1.2

c) A l'aide des valeurs trouvées, on construit le tableau des signes de la dérivée.

x	$-\infty$		1		3		∞
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

d) La fonction est

- décroissante sur $]1, 3[$,
- croissante sur $]-\infty, 1[\ \cup \ ]3, \infty[$.

Cette étude de la croissance et décroissance d'une fonction nous amène à nous intéresser à la notion d'extremum relatif.

proposition 4.1.3

Si $f(\mathrm{c})$ est un extremum relatif de la fonction f alors c est un nombre critique.

démonstration

Si $f(\mathrm{c})$ est un extremum relatif de la fonction f alors pour $x = c$, la fonction

- n'est pas croissante $\Rightarrow$ $f'(c) \ngtr 0$ (prop. 4.1.1. a)
- n'est pas décroissante $\Rightarrow$ $f'(c) \nless 0$ (prop. 4.1.1. b)

par conséquent, $f'(c) = 0$ ou bien $f'(c)$ $\nexists$.

De plus, puisque $f(\mathrm{c})$ est un extremum relatif alors c est un nombre critique.

Nous savons maintenant que

- lorsque $f(\mathrm{c})$ est un extremum relatif, le point c est un nombre critique.

Mais attention la réciproque n'est pas vrai,

- si le point c est un nombre critique, $f(\mathrm{c})$ n'est pas nécessairement un extremum relatif.

Pour obtenir les extremums relatifs d'une fonction, il suffit de trouver les nombres critiques de la fonction puis de déterminer ensuite la nature de chaque nombre critique à l'aide d'un test appelé *test de la dérivée première*.

proposition 4.1.4
test de la dérivée première

Soit f une fonction, c un nombre critique et a, b deux nombres réels tels que

- $a < c < b$,
- f est continue sur $]a, b[$,
- c est le seul nombre critique sur $[a, b]$,

a) si $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$ alors $f(\mathrm{c})$ est un maximum relatif ,
b) si $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$ alors $f(\mathrm{c})$ est un minimum relatif ,
c) autrement $f(\mathrm{c})$ n'est pas un extremum relatif .

La proposition ne sera pas démontrée mais elle mérite quelques explications. Le test de la dérivée première ne peut être appliqué que si les trois conditions préalables sont respectées.

La première condition semble tout à fait acceptable. Mais pourquoi exiger que la fonction soit continue sur $]a, b[$ et que c soit le seul nombre critique sur $[a,b]$?

Pour répondre à la question examinons le graphique de la figure 4.1.1. Sur ce graphique, on remarque que $f(2)$ et $f(4)$ sont des extremums relatifs. 2 et 4 sont par conséquent des nombres critiques. Si on ne s'occupe pas de la discontinuité en $x = 0$ et que l'on utilise le test de la dérivée première pour le nombre critique 2, en prenant $a = -1$ et $b = 3$, on déduira que $f(2)$ n'est pas un extremum relatif.

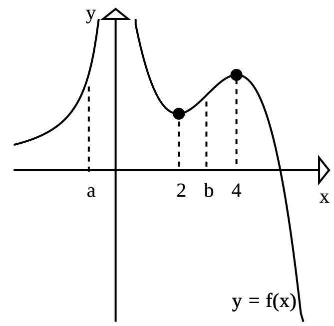


figure 4.1.1

En effet puisque $f'(-1) > 0$ et $f'(3) > 0$ (la fonction est croissante pour les deux valeurs), on conclut que pour $x = 2$ la fonction est croissante. Évidemment le résultat n'a aucun sens puisque $f(2)$ est un minimum relatif.

la proposition 4.1.4 est donc efficace pour étudier les extremums d'une fonction à la condition de <u>ne pas oublier de nombres critiques</u> et de porter une <u>attention particulière aux points de discontinuité</u> de la fonction

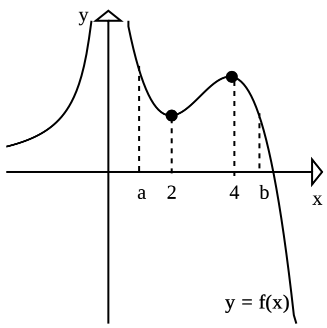


figure 4.1.2

De même, s'il existe plus d'un nombre critique entre les valeurs de a et de b, le test ne sera pas valable. Par exemple, toujours en considérant le nombre critique 2 si maintenant $a = 1$ et $b = 5$, on obtient $f'(1) < 0$ et $f'(5) < 0$ (la fonction est décroissante pour les deux valeurs). On conclut que lorsque $x = 2$ la fonction est décroissante. Ce résultat est encore faux puisqu'en $x = 2$ la fonction passe par un minimum.

exemple 4.1.5

Trouver les intervalles de croissance, de décroissance ainsi que les extremums relatifs de la fonction

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x} \ .$$

---

pour pouvoir appliquer sans risque le test de la dérivée première, tous les points de discontinuité doivent apparaître dans le tableau des signes de f ' une étude de continuité sera donc nécessaire

a) dom $f = \mathbf{R}$,

b) f est continue sur $\mathbf{R}$ (forme irrationnelle),

c) $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{(x(x-4))^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2 \\ \nexists & x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{cases}$ n.c.: $\{0, 2, 4\}$

d) Tableau des signes de la dérivée.

x	-∞		0		2		4		∞
f '(x)		-	∄	-	0	+	∄	+	
f(x)		↘		↘	MIN REL $\sqrt[3]{-4}$	↗		↗	

en x = 0 la fonction est décroissante et en x = 4 la fonction est croissante par définition

e) La fonction est

- décroissante sur $]-\infty, 2[$,
- min. rel. au point $(2, \sqrt[3]{-4})$,
- croissante sur $]2, \infty[$.

exemple 4.1.6

Trouver les intervalles de croissance, de décroissance ainsi que les extremums relatifs de la fonction

$$f(x) = x + \frac{1}{x} .$$

---

a) dom $f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

b) f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (forme rationnelle),

c) $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \text{ ou } x = 1 \\ \nexists & x = 0 \end{cases} \qquad \text{n.c.: } \{-1, 1\}$$

la valeur 0 ne fait pas partie du domaine de la fonction, elle doit néanmoins apparaître dans le tableau des signes de la dérivée en ayant soin de la rayer pour éviter toute erreur d'interprétation;

d) Tableau des signes de la dérivée.

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		+	0	-	$\nexists$	-	0	+	
$f(x)$		↗	MAX REl: (-1, -2)	↘	$\nexists$	↘	MIN REL: (1, 2)	↗	

en x = 0 la fonction est ni croissante, ni décroissante puisque cette valeur ne fait pas partie du domaine

e) La fonction est

- décroissante sur $]-1, 0[\ \cup \ ]0, 1[$, • min. rel.: (1, 2),
- croissante sur $]-\infty, -1[\ \cup \ ]1, \infty[$, • max. rel.: (-1, -2).

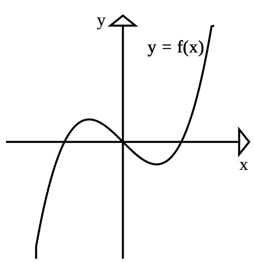


figure 4.1.3

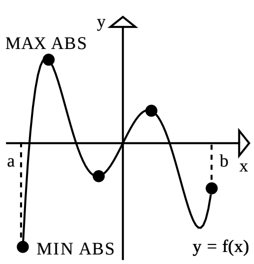


figure 4.1.4

Les extremums relatifs sont très utiles pour obtenir le comportement d'une fonction mais en général, notre intérêt portera plutôt sur les extremums absolus de la fonction c'est-à-dire la valeur la plus grande et la valeur la plus petite de la fonction sur l'ensemble de son domaine.

Retenons les éléments suivants.

- Une fonction ne possède pas toujours un maximum ou un minimum absolu. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner le graphique de la figure 4.1.3.

- Lorsqu'une fonction est continue sur un intervalle fermé, il existe toujours un maximum absolu et un minimum absolu sur l'intervalle. Ces valeurs se situent (figure 4.1.4) en
  - un intervalle relatif de la fonction ou,
  - un point qui marque le début ou la fin de la fonction (point extrême de la fonction).

exemple 4.1.7

Trouver, s'il y a lieu, le maximum absolu ainsi que le minimum absolu de la fonction

$$f(x) = 12x - x^3 \quad \text{sur} \quad [-3, 5] .$$

---

a) dom $f = [-3, 5]$,

b) f est continue sur $[-3, 5]$ (forme polynomiale),

c) $f\,'(x) = 12 - 3x^2$

$$= 3(2 - x)(2 + x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -2 \text{ ou } x = 2 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases}$$

n.c.: $\{-2, 2\}$.

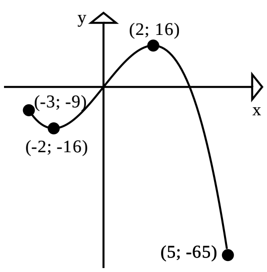


figure 4.1.5

d) Tableau des signes de la dérivée.

x	-3		-2		2		5
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-9	↘	MIN REL (-16)	↗	MAX REL (16)	↘	-65

e) La fonction possède un

- minimum absolu au point $(5, -65)$,
- maximum absolu au point $(2, 16)$.

exemple 4.1.8

Le patron d'un restaurant s'est rendu compte que s'il fixe le prix de son plat du jour à x dollars, son revenu hebdomadaire sera de

$$R(x) = 100x(7 - x) \quad \text{dollars}$$

a) À quel prix, le restaurateur doit-il fixer son plat du jour pour que son revenu soit maximal?
b) Quel sera son revenu maximal?

---

on limite le domaine à l'intervalle [0, 7] car lorsque x n'est pas dans [0, 7], le restaurateur subit des pertes

a) dom $f = [0, 7]$,

b) f est continue sur $[0, 7]$ (forme polynomiale),

c) $R\,'(x) = 700 - 200x$

$$= 100(7 - 2x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \frac{7}{2} \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases}$$

n.c.: $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

d) Tableau des signes de la dérivée.

x	0		3,5		7
R '(x)		+	0	-	
R(x)	0	↗	MAX ABS (1225 $)	↘	0

on cherche ici à trouver le maximum absolu de la fonction

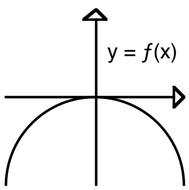
e) Lorsque le prix du plat du jour est fixé à 3,50 $ le revenu du restaurateur est maximal (1225 $) .

exemple 4.1.9

Associer à chacune des fonctions du haut sa dérivée parmi les fonctions du bas.

---

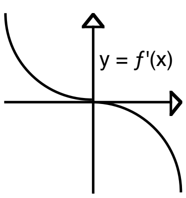
1)



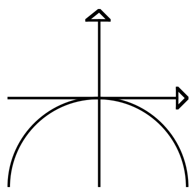
x		0	
f'(x)	+	0	-

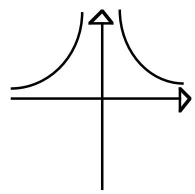
la seule fonction ayant une dérivée positive lorsque x < 0, négative lorsque x > 0 et nulle lorsque x = 0 est la fonction e)

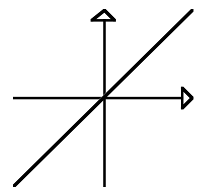
e)

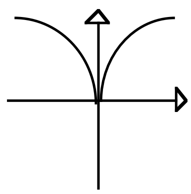


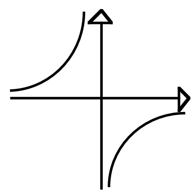
fonctions

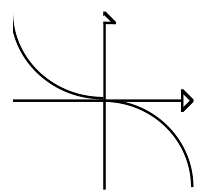
1) 

2) 

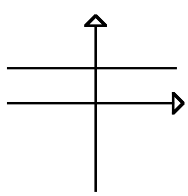
3) 

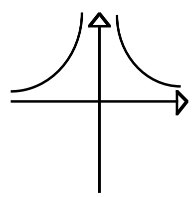
4) 

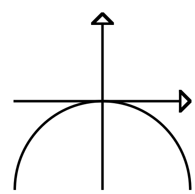
5) 

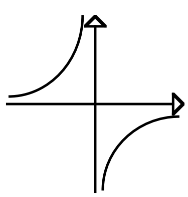
6) 

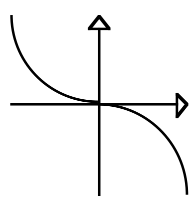
dérivées

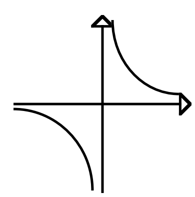
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

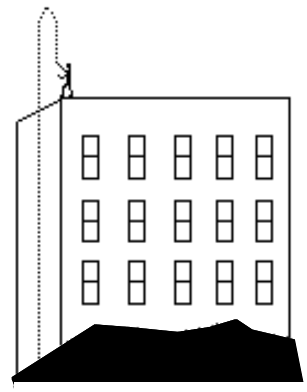
f) 

rép: (1, e) ; (2, d) ; (3, a) ; (4, f) ; (5, b) ; (6, c)

exemple 4.1.10

Du sommet d'un bâtiment, on lance une balle vers le haut. La position de la balle par rapport au sol (en mètres) à l'instant t (en secondes) est donnée par

$$s(t) = -4{,}9t^2 + 25t + 30.$$



a) Trouver la vitesse de la balle à la 1re et 3e seconde (interpréter les réponses obtenues).
b) Trouver l'accélération de la balle à la 1re et 3e seconde (interpréter les réponses obtenues).

---

a) La vitesse de la balle en tout temps t est donnée par

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -9{,}8t + 25.$$

À la 1re seconde la vitesse est: $v(1) = -9{,}8(1) + 25 = 15{,}2$ m/s,

À la 3e seconde la vitesse est: $v(3) = -9{,}8(3) + 25 = -4{,}4$ m/s.

lorsque s(t) et v(t) ont le même signe la balle s'éloigne du sol (elle monte) autrement la balle se rapproche du sol (elle redescend)

$v(1) = 15{,}2$ m/s > 0 et $s(1) > 0$ signifie que la balle se dirige vers le haut à ce moment ,

$v(3) = -4{,}4$ m/s < 0 et $s(3) > 0$ signifie que la balle redescend vers le sol à ce moment.

b) L'accélération de la balle est en tout temps t donnée par

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -9{,}8.$$

À la 1re seconde l'accélération est $a(1) = -9{,}8$ m/s^2,

À la 3e seconde l'accélération est $a(3) = -9{,}8$ m/s^2.

lorsque v(t) et a(t) ont le même signe, l'intensité de la vitesse de la balle augmente c'est-à-dire la vitesse en valeur absolue augmente (la balle accélère) autrement l'intensité de la vitesse de la balle diminue (la balle décélère)

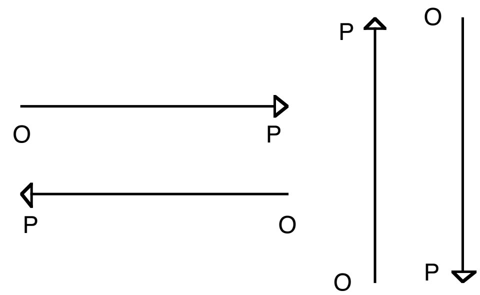
$a(1) = -9{,}8$ m/s$^2 < 0$ et $v(1) = 15{,}2$ m/s > 0 signifie que l'intensité de la vitesse de la balle décroît à la 1re seconde (la balle décélère)

$a(3) = -9{,}8$ m/s$^2 < 0$ et $v(3) = -4{,}4$ m/s < 0 signifie que l'intensité de la vitesse de la balle augmente à la 3e seconde (la balle accélère)

À la 1re seconde, la balle monte et l'intensité de sa vitesse diminue tandis qu'à la 3e seconde, la balle redescend et l'intensité de sa vitesse augmente.

L'accélération constante de -9,8 m/s est l'accélération gravitationnelle agissant sur tout objet.

mouvement rectiligne D'une façon générale, si un objet se déplace selon un mouvement rectiligne $\overrightarrow{OP}$,



et que la position de l'objet par rapport au point fixe O est en tout temps t donnée par l'équation

$$\boxed{y = s(t)}$$

a) La vitesse de l'objet est donnée par

$$\boxed{v(t) = \frac{ds}{dt}}$$

Au temps t,

- l'objet se rapproche du point O lorsque les signes de s(t) et de v(t) sont différents,
- l'objet s'éloigne du point O lorsque les signes de s(t) et de v(t) sont identiques,
- l'objet est au repos si v(t) = 0.

b) L'accélération de l'objet est donnée par

$$\boxed{a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}}$$

Au temps t,

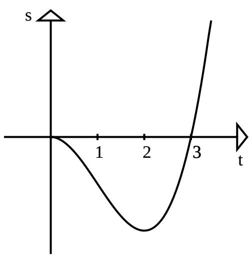
- l'objet décélère si les signes de v(t) et de a(t) sont différents,
- l'objet accélère si les signes de v(t) et de a(t) sont identiques,
- la vitesse de l'objet est constante si a(t) = 0.

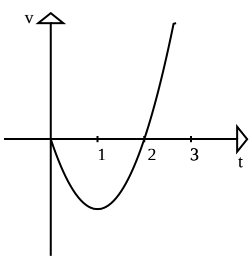
exemple 4.1.11

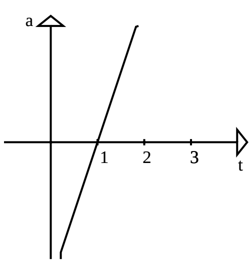
Un objet se déplace sur une droite. Sa position s (en mètres) par rapport à un point fixe O à un instant t (en secondes) égale

$$s(t) = t^3 - 3t^2 \quad 0 \leq t \leq 5$$

a) Analyser le mouvement lorsque $t = 1{,}5$ s.
b) Déterminer quand l'objet se rapproche du point O et quand il s'en éloigne.
c) Déterminer quand l'objet accélère et quand il décélère.







rép: a) $s = -3{,}375$ m ; $v = -2{,}25$ m/s ; $a = 3$ m/s^2 ; l'objet s'éloigne de O (s et v ont le même signe) et il décélère (v et a ont des signes contraires) ;
b) il se rapproche du point O sur $]2, 3[$, il s'éloigne du point O sur $]0, 2[\cup]3, 5[$;
c) il décélère sur sur $]1, 2[$, il accélère sur $]0, 1[\cup]2, 5[$.

Exercices 4.1

1. Trouver les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les extremums relatifs de chacune des fonctions associées aux équations suivantes.

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

b) $y = x^6 - 3x^2$

c) $y = 4x^3 - 3x^4$

d) $y = 4x^2 + \frac{1}{x} + 7$

e) $y = (1 - x)^2(1 + x)^3$

f) $y = \frac{x^2}{x - 2}$

2. Trouver (s'il y a lieu), les extremums absolus de chacune des fonctions associées aux équations suivantes sur les intervalles mentionnés.

a) $y = x^4$ sur $[-2, 1]$

b) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ sur $[-1, 2]$

c) $y = (2 + x - x^2)^3$ sur $[-2, 2]$

d) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 64)^2}$ sur $[-10, 10]$

3. Une compagnie de pneus a déterminé qu'une production de x pneus $(0 \leq x \leq 50\,000)$ devrait rapporter un profit de

$$P(x) = \frac{x(50\,000 - x)}{20\,000} \text{ dollars}$$

Sur quelle étendue de la production, les profits de la compagnie augmentent-ils?

4. Si une société vend x articles par jour $(0 \leq x \leq 400)$ alors son revenu $R(x)$ sera de

$$R(x) = x\left(10 - \frac{x}{50}\right) \text{ dollars}$$

Déterminer pour quelles valeurs de x, le revenu de la société croît et pour quelles valeurs de x, il décroît.

5. Un fabricant produit des disques et il estime que s'il les vend x dollars chacun $(5 \leq x \leq 14)$, son profit quotidien sera $P(x) = 10(x - 5)(14 - x)$ dollars.

a) À quel prix le fabricant doit-il vendre ses disques pour maximiser son profit?
b) Quel sera alors son profit?

6. L'expression $N(t) = 8{,}1t^2 - 0{,}9t^3$ représente la note d'examen d'un élève en fonction du temps d'étude t exprimé en heures ($0 \le t \le 9$). Trouver le temps d'étude qui maximise sa note.

7. La fonction $L(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x$ représente la production laitière en litres d'une vache. Dans cette équation, x est le niveau hormonal en cm^3 injecté par jour à cette vache ($0 \le x \le 10$).

   a) Déterminer le niveau hormonal qui maximise la production laitière.
   b) Trouver cette production maximale.

8. La concentration $C(t)$ (en mg) d'un médicament dans le système sanguin d'un patient t heures après une injection est donnée par

$$C(t) = \frac{16t}{(10t + 20)^2}$$

   a) Déterminer le nombre d'heures après l'injection où la concentration est maximale.
   b) Trouver cette concentration maximale.

9. Un fabricant de bicyclettes doit acheter 6000 pneus par année et il doit fixer la taille de chacune des commandes. Il fait appel à un spécialiste en recherche opérationnelle. Considérant que le fabricant vendra ses pneus à un rythme constant et tenant compte des frais d'envoi par commande et des coûts d'entreposage, celui-ci estime que le coût total du fabricant pour une commande de x pneus ($1 \le x \le 6000$) sera de

$$C(x) = 0{,}48x + \frac{120\,000}{x} + 1500 \text{ dollars}$$

   Trouver la taille de chacune des commandes qui minimisera le coût du fabricant.

10. Depuis plusieurs semaines, on enregistre la vitesse de la circulation sur une bretelle d'une voie rapide menant au centre ville. Les données recueillies indiquent qu'entre 13:00 et 19:00 les jours de la semaine, la vitesse de la circulation en fonction du nombre d'heures t qui se sont écoulées depuis midi est de

$$v(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 40 \text{ km/h}$$

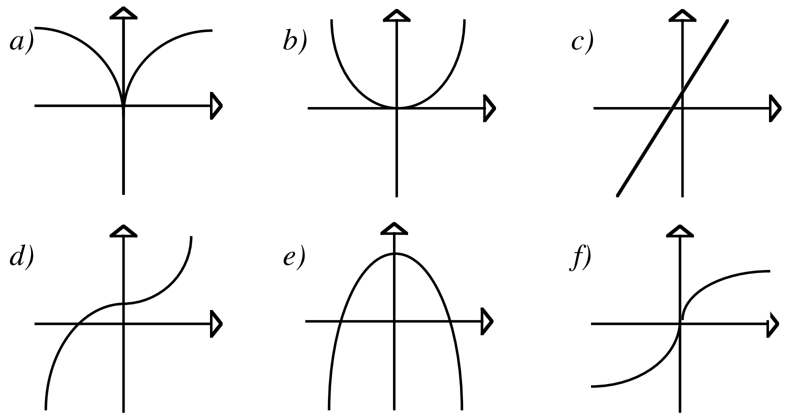
   À quel moment entre 13:00 et 19:00 (inclusivement), la vitesse de la circulation est-elle

   a) minimale? b) maximale?

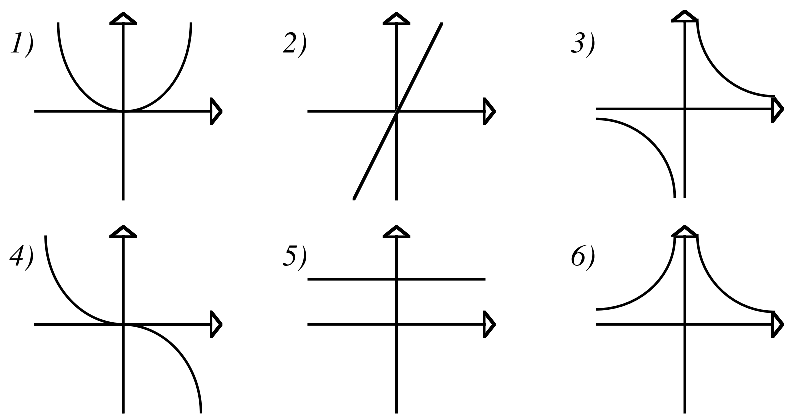
11. Trouver a et b pour que $y = x^3 - ax^2 + b$ ait un extremum relatif au point $(2, 3)$.

12. Associer à chacune des fonctions du haut sa dérivée parmi les fonctions du bas.

fonctions



dérivées



13. Du haut d'un pont, on lance verticalement une pierre vers le haut. La position de la pierre en mètres au-dessus de l'eau, en tout temps t en secondes est donnée par

$$s(t) = 60 + 20t - 5t^2$$

Calculer

a) la hauteur du pont duquel est projetée la pierre,
b) la vitesse initiale de la pierre,
c) la vitesse de la pierre après 4 secondes,
d) l'accélération de la pierre après 5 secondes,
e) le temps que prend la pierre pour toucher la rivière,
f) la vitesse de la pierre lorsque celle-ci touche la rivière,
g) le temps que prend la pierre pour atteindre sa hauteur maximale,
h) la hauteur maximale qu'atteindra la pierre.

14. La position en mètres à l'instant t en secondes d'une particule est $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 6$. Dans quel(s) intervalle(s) accélère-t-elle?

(la particule accélère lorsque la vitesse et l'accélération sont de même signe)

15. Un objet se déplace sur une droite. Sa position s (en mètres) par rapport à un point fixe O à un instant t (en secondes) égale

$$s(t) = t^3 - 4t^2 + 4t \quad 0 \leq t \leq 3$$

a) Déterminer la position, la vitesse et l'accélération de l'objet lorsque $t = 1$ s. (interpréter les valeurs obtenues).
b) Déterminer quand l'objet se rapproche du point O et quand il s'en éloigne.
c) Déterminer quand l'objet accélère et quand il décélère.

16. La position d'un objet est en tout temps donnée par $s(t) = 4\sqrt{9 + t}$. Déterminer si la vitesse augmente ou diminue avec le temps.

17. Un motoneigiste dévale un étroit sentier forestier, arrive au sommet d'une colline et voit une motoneige arrêtée à 15 m devant lui. Il freine immédiatement. La position de la motoneige est en tout temps t (en secondes) de $s(t) = 12t - t^3$ mètres à partir du moment où il freine. Y aura-t-il collision?

18. Au cours d'un voyage, une voiture roulant sur une autoroute a parcouru

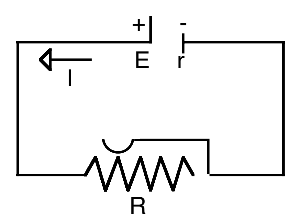
$$s(t) = 15 + 45t + 10t^2 - \frac{2}{3}t^3 \text{ km}$$

après t heures ($1 \leq t \leq 8$). Entre $t = 1$ h et $t = 8$ h, à quel moment la voiture roule-t-elle

a) le plus vite? b) le moins vite?

19. Un générateur de force électromotrice E et de résis-tance interne r agit sur une résistance extérieure R. Trouver la valeur de R pour que la puissance dégagée dans R soit maximale si E et r sont constants. La puissance dans un tel circuit est donnée par la loi de Joule.

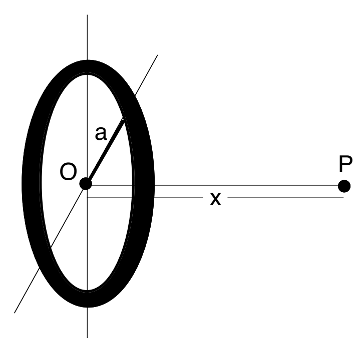
$$P = R\left(\frac{E}{R + r}\right)^2$$



20. Un anneau uniformément chargé engendre un champ électrique qui l'entoure. L'intensité E du champ électrique au point P est

$$E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$$

où q représente la charge positive totale de l'anneau (en Coulombs), a représente le rayon moyen de l'anneau (en mètres) et ε_0 est une constante positive. Quelle valeur de x maximise E pour des quantités q et a fixées (c'est-à-dire q et a constants) ?



Réponses aux exercices 4.1

1. a) décroît sur $]-2, 1[$ — max. rel. au point: $(-2, 13)$
   croît sur $]-\infty, -2[\cup]1, \infty[$ — min. rel. au point: $(1, -14)$

   b) décroît $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ — max. rel. au point: $(0, 0)$
   croît sur $]-1, 0[\cup]1, \infty[$ — min. rel. au point: $(-1, -2)$, $(1, -2)$

   c) décroît sur $]1, \infty[$ — max. rel. au point: $(1, 1)$
   croît sur $]-\infty, 1[$ — min. rel. au point: aucun

   d) décroît sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1/2[$ — max. rel. au point: aucun
   croît sur $]1/2, \infty[$ — min. rel. au point: $(1/2, 10)$

   e) décroît sur $]1/5, 1[$ — max. rel. au point: $(1/5, 3456/3125)$
   croît sur $]-\infty, 1/5[\cup]1, \infty[$ — min. rel. au point: $(1, 0)$

   f) décroît sur $]0, 2[\cup]2, 4[$ — max. rel. au point: $(0, 0)$
   croît sur $]-\infty, 0[\cup]4, \infty[$ — min. rel. au point: $(4, 8)$

2. a) max. abs. au point: $(-2, 16)$
   min. abs. au point: $(0, 0)$

   c) max. abs. au point: $(1/2, 729/64)$
   min. abs. au point: $(-2, -64)$

   b) max. abs. au point: $(0, 1)$
   min. abs. au point: $(2, -3/5)$

   d) max. abs. au point: $(0, 16)$
   min. abs. au point: $(-8, 0)$, $(8, 0)$

3. Pour $0 < x < 25\,000$

4. Le revenu croît pour une production entre 0 et 250 articles ; il décroît pour une production entre 250 et 400 articles.

5. a) 9,50 \$ b) 202,50 \$

6. 6 h

7. a) 8 cm^3 b) 4 litres

8. a) 2 h b) 0,02 mg

9. Le fabricant doit commander les pneus par lots de 500.

10. a) à 17:00 (65 km/h) b) à 19:00 (117 km/h)

11. $a = 3$ et $b = 7$

12. (a, 3) , (b, 2) , (c, 5) , (d, 1) , (e, 4) , (f, 6)

13. a) 60 m,
    b) 20 m/s
    c) -20
    d) -10 m/s^2
    e) 6 s
    f) -40 m/s
    g) 2 s
    h) 80 m

14. $]2, 7/2[\cup]5, \infty[$

15. a) $s(1) = 1$ m ; $v(1) = -1$ m/s ; $a(1) = -2$ m/s^2,
    à ce moment, l'objet se rapproche de O (s(t) et v(t) sont de signes contraires);
    il accélère (v(t) et a(t) sont de même signe).
    b) L'objet s'éloigne du point O sur l'intervalle de temps $]0, 2/3[\cup]2, 3[$
    il se rapproche du point O sur l'intervalle de temps $]2/3, 2[$.
    c) L'objet accélère sur l'intervalle de temps $]2/3, 4/3[\cup]2, 3[$; il décélère sur l'intervalle de temps $]0, 2/3[\cup]4/3, 2[$.

16. diminue

17. oui (l'arrêt complet se fera après 2 s; à ce moment la distance parcourue sera de 16 m).

18. a) à $t = 5$ h (95 km/h) b) à $t = 1$ h (63 km/h)

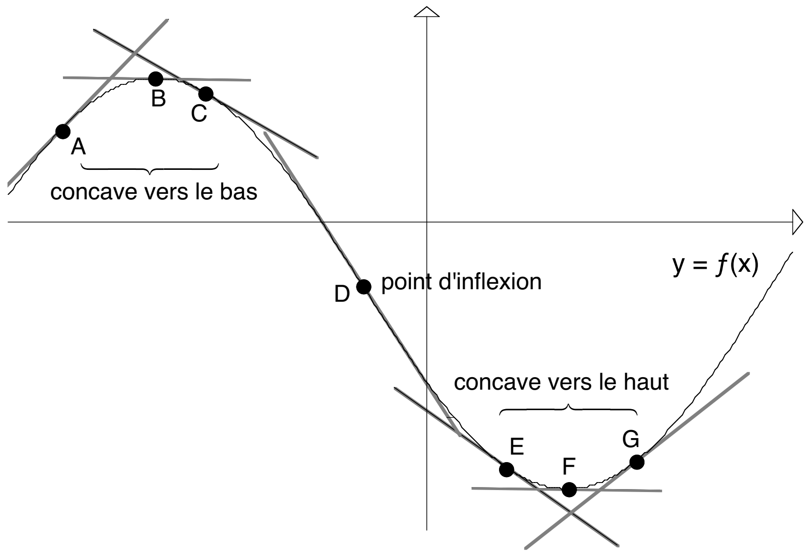
19. La puissance est maximale lorsque la résistance externe R est égale à la résistance interne r.

20. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

4.2 Concavité et points d'inflexion

Dans une région donnée, le graphique d'une fonction peut être *concave vers le haut (*concave) ou *concave vers le bas* (convexe) dépendant du comportement des droites tangentes au graphique.

Imaginons qu'on se déplace du point A au point G sur le graphique ci-dessous.



- De A à C, le graphique de la fonction est sous les droites tangentes. La courbe est *concave vers le bas* (convexe) sur cette région du domaine.

  On remarque que les pentes des droites tangentes vont en diminuant lorsque la courbe est concave vers le bas.

- De E à G, le graphique de la fonction est au-dessus des droites tangentes. La courbe est *concave vers le haut* (concave) sur cette région du domaine.

  On remarque que les pentes des droites tangentes vont en augmentant lorsque la courbe est concave vers le haut.

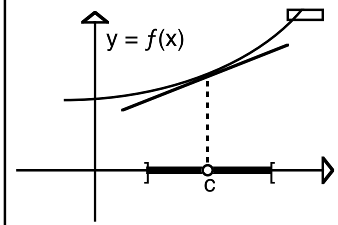
- Au point D, la concavité change de sens. Le point D est un *point d'inflexion*.

Nous verrons dans cette section, qu'il existe une relation entre la concavité du graphique d'une fonction et la dérivée seconde de cette fonction.

définition 4.2.1
concavité vers le haut

Le graphique d'une fonction f est concave vers le haut en $x = c$ si:

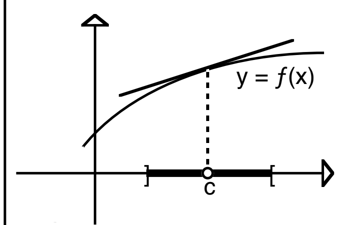
- $f'(c)$ existe,
- il existe un voisinage troué $V_o(c)$ de $x=c$ dans le domaine de la fonction tel que pour tout $x \in V_o(c)$ le graphique de la fonction f est <u>au-dessus</u> de la droite tangente en $x = c$.



définition 4.2.2
concavité vers le bas

Le graphique d'une fonction f est concave vers le bas en $x = c$ si:

- $f'(c)$ existe,
- il existe un voisinage troué $V_o(c)$ de $x=c$ dans le domaine de la fonction tel que pour tout $x \in V_o(c)$ le graphique de la fonction f est <u>au-dessous</u> de la droite tangente en $x = c$.



proposition 4.2.1

Soit f une fonction dérivable dans un voisinage $V(c)$ de c.

a) Si $f''(c) > 0$ alors le graphique de f est concave vers le haut au point $(c, f(c))$,

b) Si $f''(c) < 0$ alors le graphique de f est concave vers le bas au point $(c, f(c))$.

Contentons-nous ici d'une simple justification du résultat précédent.

Si la fonction f est dérivable dans le voisinage $V(c)$ de c alors pour toute valeur de l'intervalle, il existe une droite tangente au graphique de la fonction f ayant pour pente $f'(x)$. Si de plus,

par la prop. 4.1.1 a)

a) $f''(c) > 0$ alors f' est une fonction croissante en c.

$\Rightarrow$ autour de c les valeurs des pentes des droites tangentes sur le graphique de la fonction f vont en augmentant,

$\Rightarrow$ le graphique de la fonction f est concave vers le haut dans le voisinage de c, par conséquent, il le sera au point $(c, f(c))$ (voir page précédente).

par la prop. 4.1.1 b)

b) $f''(c) < 0$ alors f' est une fonction décroissante en c.

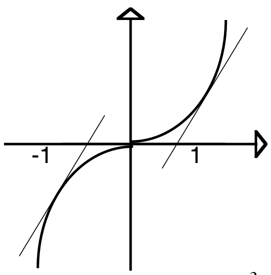
$\Rightarrow$ autour de c les valeurs des pentes des droites tangentes sur le graphique de la fonction f vont en diminuant,

$\Rightarrow$ le graphique de la fonction f est concave vers le bas dans le voisinage de c, par conséquent, il le sera au point $(c, f(c))$ (voir page précédente).

exemple 4.2.1

Déterminer si les graphiques des fonctions suivantes sont concaves vers le haut ou vers le bas pour les valeurs $x = -1$, $x = 1$ et $x = 0$.

a) $f(x) = x^3$ b) $g(x)= x^4$ c) $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$

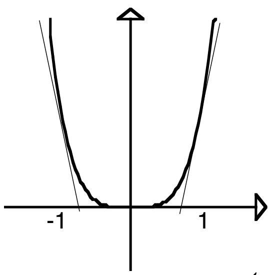


$f(x)= x^3$

a) Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
Par la proposition 4.2.1 on a,

$f''(-1) = -6 < 0 \;\Rightarrow$ concave vers le bas au point $(-1, -1)$
$f''(1) = 6 > 0 \;\Rightarrow$ concave vers le haut au point $(1, 1)$
$f''(0) = 0$ on ne peut rien conclure.

Si on examine le graphique de la fonction, on note que lorsque $x=0$ la fonction est ni concave vers le haut, ni concave vers le bas. Elle passe par un point d'inflexion.

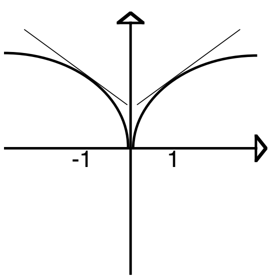


$g(x)= x^4$

b) Si $g(x) = x^4$ alors $g'(x) = 4x^3$ et $g''(x) = 12x^2$.
Par la proposition 4.2.1 on a,

$g''(-1) = 12 > 0 \;\Rightarrow$ concave vers le haut au point $(-1, 1)$
$g''(1) = 12 > 0 \;\Rightarrow$ concave vers le haut au point $(1, 1)$
$g''(0) = 0$ on ne peut rien conclure.

Si on examine le graphique de la fonction, on note que pour $x = 0$ la fonction est concave vers le haut.



$h(x) = \sqrt[3]{x^2}$

c) Si $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$ alors $h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ et $h''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$.
Par la proposition 4.2.1 on a,

$h''(-1) = -2/9 < 0 \;\Rightarrow$ concave vers le bas au point $(-1, 1)$
$h''(1) = -2/9 < 0 \;\Rightarrow$ concave vers le bas au point $(1, 1)$
$h''(0) \;\nexists$ on ne peut rien conclure.

Si on examine le graphique de la fonction, on note que pour $x=0$ le graphique est ni concave vers le haut, ni concave vers le bas puisque $h'(0)$ n'existe pas.

remarque Si $f''(c) = 0$ ou $f''(c) \;\nexists$ alors le graphique de la fonction peut être

- concave vers le haut au point $(c, f(c))$,
- concave vers le bas au point $(c, f(c))$,
- ni concave vers le haut, ni concave vers le bas au point $(c, f(c))$.

définition 4.2.3
nombre de transition
on utilise les lettres n.t. pour désigner un nombre de transition

Soit f une fonction et c <u>une valeur du domaine de cette fonction</u>.
Si

$$f''(c) = 0 \quad \text{ou} \quad f''(c) \;\nexists$$

alors c est appelé *nombre de transition* de la fonction f.

exemple 4.2.2

Trouver les nombres de transition de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$
$f''(x) = 36x^2 - 24x$

$x = 0$ et $x = 2/3$ sont deux valeurs du domaine de la fonction

a) dom $f = \mathbf{R}$,

b) $f'(x) \qquad = 12x^3 - 12x^2,$

$$f''(x) \qquad = 12x(3x-2) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3} \\ \nexists \text{ aucune valeur} \end{cases}$$

c) n.t.: $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$.

exemple 4.2.3

Trouver les nombres de transition de $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$.

rép: n.t.: {-1, 0}

proposition 4.2.2

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $I =]a, b[$. Si $\forall$ x dans l'intervalle I,

a) $f''(x) > 0$ alors le graphique de la fonction f est concave vers le haut pour toute valeur de l'intervalle I,

b) $f''(x) < 0$ alors le graphique de la fonction f est concave vers le bas pour toute valeur de l'intervalle I.

exemple 4.2.4

Trouver les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas du graphique de

$$f(x) = x^4 - 24x^2 + x\ .$$

---

a) dom $f = \mathbf{R}$,

b) $f'(x) \qquad = 4x^3 - 48x + 1$

$$f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x-2)(x+2) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = \pm 2 \\ \nexists \text{ aucune valeur} \end{cases}$$

n.t.: {-2, 2}

la première ligne du tableau des signes de la dérivée seconde contient dans l'ordre croissant les valeurs du domaine de la fonction pour lesquelles la dérivée seconde s'annule ou n'existe pas ainsi que toutes les valeurs isolées ne faisant pas partie du domaine de la fonction;
la deuxième ligne contient les signes de la dérivée seconde;
la troisième ligne indique à l'aide de la proposition 4.2.2, le type de concavité

c) Pour obtenir les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas, on construit le tableau des signes de $f''(x)$.

x	$-\infty$		-2		2		∞
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							

d) Le graphique de la fonction est

- concave vers le haut sur $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$,
- concave vers le bas sur $]-2, 2[$.

exemple 4.2.5

Trouver les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas du graphique de

$$f(x) = x^2 - 9\sqrt[3]{x^5}.$$

rép: concave vers le haut sur $]-\infty, 0[\cup]125, \infty[$; concave vers le bas sur $]0, 125[$

définition 4.2.4

point d'inflexion

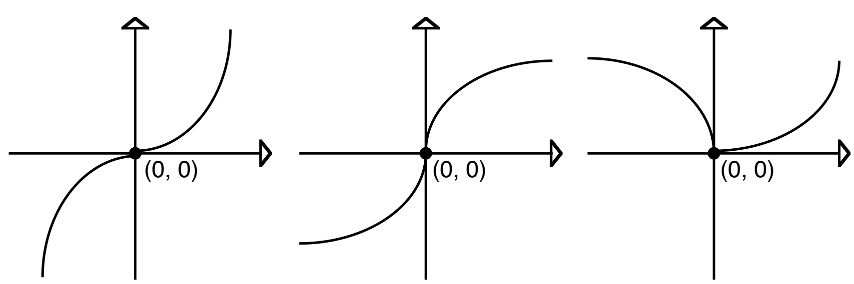
on utilise les lettres PI pour désigner un point d'inflexion

Le point $(c, f(c))$ est un point d'inflexion du graphique de la fonction f si

a) la fonction f est continue en $x = c$,
b) il y a changement de concavité de part et d'autre de $x = c$.
($f''(x)$ change de signe de part et d'autre de $x = c$)

exemple 4.2.6

Le point (0, 0) est un point d'inflexion dans chacun des cas suivants.



proposition 4.2.3

> Si $(c, f(c))$ est un point d'inflexion de la fonction f alors c est un nombre de transition.

démonstration

Si $(c, f(c))$ est un point d'inflexion de la fonction f alors au point $(c, f(c))$, le graphique de la fonction

- n'est pas concave vers le haut $\Rightarrow$ $f''(c) \not> 0$ (prop. 4.2.1. a),
- n'est pas concave vers le bas $\Rightarrow$ $f''(c) \not< 0$ (prop. 4.2.1. b).

Donc ou bien $f''(c) = 0$ ou bien $f''(c) \nexists$.

Par conséquent c est un nombre de transition.

- À chaque fois que le graphique d'une fonction passe par un point d'inflexion, ce point correspond à un nombre de transition.

La réciproque n'est pas vrai.

- Lorsque le graphique d'une fonction passe par un nombre de transition, cette valeur ne correspond pas nécessairement à un point d'inflexion.

exemple 4.2.7

Trouver les points d'inflexion de la fonction

$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + x - 3.$$

---

a) dom f = **R**,

b) f est continue sur **R** (forme polynomiale),

c) $f'(x) = 15x^4 - 30x^2 + 1$

$$f''(x) = 60x^3 - 60x$$

$$= 60x(x - 1)(x + 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \pm 1 \text{ ou } x = 0 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases}$$

n.t.: {-1, 0, 1}

-1, 0 et 1 sont dans le domaine de la fonction, ce sont donc des nombres de transition

un nombre de transition correspond à un point d'inflexion si pour cette valeur la fonction est continue et si f'' change de signe de part et d'autre de cette valeur

c) Tableau des signes de $f''(x)$.

x	-∞		-1		0		1		∞
f''(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)		$\frown$	PI(3)	$\smile$	PI(-3)	$\frown$	PI(-9)	$\smile$	

d) La fonction possède trois points d'inflexion:

$$(-1, 3) \;;\; (0, -3) \;;\; (1, -9)$$

Il existe une autre façon d'identifier les extremums relatifs d'une fonction. Plutôt que d'utiliser la dérivée première (le test de la dérivée première), on peut utiliser la dérivée seconde.

proposition 4.2.4
test de la dérivée seconde

Soit f une fonction et c un nombre critique de cette fonction. Si f'' existe et est continue en c et

a) si $f''(c) > 0$ alors le point $(c, f(c))$ est un minimum relatif de f,
b) si $f''(c) < 0$ alors le point $(c, f(c))$ est un maximum relatif de f.

démonstration

On admettra facilement ce résultat car si pour une valeur critique c, on a

a) $f''(c) > 0 \Rightarrow$ le graphique de la fonction f est concave vers le haut au point $(c, f(c))$ (prop. 4.2.1. a),
$\Rightarrow$ le point $(c, f(c))$ est un minimum relatif.

b) $f''(c) < 0 \Rightarrow$ le graphique de la fonction f est concave vers le bas au point $(c, f(c))$ (prop. 4.2.1. b),
$\Rightarrow$ le point $(c, f(c))$ est un maximum relatif.

exemple 4.2.8

À l'aide du test de la dérivée seconde, trouver les extremums relatifs de la fonction

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7.$$

---

a) dom $f = \mathbf{R}$,

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$$= 6(x - 1)(x + 2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -2 \text{ ou } x = 1 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases}$$

n.c.: $\{-2, 1\}$

$f''(x) = 12x + 6$ et f'' est continue pour $x = -2$ et $x = 1$.

Par conséquent par le test de la dérivée seconde on a

$f''(-2) = -18 < 0 \Rightarrow (-2, 13)$ est un maximum relatif,
$f''(1) = 18 > 0 \Rightarrow (1, -14)$ est un minimum relatif.

exemple 4.2.9

À l'aide du test de la dérivée seconde, trouver les extremums relatifs de la fonction

$$f(x) = 2x + \frac{18}{x} + 1 .$$

rép: MIN REL au point $(3, 13)$ et MAX REL au point $(-3, -11)$

Nous compléterons cette section en faisant intervenir dans un même problème toutes les notions vues depuis le début du chapitre.

exemple 4.2.10

Tracer le graphique de la fonction

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1.$$

---

a) dom $f = \mathbf{R}$,

b) f est continue sur $\mathbf{R}$ (forme polynomiale),

c) $$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \text{ ou } x = 0 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases}$$

n.c.: {-1, 0}

$$f''(x) = 36x^2 + 24x = 12x(3x+2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = 0 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases}$$

n.t.: {-2/3, 0}

les tableaux des signes de f'(x) et de f''(x) seront étudiés simultanément à partir de ce qu'on appellera le tableau de variation de la fonction

d) Tableau de variation de la fonction.

x	$-\infty$		-1		$-2/3$		0		∞
$f'(x)$		-	0	+	+	+	0	+	
$f''(x)$		+	+	+	0	-	0	+	
$f(x)$			MIN REL 0		PI 11/27		PI 1		

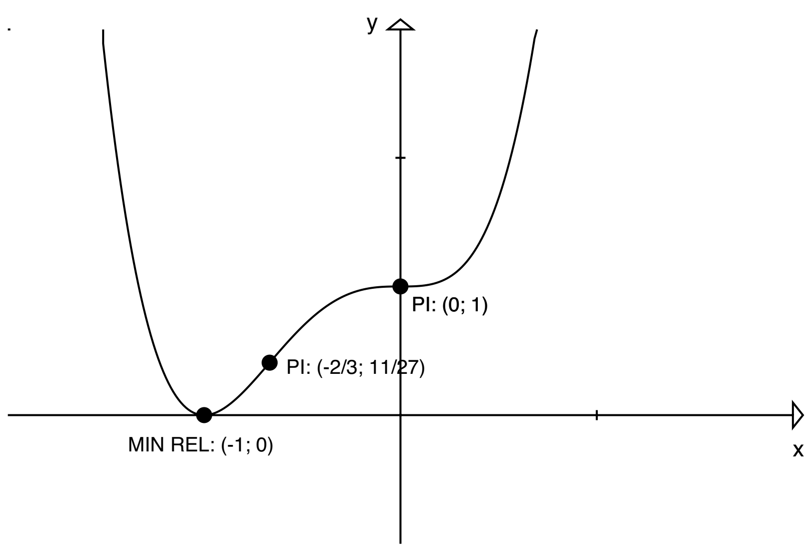
e) Graphique de la fonction.

on place d'abord dans un plan cartésien les points:

(-1,0), (-2/3,11/27), (0,1)

puis, à l'aide du tableau de variation, on trace le graphique de la fonction

au besoin, on peut toujours se donner des points supplémentaires



Exercices 4.2

1. Trouver les intervalles de concavité vers le haut et de concavité vers le bas ainsi que les points d'inflexion de chacune des fonctions associées aux équations suivantes.

a) $y = x^3 + 3x^2 - 3x - 3$

b) $y = x^4 - 6x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$

d) $y = x - 2 + 9\sqrt[3]{x}$

e) $y = \dfrac{(t+1)^2}{t^2}$

f) $y = (r^2 - 5)^3$

2. Pour chacune des fonctions,

- trouver le domaine,
- étudier la continuité,
- trouver $f'(x)$ et les nombres critiques de la fonction,
- trouver $f''(x)$ et les nombres de transition de la fonction,
- construire le tableau de variation de la fonction en indiquant clairement les intervalles de croissance et de décroissance, les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas, les extremums relatifs et les points d'inflexion,
- tracer le graphique.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

d) $f(x) = x(x - 1)^3$

e) $f(x) = (1 - x^2)(x^2 - 5)$

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + 5\sqrt[3]{x^2}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$

$f'(x) = \dfrac{4 - x}{\sqrt[3]{x(6 - x)^2}}$

$f''(x) = \dfrac{-8}{\sqrt[3]{x^4(6 - x)^5}}$

h) $f(x) = x\sqrt{x + 3}$

$f'(x) = \dfrac{3(x + 2)}{2\sqrt{x + 3}}$

$f''(x) = \dfrac{3(x + 4)}{4(x + 3)\sqrt{x + 3}}$

3. Trouver les extremums relatifs de chacune des fonctions en utilisant <u>le test de la dérivée seconde</u>. Si le test de la dérivée seconde ne peut être appliqué alors utiliser le test de la dérivée première. (a, b, c et k sont des constantes)

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 27$

b) $y = (t + 2)^3$

c) $y = x + \dfrac{1}{x}$

d) $y = 9\sqrt[3]{x^2} - 3x$

e) $y = ax^2 + bx + c \quad (a < 0)$

f) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{k^3}{x}$

4. La puissance d'une pile est donnée par $P = EI - RI^2$ où E et R sont des constantes positives et I correspond à l'intensité du courant.

   a) Pour quelle valeur de I, la puissance P est-elle maximale?
   b) Quelle est cette puissance maximale?

   (Utiliser le test de la dérivée seconde)

5. La force d'interaction entre deux atomes d'une molécule diatomique est

$$F = -\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3}$$

   dans laquelle a et b sont des constantes positives et r représente la distance positive entre les deux atomes. À quelle distance la force est-elle minimale ?

   (Utiliser le test de la dérivée seconde)

6. Soit la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2$. Déterminer a et b si le graphique de f possède un point d'inflexion en $(1, 2)$.

7. Si la pente de la droite tangente à la courbe d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx$ est égale à 4 au point d'inflexion $(1, 5)$ alors trouver a, b et c.

8. Montrer que la fonction définie par l'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (où $b^2 - 3ac > 0$) possède

   a) un maximum relatif en $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$,

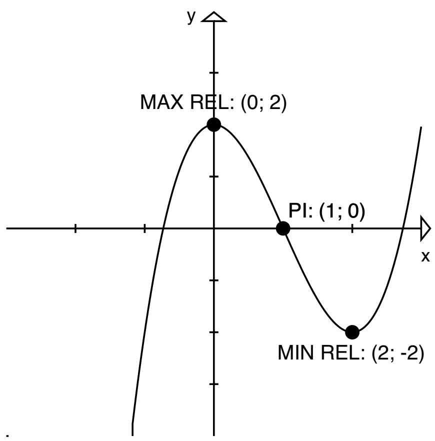
   b) un minimum relatif en $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$.

   (Utiliser le test de la dérivée seconde)

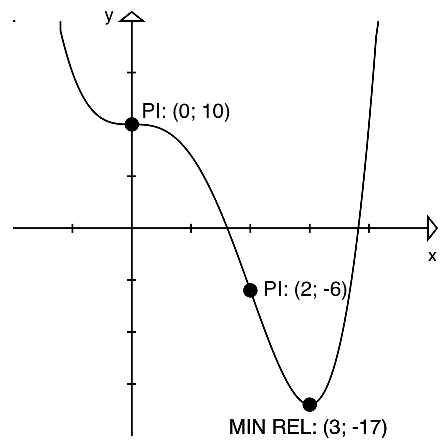
Réponses aux exercices 4.2

1. a) concave vers le haut sur $]-1, \infty[$; concave vers le bas sur $]-\infty, -1[$; PI: $(-1, 2)$
   b) concave vers le haut sur $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$; concave vers le bas sur $]-1, 1[$; PI: $(-1, -4)$; $(1, -4)$
   c) concave vers le haut sur $\mathbf{R}$; jamais concave vers le bas ; PI: aucun
   d) concave vers le haut sur $]-\infty, 0[$; concave vers le bas sur $]0, \infty[$; PI: $(0, -2)$
   e) concave vers le haut sur $]-3/2, 0[\cup]0, \infty[$; concave vers le bas sur $]-\infty, -3/2[$; PI: $(-3/2, 1/9)$
   f) concave vers le haut sur $]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]-1, 1[\cup]\sqrt{5}, \infty[$; concave vers le bas sur $]-\sqrt{5}, -1[\cup]1, \sqrt{5}[$
   PI: $(-\sqrt{5}, 0)$; $(-1, -64)$; $(1, -64)$; $(\sqrt{5}, 0)$

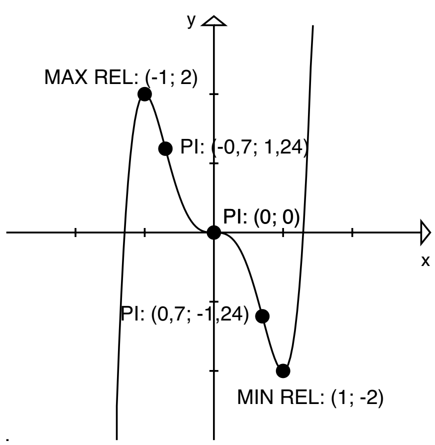
2. a) $f'(x) = 3x(x - 2)$; $f''(x) = 6(x - 1)$



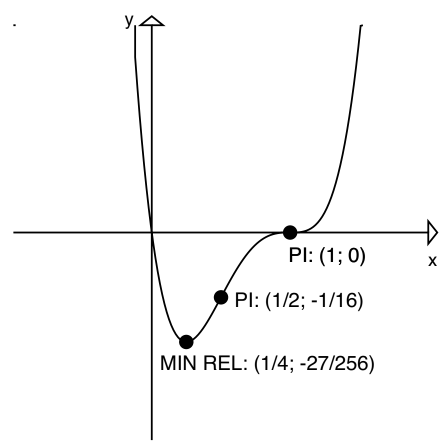
b) $f'(x) = 4x^2(x - 3)$; $f''(x) = 12x(x - 2)$



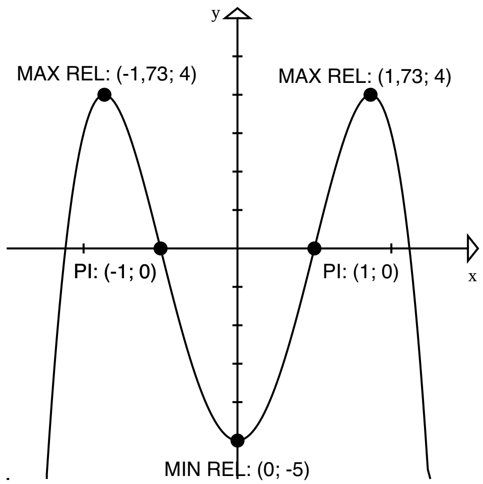
c) $f'(x) = 15x^2(x + 1)(x - 1)$; $f''(x) = 30x(2x^2 - 1)$



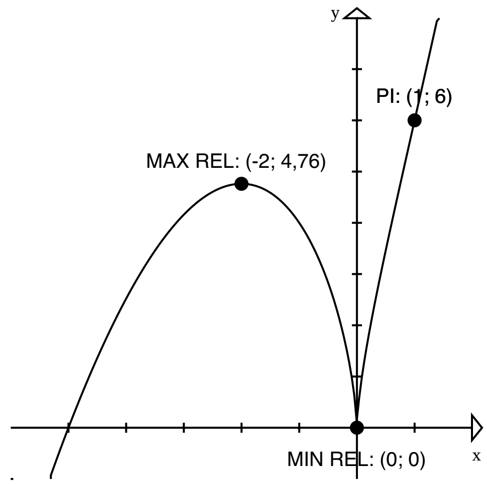
d) $f'(x) = (x - 1)^2(4x - 1)$; $f''(x) = 6(x - 1)(2x - 1)$



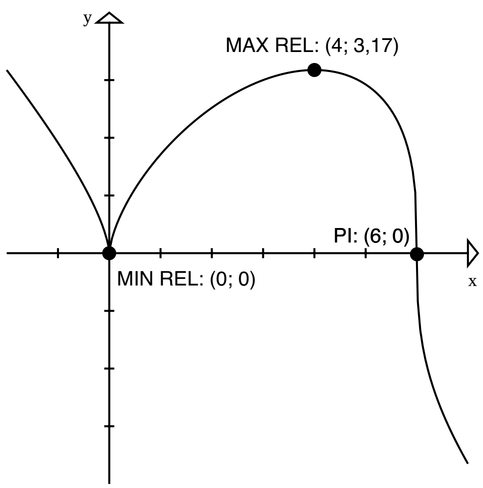
e) $f'(x) = -4x(x^2 - 3)$; $f''(x) = -12(x - 1)(x + 1)$



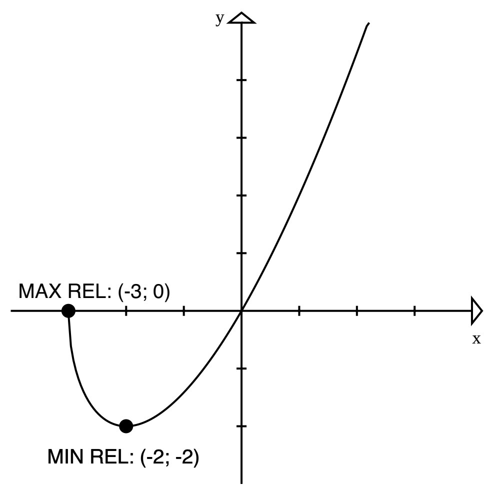
f) $f'(x) = \dfrac{5(x + 2)}{3\sqrt[3]{x}}$; $f''(x) = \dfrac{10(x - 1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$



g)



h)



3. a) max. rel. au point: $(0, 27)$
   min. rel. au point: $(3, 0)$
   b) max. rel. au point: aucun
   min. rel. au point: aucun
   c) max. rel. au point: $(-1, -2)$
   min. rel. au point: $(1, 2)$
   d) max. rel. au point: $(8, 12)$
   min. rel. au point: $(0, 0)$
   e) max. rel. au point: $(-b/2a, (4ac - b^2)/4a)$
   min. rel. au point: aucun
   f) max. rel. au point: aucun
   min. rel. au point: $(k, 3k^2/2)$

4. a) $I = \dfrac{E}{2R}$ b) $P = \dfrac{E^2}{4R}$

5. $\dfrac{3b}{2a}$

6. $a = -1$ et $b = 3$

7. $a = 1$, $b = -3$ et $c = 7$

4.3 Asymptotes et symétrie

asymptotes

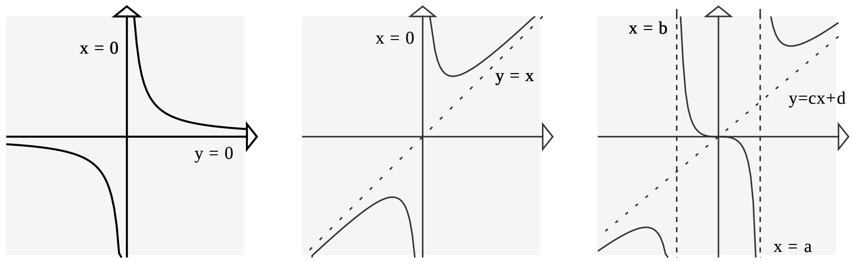
Les *asymptotes* sont des guides particulièrement utiles pour la représentation graphique d'une fonction. Une asymptote c'est en fait une droite imaginaire vers laquelle la courbe d'une fonction se rapproche infiniment. Ces droites nous renseignent sur le comportement de la fonction à l'infini ainsi qu'autour de certains points de discontinuité. Nous étudierons trois types d'asymptotes: les *asymptotes verticales, horizontales* et *obliques*.

Chacune des courbes ci-dessous possède au moins une asymptote.

l'asymptote verticale à la forme $\boxed{x = a}$

l'asymptote horizontale à la forme $\boxed{y = b}$

l'asymptote oblique à la forme $\boxed{y = ax + b}$



définition 4.3.1

asymptote verticale

La droite $x = a$ est une *asymptote verticale* au graphique de la fonction f si <u>au moins une</u> des conditions suivantes se réalise:

- $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

pour qu'il y ait une asymptote verticale, la courbe doit ***exploser*** *vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ au voisinage d'un point de discontinuité*

Les seules valeurs de a pouvant constituer une asymptote verticale au graphique d'une fonction sont les points de discontinuité de cette fonction. En principe pour obtenir les asymptotes verticales d'une fonction, on vérifie si la définition est satisfaite pour chacun des points de discontinuité de celle-ci.

exemple 4.3.1

Trouver les asymptotes verticales de la fonction f définie par l'équation

$$y = \frac{x + 3}{(x - 2)(x + 1)}$$

---

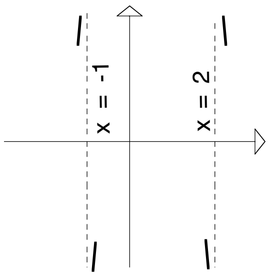
f est discontinue en $x = -1$ et $x = 2$ (forme rationnelle).

En $x = -1$ on a,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x + 3}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{2}{0} = \begin{cases} \lim_{x \to -1^+} \dfrac{x + 3}{(x - 2)(x + 1)} = \dfrac{2}{(-3)(0^+)} = -\infty \\ \lim_{x \to -1^-} \dfrac{x + 3}{(x - 2)(x + 1)} = \dfrac{2}{(-3)(0^-)} = \infty \end{cases}$$

après avoir trouvé les asymptotes verticales, on trace sur un plan cartésien une esquisse du graphique près des asymptotes

$\Rightarrow$ $\boxed{x = -1}$ est une asymptote verticale.



et pour $x = 2$ on a,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 3}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{5}{0} = \begin{cases} \lim_{x \to 2^+} \frac{x + 3}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{5}{(0^+)(3)} = \infty \\ \lim_{x \to 2^-} \frac{x + 3}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{5}{(0^-)(3)} = -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 2}$ est une autre asymptote verticale.

exemple 4.3.2 Trouver les asymptotes verticales de la fonction f définie par l'équation

$$y = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

tracer ensuite ces asymptotes en esquissant la courbe près de celles-ci.

---

f est discontinue en $x = -1$ et $x = 1$ (forme rationnelle).

De plus pour $x = -1$ on a,

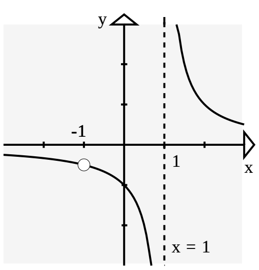
$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x^2 - 1} &= \frac{0}{0} \text{ IND} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{(x + 1)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{1}{x - 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

*la courbe **n'explose pas** vers + ∞ ou vers - ∞ au voisinage de x = -1*

$\Rightarrow$ $x = -1$ n'est pas une asymptote verticale,

pour $x = 1$ on a,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} = \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{(0^+)} = \infty \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{(0^-)} = -\infty \end{cases}$$



$\Rightarrow$ $\boxed{x = 1}$ est donc une asymptote verticale.

remarques

- Une fonction peut avoir 0, 1, 2 ou plusieurs asymptotes verticales.
- Les fonctions polynomiales n'ont pas d'asymptote verticale.
- Chaque valeur qui annule le dénominateur d'une fonction rationnelle irréductible détermine une asymptote verticale de la fonction.

définition 4.3.2
asymptote horizontale

La droite $y = b$ est une *asymptote horizontale* au graphique de la fonction f si <u>au moins une</u> des conditions suivantes se réalise:

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

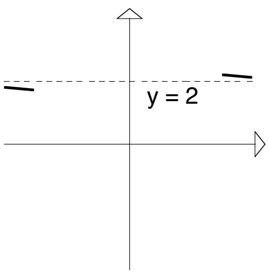
exemple 4.3.3

Trouver les asymptotes horizontales de la fonction f définie par l'équation

$$y = 2 + \frac{1}{x}$$

tracer ensuite ces asymptotes en esquissant la courbe près de celles-ci.

On a,



- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \ (2^+)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \ (2^-)$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = 2}$ est une asymptote horizontale.

exemple 4.3.4

Trouver les asymptotes horizontales de la fonction f définie par l'équation

$$y = \frac{4x - 1}{x + 1}$$

tracer ensuite ces asymptotes en esquissant la courbe près de celles-ci.

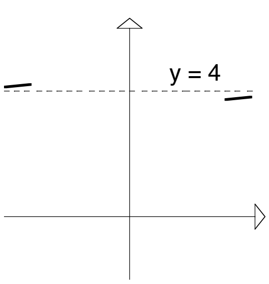
On a,

- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{4x - 1}{x + 1}\right) = \frac{\infty}{\infty}$ IND

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{4^-}{1^+} = 4 \ (4^-)$$

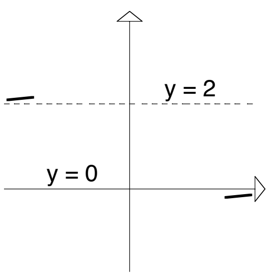
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{4x - 1}{x + 1}\right) = \frac{-\infty}{-\infty}$ IND

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{4^+}{1^-} = 4 \ (4^+)$$



$\Rightarrow$ $\boxed{y = 4}$ est une asymptote horizontale.

exemple 4.3.5



Trouver les asymptotes horizontales de $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

On a,

- $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x} \right) = \frac{\infty - \infty}{\infty} \quad \text{IND}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1} \right) = \frac{1 - 1^+}{1} = 0 \ \ (0^-)$$
- $$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x} \right) = \frac{-\infty}{-\infty} \quad \text{IND}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1} \right) = \frac{1 + 1^+}{1} = 2 \ \ (2^+)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = 0}$ et $\boxed{y = 2}$ sont les asymptotes horizontales cherchées.

remarques

- Une fonction peut avoir 0, 1 ou 2 asymptotes horizontales <u>mais jamais plus de deux</u>.
- Les fonctions polynomiales n'ont pas d'asymptote horizontale.
- Une fonction rationnelle possède une asymptote horizontale si degré du numérateur ≤ degré du dénominateur.

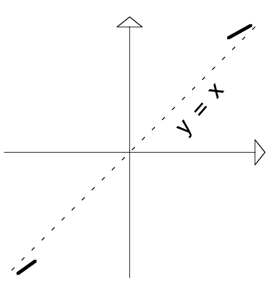
définition 4.3.3
asymptote oblique

La droite $y = ax + b$ est une *asymptote oblique* au graphique de la fonction f

a) si la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$,
b) et si, <u>au moins une</u> des conditions suivantes se réalise:

$$\bullet \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \qquad \bullet \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

exemple 4.3.6



Trouver l'asymptote oblique de la fonction d'équation $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Puisque $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad (f(x) = ax + b + g(x))$

et,

- $$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \ \ (0^-)$$
- $$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \ \ (0^+)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = x}$ est une asymptote oblique.

exemple 4.3.7

Trouver l'asymptote oblique de la fonction $f(x) = \dfrac{4x^2 + 7x - 1}{x + 2}$.

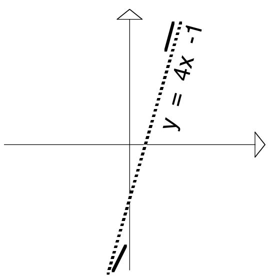
Lorsqu'une fonction est rationnelle, on peut obtenir la forme $ax + b + g(x)$ en divisant le numérateur par le dénominateur.

$$\begin{array}{rl} 4x^2 + 7x - 1 & \underline{|\ x + 2} \\ \underline{-(4x^2 + 8x)} & \ 4x - 1 \\ -x - 1 & \\ \underline{-(-x - 2)} & \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{4x^2 + 7x - 1}{x + 2} = 4x - 1 + \frac{1}{x + 2}$$

Puisque $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{x + 2}$ $\quad (f(x) = ax + b + g(x))$

et,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x + 2} = 0 \ (0^-)$
- $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x + 2} = 0 \ (0^+)$

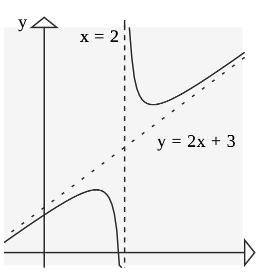
$\Rightarrow$ $\boxed{y = 4x - 1}$ est une asymptote oblique.

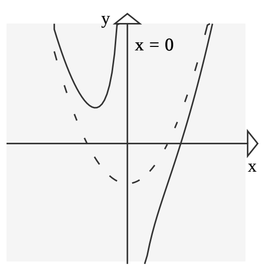


remarques

- Une fonction peut avoir 0, 1 ou 2 asymptotes obliques (voir la figure de gauche) <u>mais jamais plus de deux</u> .
- Les fonctions polynomiales n'ont pas d'asymptote oblique.
- Une fonction rationnelle ne peut avoir en même temps une asymptote horizontale et une asymptote oblique.
- Une fonction rationnelle possède une asymptote oblique si *degré du numérateur - degré du dénominateur = 1.*
- Une fonction ne peut jamais avoir au total plus de 2 asymptotes horizontales ou obliques.

termes dominants





Certaines observations rapides sur le comportement d'une fonction peuvent être obtenues à l'aide de ses *termes dominants*. Puisque

$$\frac{2x^2 - x - 5}{x - 2} = \boxed{2x + 3} + \boxed{\frac{1}{x - 2}}$$

on conclut que le graphique de la fonction a la forme

$$y = 2x + 3 \text{ si } x \to \pm\infty \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{x - 2} \text{ si x est très près de 2.}$$

On dit que $2x + 3$ *domine* lorsque x est grand tandis que $1/(x - 2)$ *domine* pour x très près de 2.

Ou encore, puisque $\dfrac{x^3 - x - 1}{x} = \boxed{x^2 - 1} + \boxed{\dfrac{-1}{x}}$

on peut affirmer que le graphique de la fonction a la forme

$$y = x^2 - 1 \text{ si } x \to \pm\infty \quad \text{et} \quad y = \frac{-1}{x} \text{ si x est très près de 0.}$$

exemple 4.3.8

Trouver (s'il y a lieu) les asymptotes verticales, horizontales et obliques de

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2}$$

<u>asymptote verticale</u>

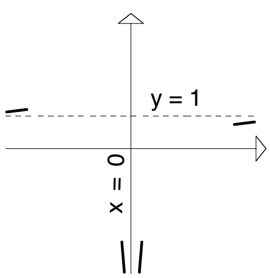
f est discontinue en $x = 0$ (forme rationnelle).

et, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 0}$ est une asymptote verticale.

<u>asymptote horizontale</u>

- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}{1} = \frac{1^-}{1} = 1 \quad (1^-)$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}{1} = \frac{1^+}{1} = 1 \quad (1^+)$



$\Rightarrow$ $\boxed{y = 1}$ est une asymptote horizontale.

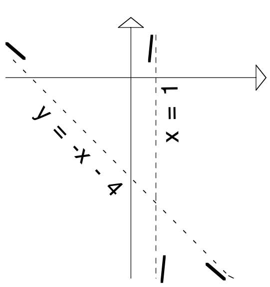
<u>asymptote oblique</u>

$\boxed{\text{aucune}}$ (puisqu'il existe une asymptote horizontale)

exemple 4.3.9

Trouver (s'il y a lieu) les asymptotes verticales, horizontales et obliques de

$$f(x) = \frac{2 - 3x - x^2}{x - 1}$$



définition 4.3.4

fonctions paires et impaires

Si f est une fonction telle que pour tout x de son domaine,

a) $f(-x) = f(x)$ alors que f est une fonction paire,
b) $f(-x) = -f(x)$ alors que f est une fonction impaire.

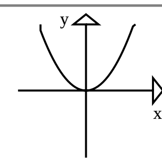
symétrie des fonctions paires et impaires

Le graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des y tandis que le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

exemple 4.3.10

a) $f(x) = x^2$ est une fonction paire car

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

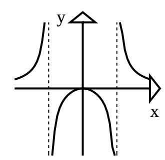


lorsqu'une fonction est paire ou impaire, l'étude du comportement de cette fonction exige deux fois moins de travail;

en général, l'étude de telles fonctions sera faites sur [0, ∞[puis, dépendant du type de fonction, on complétera par symétrie

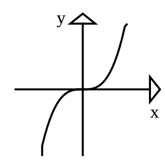
b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 - 1}$ est une fonction paire car

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4 - 1} = \frac{x^2}{x^4 - 1} = f(x).$$



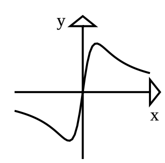
c) $f(x) = x^3$ est une fonction impaire car

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$



d) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$ est une fonction impaire car

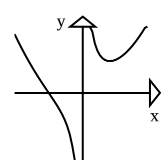
$$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-4x}{x^2 + 1} = -f(x).$$



la majorité des fonctions sont ni paires, ni impaires.

e) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ est ni paire, ni impaire puisque

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)} = x^2 - \frac{1}{x} \neq \pm f(x)$$



Faisons maintenant intervenir les notions d'asymptote et de symétrie dans les représentations graphiques de fonctions.

marche à suivre pour tracer le graphique d'une fonction f

- On trouve le domaine de la fonction.
- On étudie la continuité de cette fonction.
- On détermine si f est paire, impaire ou ni paire, ni impaire.
- On détermine les asymptotes de la fonction.
- On trouve $f'(x)$ et les nombres critiques de la fonction.
- On trouve $f''(x)$ et les nombres de transition de la fonction.
- On construit le tableau de variation de f en indiquant clairement les intervalles de croissance et de décroissance, les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas, les extremums relatifs et les points d'inflexion.
- On trace le graphique.

exemple 4.3.11

Tracer le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

---

a) dom $f = \mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$,

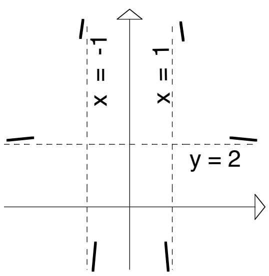
b) f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{\pm 1\}$ (forme rationnelle),

puisque la fonction est paire, on se contente d'une étude sur l'intervalle [0, ∞[; le graphique est donc symétrique par rapport à l'axe des y

c) La fonction est paire puisque

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = f(x).$$

d) Asymptotes verticales: $\boxed{x = \pm 1}$.
f est discontinue en x = -1 et x = 1 et,



$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = \infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

La fonction étant symétrique par rapport à l'axe des y, il n'est pas nécessaire d'étudier son comportement autour de x = -1.

Asymptote horizontale: $\boxed{y = 2}$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2}{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = \frac{2}{1^-} = 2 \ (2^+)$$

Toujours à cause de la symétrie, il est inutile d'effectuer la limite lorsque $x \to -\infty$.

Asymptote oblique: $\boxed{\text{aucune}}$.
La fonction n'a pas d'asymptote oblique, elle possède déjà une asymptote horizontale.

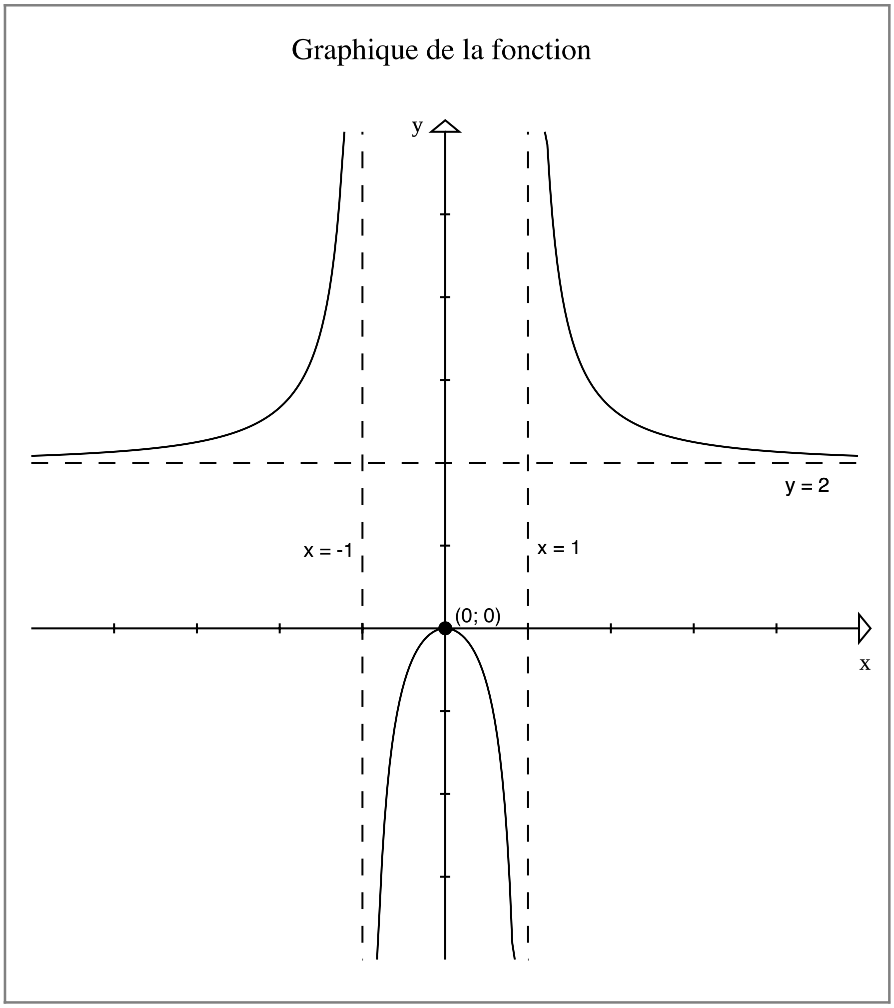
e) $$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \nexists & \text{si } x = \pm 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{n.c.: } \{0\}$$

$$f''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} = \begin{cases} 0 & \text{aucune valeur} \\ \nexists & \text{si } x = \pm 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{n.t.: } \{ \ \}$$

f) Tableau de variation de la fonction.

x = 1 n'est pas dans le domaine de la fonction, cette valeur ne peut donc être un point d'inflexion

x	0		1		∞
$f'(x)$	0	-	∄	-	
$f''(x)$		-	∄	+	
$f(x)$	MAX REL 0	↘ -∞	∄	∞ ↘	2^+


Graphique de la fonction
y
x
y = 2
x = -1
x = 1
(0; 0)

exemple 4.3.12

Tracer le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

---

a) dom $f = \mathbf{R}$,

b) f est continue sur $\mathbf{R}$ (forme rationnelle),

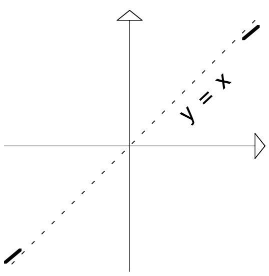
c) La fonction est impaire puisque

puisque la fonction est impaire, on se contente d'une étude sur $[0, \infty[$; le graphique est symétrique par rapport à l'origine

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3}{x^2 + 1} = -f(x).$$

d) Asymptote verticale: $\boxed{\text{aucune}}$.

La fonction ne possède pas d'asymptote verticale puisque f n'a pas de point de discontinuité.



Asymptote oblique: $\boxed{y = x}$.

Puisque $\dfrac{x^3}{x^2 + 1} = x + \dfrac{-x}{x^2 + 1}$ (obtenu par division)

et, $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{-x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{0^-}{1} = 0 \ (0^-)$$

Asymptote horizontale: $\boxed{\text{aucune}}$

La fonction n'a pas d'asymptote horizontale car elle possède déjà une asymptote oblique.

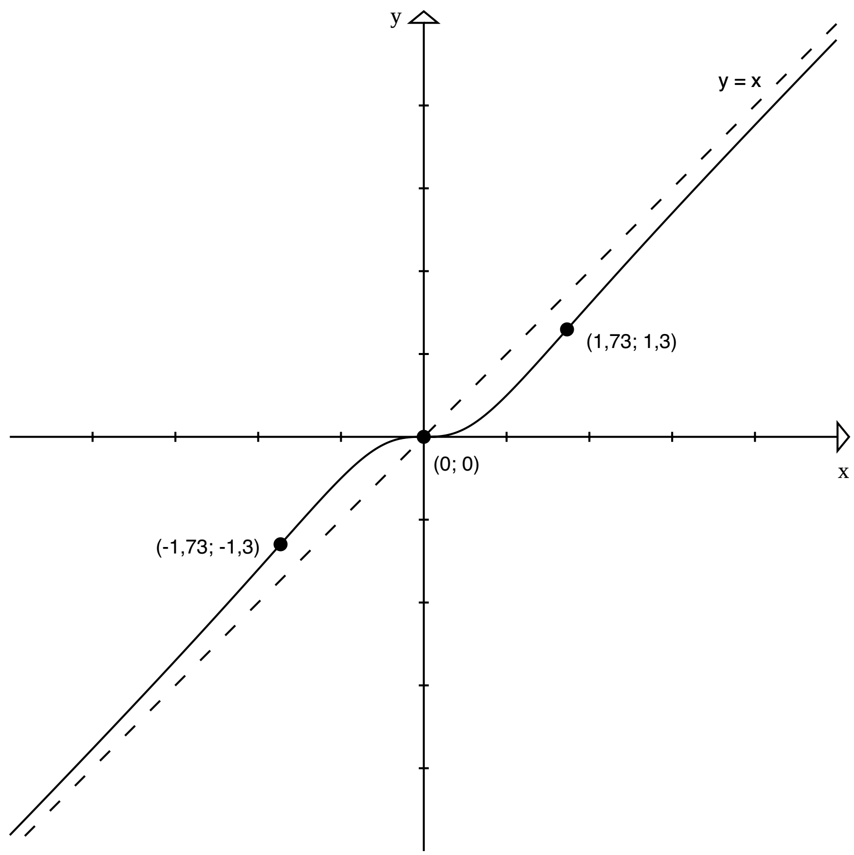
e) $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases} \Rightarrow \text{n.c.: } \{0\}$$

$$f''(x) = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0,\ x = \pm\sqrt{3} \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases} \Rightarrow \text{n.t.:}\{0, \pm\sqrt{3}\}$$

f) Tableau de variation de la fonction.

x	0		$\sqrt{3} \sim 1{,}73$		∞
f '(x)		+	+	+	
f ''(x)		+	0	-	
f(x)	*PI* *0*	↗	*PI* *1,3*	↗	∞

Graphique de la fonction



exemple 4.3.13 Tracer le graphique de la fonction $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2$.

---

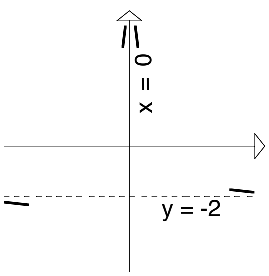
a) dom $f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

b) f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (forme rationnelle),

c) La fonction est ni paire, ni impaire puisque

la fonction ne présente aucune symétrie, on fera donc son étude sur]-∞, ∞[

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2} + \frac{3}{(-x)} - 2 = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} - 2 \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$



d) Asymptote verticale: $\boxed{x = 0}$.
f est discontinue en x = 0 et,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2\right) = \frac{2}{0} + \frac{3}{0} - 2$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2\right) = \frac{2}{0^+} + \frac{3}{0^+} - 2 = \infty \\ \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{2 + 3x - 2x^2}{x^2}\right) = \frac{2}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Asymptote horizontale: $\boxed{y = -2}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2\right) = -2\ (-2^-) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 2\right) = -2\ (-2^+)$$

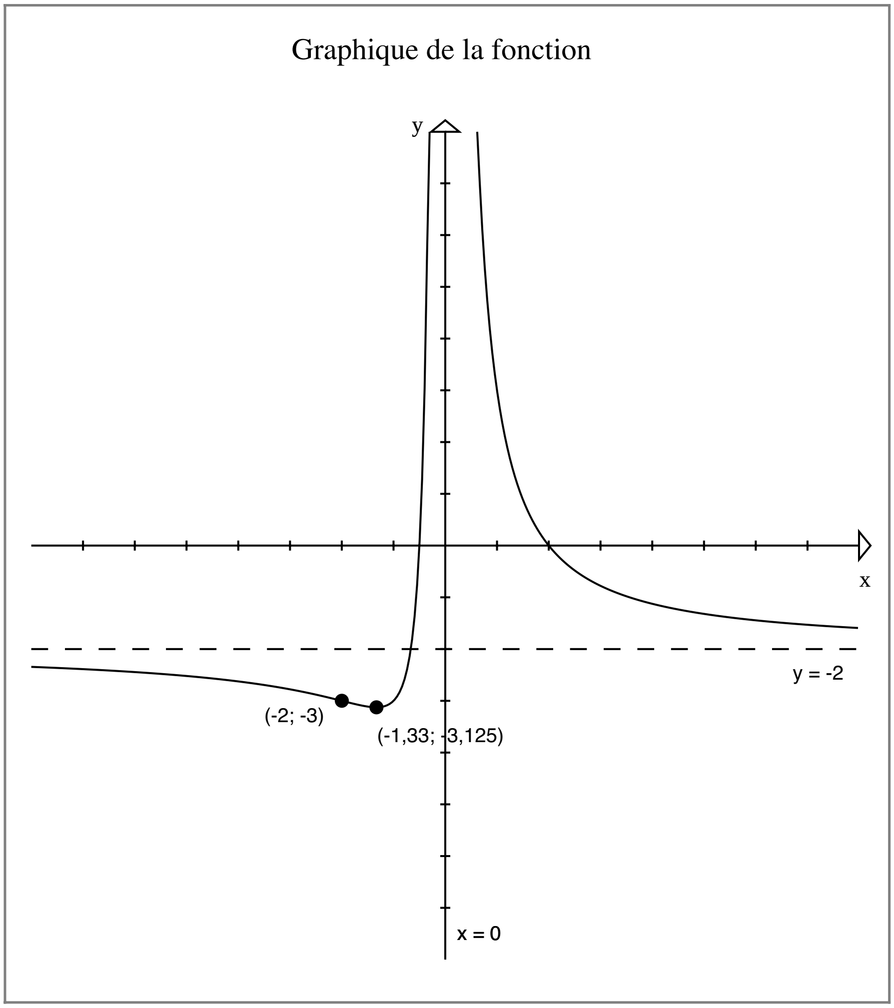
Asymptote oblique: $\boxed{\text{aucune}}$
La fonction possède déjà une asymptote horizontale.

e) $$f'(x) = -\frac{(4 + 3x)}{x^3} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -4/3 \\ \nexists & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{n.c.: } \{-4/3\}$$

$$f''(x) = \frac{6(2 + x)}{x^4} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -2 \\ \nexists & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{n.t.: } \{-2\}$$

f) Tableau de variation de la fonction.

x	-∞		-2		- 4/3		0		∞
f '(x)		-	-	-	0	+	∄	-	
f ''(x)		-	0	+	+	+	∄	+	
f(x)	-2^-	↘	PI: (-3)	↘	MIN REL: (-25/8)	↗	∄	↘	-2^+

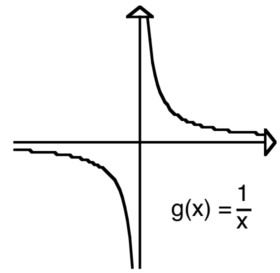

Graphique de la fonction
y
x
y = -2
(-2; -3)
(-1,33; -3,125)
x = 0

Dans certains cas, le graphique d'une fonction pourra être obtenu plus rapidement par translation d'une courbe connue.

définition 4.3.5
fonction homographique

$f(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{ax} + \mathrm{b}}{\mathrm{cx} + \mathrm{d}}$ $(\mathrm{c} \neq 0)$ est appelée «fonction homographique».

Le graphique de la fonction $f(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{ax} + \mathrm{b}}{\mathrm{cx} + \mathrm{d}}$ peut être obtenue par translation du graphique de $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \dfrac{1}{\mathrm{x}}$.



exemple 4.3.14

Tracer le graphique des fonctions homographiques suivantes.

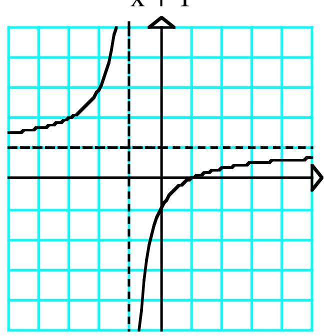
a) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x} - 1}{\mathrm{x} + 1}$ c) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{1 - 2\mathrm{x}}{\mathrm{x} - 2}$

b) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{-2\mathrm{x} + 3}{\mathrm{x}}$ d) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x} - 1}$

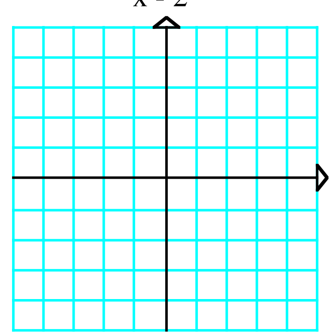
---

pour obtenir le graphique en a), on effectue d'abord la division des polynômes et on obtient $\dfrac{x - 1}{x + 1} = 1 + \dfrac{-2}{(x + 1)}$ *l'expression nous indique que le graphique de f(x) correspond à une translation de une unité vers le haut et de une unité vers la gauche de l'inverse du graphique de g(x) = 1/x (à cause du facteur -2)*

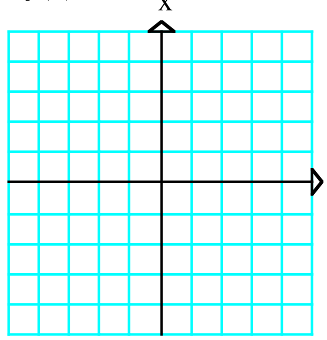
a) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x} - 1}{\mathrm{x} + 1}$



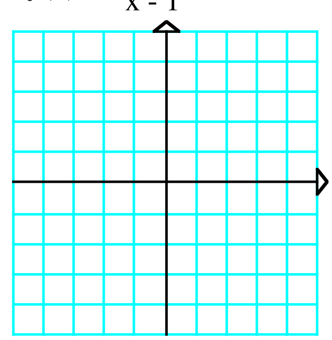
c) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{1 - 2\mathrm{x}}{\mathrm{x} - 2}$



b) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{-2\mathrm{x} + 3}{\mathrm{x}}$



d) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x} - 1}$



Exercices 4.3

1. Déterminer les asympotes verticales, horizontales et obliques de chacune des fonctions puis, tracer les asymptotes sur un plan cartésien en esquissant la courbe près de celles-ci.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{2x + 1}$

c) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

d) $g(x) = \dfrac{3 - 2x - 2x^2}{x + 1}$

e) $h(x) = \dfrac{(x - 1)^3}{x^2}$

2. Déterminer (s'il y a lieu) les équations des asymptotes verticales et horizontales de

$$f(x) = \frac{3x - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

Tracer les asymptotes sur un plan cartésien en esquissant la courbe près de celle-ci.

3. Pour chacune des fonctions f,

- trouver son domaine,
- étudier la continuité ,
- déterminer si f est paire, impaire ou ni paire, ni impaire,
- déterminer les asymptotes,
- trouver $f'(x)$ et les nombres critiques,
- trouve $f''(x)$ et les nombres de transition,
- construire le tableau de variation de f en indiquant clairement s'il y a lieu, les intervalles de croissance et de décroissance, les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas, les extremums relatifs et les points d'inflexion,
- tracer le graphique.

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

b) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$ $\quad f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2(x^3 - 1)}{x^3}$ $\quad f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$

d) $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{x^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x + 1)^2(x - 2)}{x^3}$ $\quad f''(x) = \dfrac{6(x + 1)}{x^4}$

e) $f(x) = \dfrac{1 - 3x^2}{x^3}$ $\quad f'(x) = \dfrac{3(x^2 - 1)}{x^4}$ $\quad f''(x) = \dfrac{6(2 - x^2)}{x^5}$

f) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + 1}$ $\quad f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2 + 1)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{8(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}$

g) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2$ $\quad f'(x) = -\dfrac{8x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$ $\quad f''(x) = \dfrac{8(3x^4 + 8x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 3}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x + 4)(x + 2)}{(x + 3)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{2}{(x + 3)^3}$

i) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{4 - x^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{16x}{(4 - x^2)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{16(3x^2 + 4)}{(4 - x^2)^3}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x}$ $\quad f'(x) = -\dfrac{3(x^2 - 1)}{(x^3 - 3x)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{6(2x^4 - 3x^2 + 3)}{(x^3 - 3x)^3}$

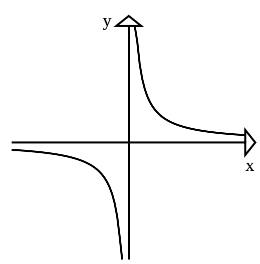
$(2x^4 - 3x^2 + 3 \neq 0 \ \forall x)$

l) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3x + 3}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x^2(x + 3)^2}{(x^2 + 3x + 3)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{6x(x + 3)(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 3)^3}$

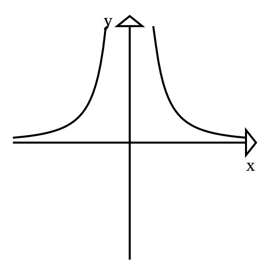
4. En utilisant les graphiques de droite, déterminer le graphique de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$ $\quad$ c) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{1 - x}$ $\quad$ d) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x^2}$



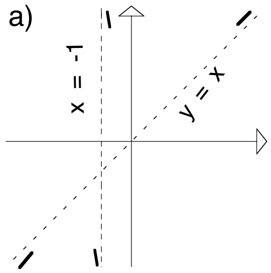
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



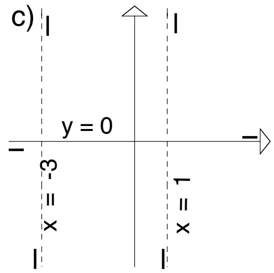
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Réponses aux exercices 4.3

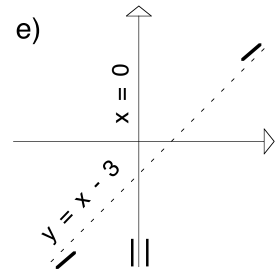
1. a)



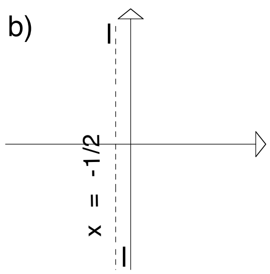
c)



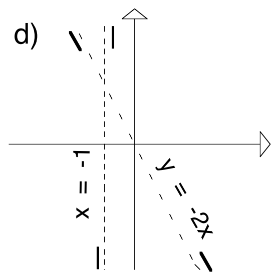
e)



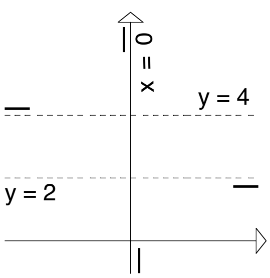
b)



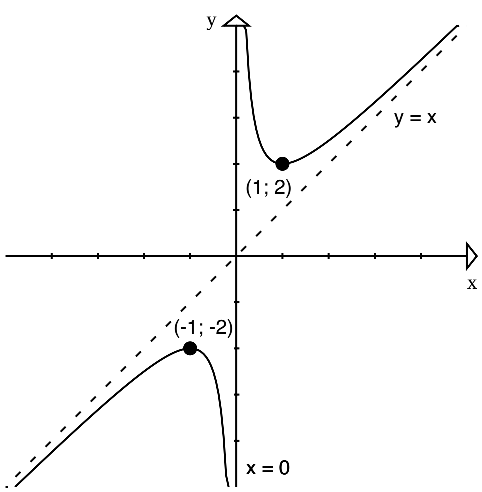
d)



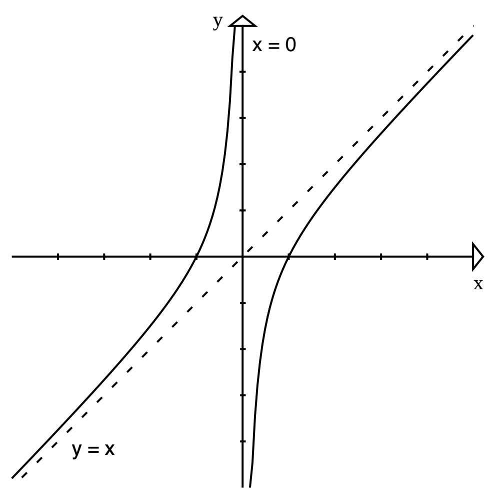
2.



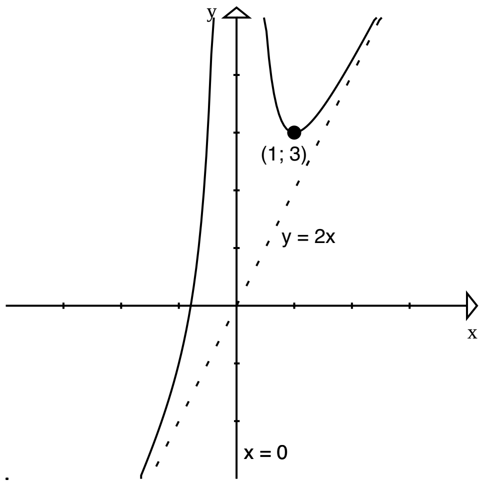
3. a)



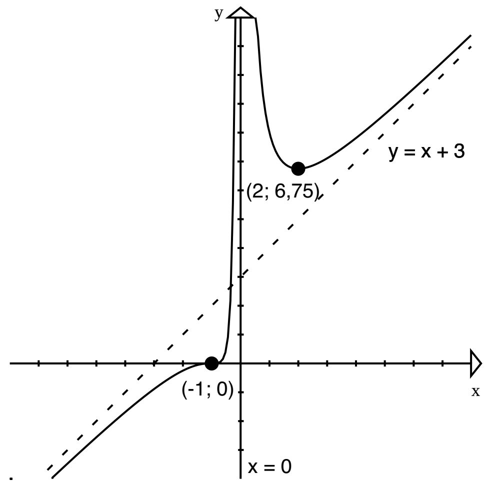
b)



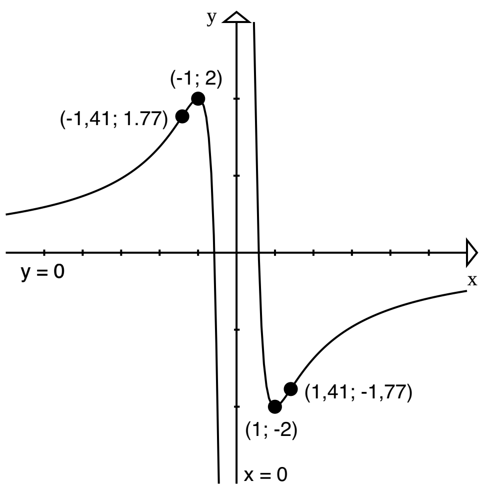
c)


y
(1; 3)
y = 2x
x
x = 0

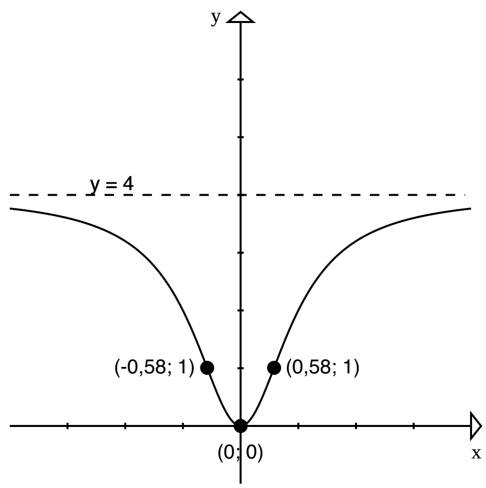
d)


y
y = x + 3
(2; 6,75)
(-1; 0)
x
x = 0

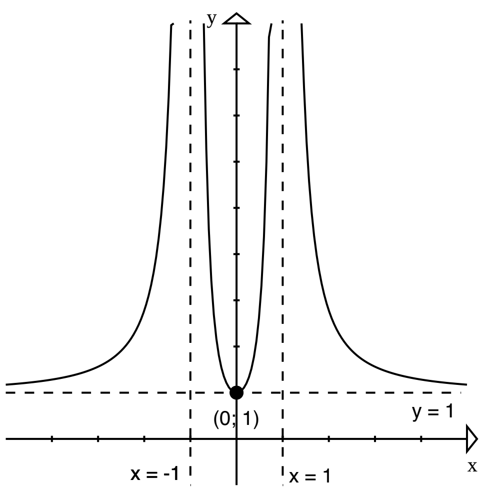
e)


y
(-1; 2)
(-1,41; 1.77)
y = 0
x
(1,41; -1,77)
(1; -2)
x = 0

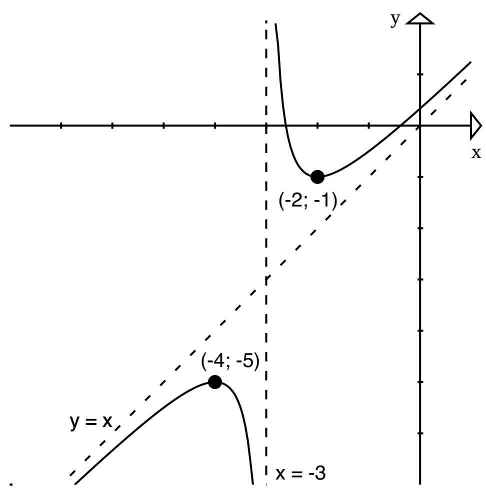
f)


y
y = 4
(-0,58; 1)
(0,58; 1)
x
(0; 0)

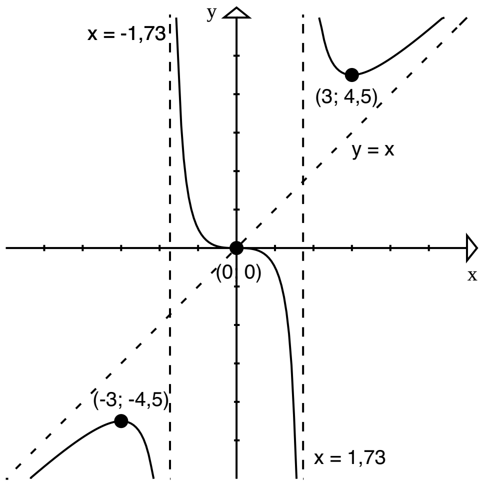
g)


y
(0; 1)
y = 1
x = -1
x = 1
x

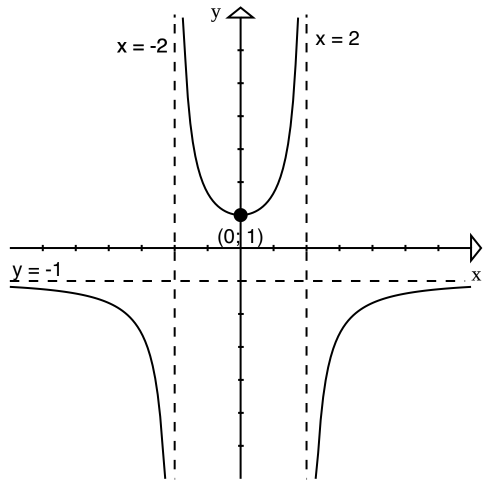
h)


y
x
(-2; -1)
(-4; -5)
y = x
x = -3

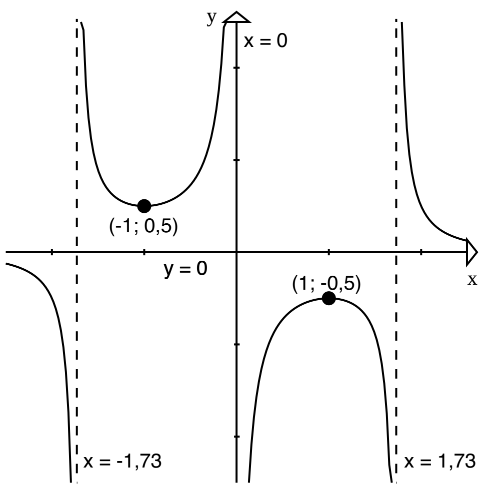
i)


y
x = -1,73
(3; 4,5)
y = x
(0; 0)
x
(-3; -4,5)
x = 1,73

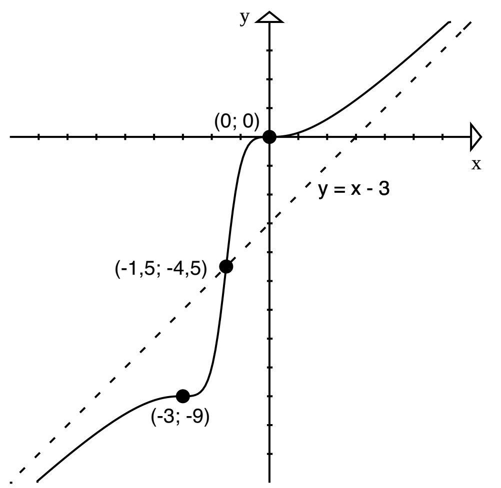
j)


y
x = -2
x = 2
(0; 1)
y = -1
x

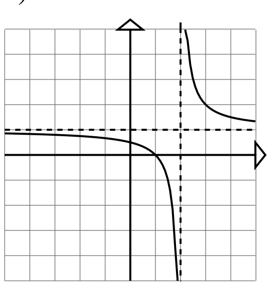
k)


y
x = 0
(-1; 0,5)
y = 0
(1; -0,5)
x
x = -1,73
x = 1,73

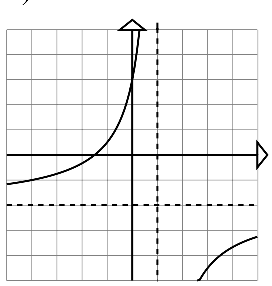
l)


y
(0; 0)
x
y = x - 3
(-1,5; -4,5)
(-3; -9)

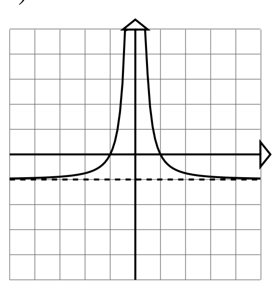
4. a)



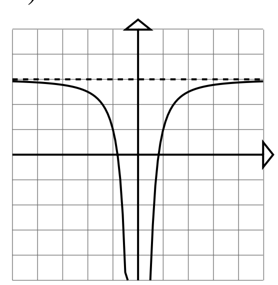
b)



c)



d)

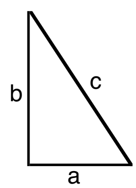


4.4 Optimisation

À la section 2, nous avons appris à déterminer les extremums relatifs et absolus d'une fonction. La fonction était fournie ainsi que son domaine de définition. Dans cette section, on demandera à l'étudiant de construire lui-même la fonction à optimiser (à rendre maximale ou minimale) et à déterminer selon le cas, le <u>maximum absolu</u> ou le <u>minimum absolu</u> de la fonction.

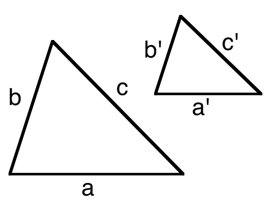
Pour certains problèmes, on devra se souvenir des formules suivantes:

<u>autres résultats utiles</u>



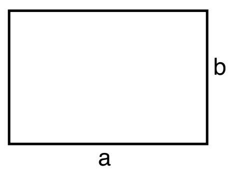
par Pythagore:

$a^2 + b^2 = c^2$

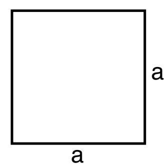


rapports dans les triangles semblables:

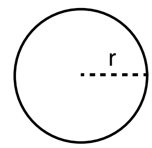
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



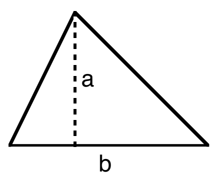
PERIMETRE: $2a + 2b$
AIRE: ab



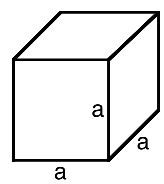
PERIMETRE: $4a$
AIRE: a^2



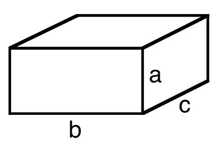
CIRCONFERENCE: $2\pi r$
AIRE: πr^2



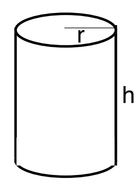
AIRE: $\frac{ab}{2}$



AIRE TOTALE: $6a^2$
VOLUME: a^3



AIRE TOTALE: $2ab + 2ac + 2bc$
VOLUME: abc



AIRE TOTALE: $2\pi r^2 + 2\pi rh$
VOLUME: $\pi r^2 h$

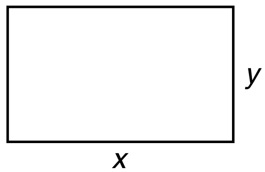
marche à suivre pour résoudre les problèmes d'optimisation

- Représenter graphiquement le problème lorsque c'est possible et définir les variables nécessaires à sa solution.
- Déterminer la quantité à optimiser sous forme d'une fonction.
- Exprimer cette fonction (s'il y a lieu) à l'aide d'une seule variable en utilisant la ou les contraintes du problème.
- Trouver le domaine de définition de la fonction et faire une étude de continuité sur ce domaine.
- Trouver les nombres critiques de la fonction puis étudier son comportement à l'aide du test de la dérivée première ou du test de la dérivée seconde.
- Formuler la réponse du problème.

exemple 4.4.1

Un homme dispose de 100 mètres de clôture pour délimiter un terrain rectangulaire. Quelles devront être les dimensions du terrain pour que l'aire soit maximale?

- Représentation graphique et identification des variables.



Soit

x : la longueur du terrain (mètres)
y: la largeur du terrain (mètres)

- Quantité à optimiser à l'aide des variables.

  Soit A l'aire du terrain: $A = xy$.

- Quantité à optimiser à l'aide d'une seule variable.

  L'homme dispose de 100 mètres de clôture par conséquent,

$$2x + 2y = 100$$
$$y = 50 - x$$

donc $\boxed{A = x(50 - x)}$

pour que le problème soit possible, les longueurs x et y doivent être positives, $x > 0$ et $y = (50 - x) > 0 \Rightarrow x < 50$

- Domaine et étude de continuité.

  - dom $A =]0, 50[$,
  - A est continue sur $]0, 50[$ (forme polynomiale).

- Extremums absolus.

$$A' = 50 - 2x$$
$$= 2(25 - x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 25 \\ \nexists & \text{aucune valeur} \end{cases} \Rightarrow \text{n.c.: } \{25\}$$

x	0		25		50
A'		+	0	-	
A	0	↗	MAX ABSOLU 625	↘	0

- Réponse du problème.

l'aire sera maximale pour un terrain carré

L'aire maximale est 625 m^2 si $\begin{cases} \text{la longueur est 25 m,} \\ \text{la largeur est 25 m.} \end{cases}$

exemple 4.4.2

La somme de deux nombres positifs est 120. Quels sont ces nombres si le produit du carré du premier par le deuxième est maximal?

- Représentation graphique et identification des variables.

Aucune représentation possible

Soit

x : le premier nombre
y: le second nombre

- Quantité à optimiser à l'aide des variables.

Soit P le produit en question : $P = x^2y$.

- Quantité à optimiser à l'aide d'une seule variable.

La somme des nombres est 120 par conséquent,

$$x + y = 120$$
$$y = 120 - x$$

donc $\boxed{P = x^2(120 - x)}$

les nombres x et y sont positifs

$x > 0$ et
$y = (120 - x) > 0$
$\Rightarrow x < 120$

- Domaine et étude de continuité.

  - dom P =]0, 120[,
  - P est continue sur]0, 120[(forme polynomiale).

$P = x^2(120 - x)$
$= 120x^2 - x^3$

- Extremums absolus.

$$P' = 240x - 3x^2$$
$$= 3x(80 - x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = 80 \\ \nexists \text{ aucune valeur} \end{cases} \quad \Rightarrow \text{n.c.: } \{80\}$$

x	0		80		120
P '		+	0	-	
P	0	↗	MAX ABSOLU 256 000	↘	0

- Réponse du problème.

Produit maximal (256 000) si $\begin{cases} \text{le premier nombre est 80,} \\ \text{le deuxième nombre est 40.} \end{cases}$

exemple 4.4.3

M Gendron dispose d'un stationnement de 200 automobiles. Il cherche le tarif horaire qui lui apportera un revenu maximal. Par expérience il a constaté qu'un tarif horaire de 6 $ apportait en moyenne 80 clients par heure et pour chaque diminution de 0,10 $, le nombre de clients augmentait de 4. À partir de ces observations, trouver le tarif horaire pour lequel le revenu sera maximal?

- Représentation graphique et identification des variables.

Revenu horaire pour 0, 1, 2, 3, 4, … diminutions

6 $ × 80 = 480,00 $
5,90 $ × 84 = 495,60 $
5,80 $ × 88 = 510,40 $
5,70 $ × 92 = 524,40 $
5,60 $ × 96 = 537,60 $
…

Aucune représentation possible

Soit
x: le nombre de diminutions de 0,10$

- Quantité à optimiser à l'aide des variables.

Soit R le revenu horaire : $\boxed{R = (6 - 0{,}1x)(80 + 4x)}$.

- Quantité à optimiser à l'aide d'une seule variable.

La fonction est déjà à une seule variable.

le stationnement dispose de 200 places;
$(80 + 4x) \leq 200 \Rightarrow x \leq 30$

- Domaine et étude de continuité.

  - dom R = [0, 30] ,
  - R est continue sur [0, 30] (forme polynomiale).

- Extremums absolus.

$$\begin{aligned}
R' &= (6 - 0{,}1x)\frac{d}{dx}(80 + 4x) + (80 + 4x)\frac{d}{dx}(6 - 0{,}1x) \\
&= 4(6 - 0{,}1x) - 0{,}1(80 + 4x) \\
&= 16 - 0{,}8x \\
&= 0{,}8(20 - x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 20 \\ \nexists \text{ aucune valeur} \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ n.c.: } \{20\}
\end{aligned}$$

x	0		20		30
R'		+	0	-	
R	480	↗	MAX ABSOLU 640	↘	600

- Réponse du problème.

Le revenu maximal est de 640 $ si le tarif horaire est fixé à 6 - (0,1)(20) = 4 $/heure.

exemple 4.4.4

Un ébéniste veut fabriquer un tiroir dont la profondeur, du devant à l'arrière, est de 50 cm et dont le volume est de 10 000 cm^3. Si le devant du tiroir coûte 0,02 $ par cm^2 et que le reste du tiroir coûte 0,01 $ par cm^2, quelles doivent être les dimensions du tiroir pour que le coût de fabrication soit minimal?

---

rép: le coût est minimal lorsque les dimensions du tiroir sont 10 cm (hauteur) $\times$ 20 cm (longueur) $\times$ 50 cm (profondeur).

exemple 4.4.5

Une page de cahier a un périmètre de 100 cm. Si cette page comprend des marges de 5 cm en haut, 3 cm en bas et de 2 cm sur les côtés, trouver les dimensions de la page pour que la surface imprimée soit maximale?

rép: La surface imprimée est maximale lorsque les dimensions de la feuille sont 23 cm (longueur de la feuille) $\times$ 27 cm (hauteur de la feuille) .

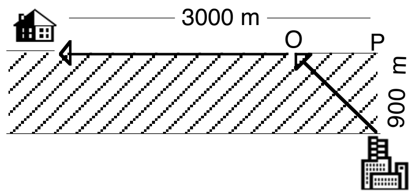
exemple 4.4.6

Une boîte de conserve métallique (de la forme d'un cylindre droit), fermée aux extrémités a un volume de 2000π cm^3. Trouver les dimensions de cette boîte pour que la quantité de métal nécessaire à sa fabrication soit minimale et trouver la quantité de métal utilisée?

rép: La quantité minimale est de 600π cm^2 (1884,96 cm^2)lorsque les dimensions de la boîte sont 10 cm (rayon)$\times$ 20 cm (hauteur) .

exemple 4.4.7

On veut relier une usine située en bordure d'une rivière de 900 m de largeur à une centrale électrique située sur la rive opposée, à 3000 m en amont. Il en coûte 5 \$/m pour installer le câble sous l’eau et 4 \$/m pour l'installer au-dessus du sol. À quelle distance du point P, doit-on faire traverser le câble pour que le coût d'installation soit minimal?



rép: À 1200 m du point P.

Exercices 4.4

1. Trouver deux nombres dont la somme est 15 et dont le produit est maximal.

2. Trouver le nombre qui ajouté à son carré donne une somme minimale.

3. Le produit de deux nombres positifs est 16. Quels sont ces deux nombres si le carré du premier ajouté au deuxième est minimal?

4. Le quotient de deux nombres est 10. Quels sont ces deux nombres si la somme du numérateur et du carré du dénominateur est minimale?

5. La différence de deux nombres est 25. Quels sont ces deux nombres si le cube de leur produit est minimal?

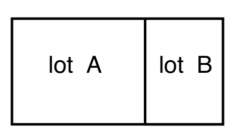
6. Trouver deux nombres dont le produit est 4 et la somme des carrés de chacun des nombres est minimale?

7. Quelles doivent être les dimensions d'un rectangle de périmètre 64 mètres pour que son aire soit maximale?

8. Quelles doivent être les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 20 m^2 pour que son périmètre soit minimal? Calculer ce périmètre minimal.

9. Un homme a 100 mètres de grillage pour entourer trois côtés d'un champ rectangulaire (le quatrième côté étant bordé par une rivière). Quelles doivent être les dimensions du champ pour que son aire soit maximale?

10. L'aire de la surface d'un terrain rectangulaire est de 150 m^2. On veut clôturer ce terrain et le diviser en deux lots rectangulaires par une clôture parallèle à l'un des cotés. Quelles doivent être les dimensions du terrain pour que la quantité de clôture utilisée soit minimale?



11. Une compagnie possède 32 magasins. Chacun rapporte en moyenne 1000 $ par semaine. Après étude, la compagnie s'aperçoit que l'ouverture de chaque nouveau magasin diminue le profit hebdomadaire moyen de chacun de ses commerces de 20 $.
    a) Combien cette compagnie doit-elle ouvrir de nouveaux magasins pour maximiser son profit?
    b) Quel sera son profit hebdomadaire maximal?

12. Le propriétaire d'une salle de cinéma de 700 places constate qu'en moyenne, 200 personnes assistent aux représentations lorsque le prix d'entrée est de 4 $. Pour renta-biliser son entreprise, il décide de s'orienter du côté du cinéma de répertoire. Ce genre de spectacle s'adressant à une clientèle plus jeune, il estime que chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 10 cents, il attire 25 nouveaux spectateurs.
    a) En partant de cette hypothèse, déterminer quel devrait être le prix du billet pour obtenir un revenu brut maximal?
    b) Quel sera alors le nombre de spectateurs dans la salle?

13. Une compagnie accepte de transporter par autobus 100 personnes de Montréal à Québec au tarif de 12 $ chacune. Elle accorde 0,05 $ de rabais à chaque passager à chaque fois que se présente un passager supplémentaire (en plus des 100 premiers). Quel est le revenu maximal que la compagnie peut retirer de cette opération? (On suppose que la capacité d'un autobus est de 180 passagers.)

14. Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen sera de 475 poires par arbre et que ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ. Combien le propriétaire devrait-il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal?

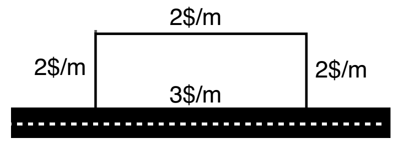
15. Vous êtes propriétaire d'un magasin de disques. Vous vendez 20 disques par jour au prix de 5 $ chacun. Ils vous coûtent 2 $ l'unité. Vous savez qu'à chaque baisse de 0,20 $ sur le prix de vente d'un disque, vous en vendez 4 de plus par jour. Quel prix devez-vous vendre vos disques pour obtenir un bénéfice maximal et quel est ce bénéfice?

16. Un homme a 120 appartements. Ceux-ci sont tous loués lorsque le loyer est de 400 $ par mois. Pour chaque augmentation de 5 $ dans le loyer mensuel un appartement devient vacant. Chaque appartement loué coûte en moyenne au propriétaire 50 $ par mois en frais d'entretien et de réparations. À combien doit-il fixer son loyer pour réaliser un profit maximal?

17. La surface totale d'une boîte à fond et couvercle carrés est de 294 cm^2. Calculer les dimensions de la boîte qui maximisent son volume.

18. Une boîte métallique à base carrée, ouverte sur le dessus, a un volume de 32 m^3 Trouver les dimensions que doit avoir la boîte pour que la quantité de métal nécessaire à sa fabrication soit minimale et trouver la quantité de métal utilisée.

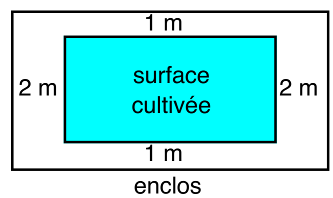
19. Un fermier désire clôturer une superficie rectangulaire de 8 000 m^2 bordant une autoroute. La clôture le long de l'autoroute coûte 3 $ par mètre et celle des autres côtes 2 $ par mètre. Trouver le coût minimal pour effectuer ces travaux.



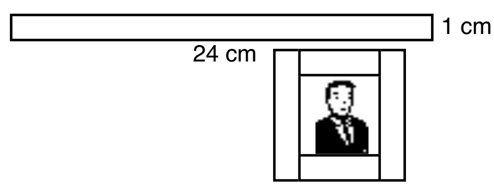
20. Une boîte rectangulaire avec dessus possède une base carrée. Le coût du matériau pour la base est de 0,25 $ le dm^2; pour le dessus, il est de 0,20 $ le dm^2; pour les côtés, il est de 0,30 $ le dm^2. Si le volume de la boîte est de 6000 dm^3, calculer ses dimensions pour que le coût soit minimal.

21. Un graphiste doit concevoir une affiche rectangulaire en respectant les contraintes suivantes: la surface imprimée doit avoir une superficie de 900 cm^2, les marges latérales doivent être de 2 cm chacune, et les marges supérieure et inférieure de 4 cm chacune. Quelles sont les dimensions de la page ayant un périmètre minimal?

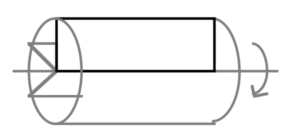
22. À l'intérieur d'un champ, on se propose de réserver à la culture maraîchère un enclos comprenant une surface cultivée de forme rectangulaire d'une superficie de 144 m^2, bordée sur les deux côtés opposés par un chemin de 2 m de largeur et sur les deux autres par un chemin de 1 m de largeur. On demande les dimensions que l'on doit donner à l'enclos pour que son périmètre soit minimal.



23. Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une planche de 24 cm de long et 1 cm de large Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale?



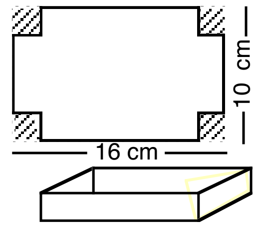
24. Un rectangle dont le périmètre est 12 cm tourne autour d'un de ses côtés et forme ainsi un cylindre. Quelles doivent être les dimensions du rectangle pour que le volume du cylindre soit maximal?



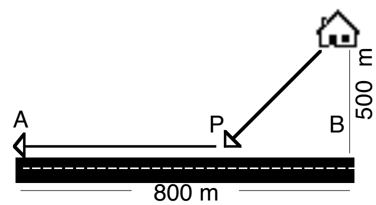
25. Un cylindre droit a ses bases faites d'un certain matériau dont le coût est 4 $/$m^2$ et sa surface latérale est faite d'un autre matériau dont le coût est de 1 $/$m^2$, Si la capacité du cylindre est de π m^3, trouver le rayon et la hauteur du cylindre produisant un coût minimal.

26. La paroi latérale ainsi que le dessus d'un contenant cylindrique est fait d'acier inoxydable tandis que sa base est faite d'acier trempé. Si l'acier trempé coûte 3 fois plus cher que l'acier inoxydable, quelles sont les dimensions du contenant le plus économique ayant un volume de $13{,}5\ \pi\ \text{cm}^3$.

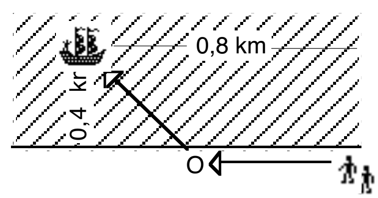
27. Une compagnie fabrique des boîtes avec des pièces de carton de 16 cm par 10 cm (en coupant des carrés à chaque coin et en relevant les cotés) quelles sont les dimensions de la boîte de volume maximal pouvant être ainsi obtenue? Calculer ce volume maximal.



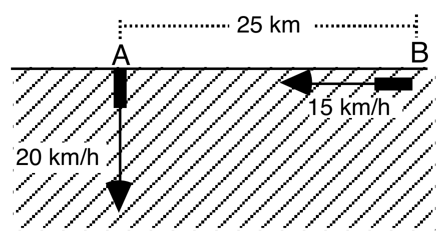
28. Un fermier construit sa maison à 500 m d'une route. La conduite d'égout la plus proche est au point A de cette route, à 800 m du point B, comme le montre la figure de droite. Le coût de raccordement à cette conduite d'égout est de 10 $ par mètre à partir de la maison jusqu'au point P quelconque sur la route et de 6 $ par mètre du point P au point A, le long de la route. À quelle distance du point B sur la route, doit-on faire le raccordement à la conduite d'égout pour que le coût soit minimal?



29. Deux plongeurs désirent atteindre une épave qui se trouve à 0,4 km de la rive et à 0,8 km de leur position actuelle. Ils marchent en portant leur équipement à 5 km/h et nagent à 3 km/h. Déterminer la distance qu'ils devront parcourir à pied pour atteindre l'épave en un temps minimal.

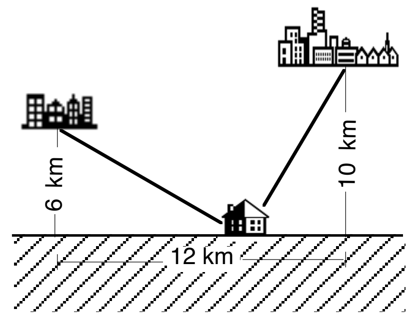


30. Deux bateaux quittent leur port respectif à midi. Le bateau A navigue vers le sud à la vitesse de 20 km/h tandis que le bateau B navigue vers l'ouest à la vitesse de 15 km/h. Si les deux ports sont distants de 25 kilomètres, à quelle heure, les deux bateaux seront-ils le plus près l'un de l'autre ?



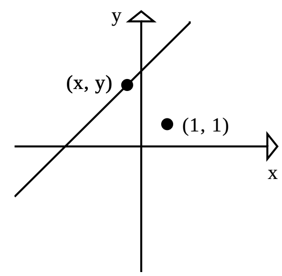
31. Trouver parmi les triangles rectangles dont l'hypoténuse égale 1, les dimensions de celui qui a une aire maximale.

32. Deux villes sont situées respectivement à une distance de 6 km et 10 km de la rive d'une rivière. Le schéma de droite indique les points de la rive qui sont le plus près de chaque ville ainsi que la distance qui les sépare, soit 12 km. On doit construire une station de pompage sur la rive et relier à cette station les deux villes par une conduite d'eau. Déterminer la longueur minimale de cette conduite d'eau.



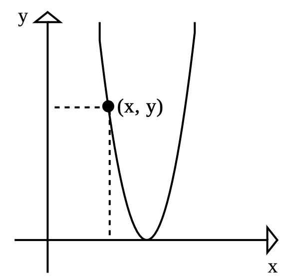
33. Quel est sur la droite $y = x + 3$, le point le plus près de $(1, 1)$?

la distance entre les points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) est donnée par
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

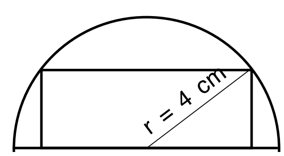


34. Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire entre l'axe des x, l'axe des y et la courbe dont l'équation est

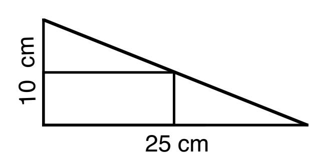
$$y = (x - 9)^2.$$



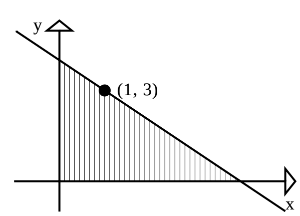
35. Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire à l'intérieur d'un demi-cercle de rayon 4 cm.



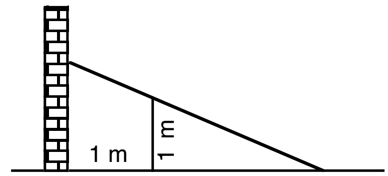
36. Quelles sont les dimensions du rectangle d'aire maximale pouvant être inscrit dans un triangle rectangle de côtés 10 cm par 25 cm?



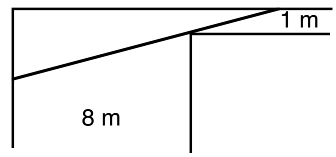
37. Une droite passant par le point $(1, 3)$ coupe la partie positive de l'axe des x ainsi que la partie positive de l'axe des y formant ainsi un triangle rectangle. Trouver l'aire minimale du triangle pouvant être ainsi obtenu?



38. Une échelle doit atteindre un mur situé à 1 mètre au-delà d'une clôture de 1 mètre de haut. Quelle est la longueur de la plus petite échelle que l'on puisse utiliser?



39. Trouver la longueur maximale d'une tige métallique droite qu'on peut faire glisser sur le plancher d'un corridor qui tourne à angle droit et dont la largeur tombe de 8 mètres à 1 mètre .

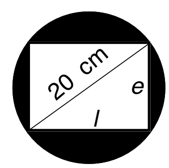


40. Le coût d'exploitation d'un camion est de

$$C = 8 + \frac{x}{5} \text{ cents / km}$$

lorsque le camion roule à la vitesse de x km/heure. Le chauffeur du camion est rémunéré au taux de 20 $/h. Quelle est la vitesse la plus économique d'un voyage de 600 km?

41. La rigidité R d'une poutre de bois rectangulaire est proportionnelle à sa largeur l et au cube de son épaisseur e, c'est à dire $R = kle^3$ où k est une constante positive. Trouver les dimensions de la poutre la plus rigide qu'on peut tirer d'un tronc circulaire de 20 cm de diamètre.



Réponses aux exercices 4.4

1. 15/2, 15/2
2. -1/2
3. 2; 8
4. le dénominateur est -5 et le numérateur est -50
5. -12,5; 12,5
6. -2, -2 ou 2, 2
7. 16 m $\times$ 16 m
8. $2\sqrt{5}$ m $\times$ $2\sqrt{5}$ m; $8\sqrt{5}$ m
9. 25 m $\times$ 50 m (le 50 m est dans le sens de la rivière)
10. 10 m $\times$ 15 m (la clôture qui sépare les deux lots est parallèle au côté de 10 m)
11. a) 9 b) 33 620 $
12. a) 2,40 $ b) 600
13. 1 445 $
14. 77 ou 78
15. 4 $ le disque, 80 $ par jour
16. 525 $ par mois
17. 7 cm $\times$ 7 cm $\times$ 7 cm (le volume sera maximal dans le cas d'un cube)
18. 4 m $\times$ 4 m $\times$ 2 m, 48 m^2
19. 800 $
20. 20 dm $\times$ 20 dm $\times$ 15 dm
21. 34 cm $\times$ 38 cm
22. 14 m $\times$ 16 m
23. 2 morceaux de 5 cm et 2 morceaux de 7 cm
24. 4 cm $\times$ 2 cm (le côté de 2 cm constitue l'axe de rotation)
25. rayon: 0,5 m; hauteur: 4 m
26. rayon: 1,5 cm; hauteur: 6 cm
27. 12 cm $\times$ 6 cm $\times$ 2 cm
28. 375 m de B
29. 0,5 km
30. à 12h36
31. $\sqrt{2}/2 \times \sqrt{2}/2$
32. 20 km
33. (-1/2; 5/2)

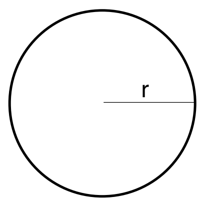
34. 3×36
35. $4\sqrt{2}$ cm $\times$ $2\sqrt{2}$ cm
36. 5 cm $\times$ 12,5 cm
37. 6
38. $2\sqrt{2}$ m
39. $5\sqrt{5}$ m
40. 100 km/h
41. $l = 10$ cm et $e = 10\sqrt{3}$ cm

4.5 Taux liés

La dérivée est souvent utilisée pour calculer le taux de variation d'une variable reliée à une autre dont le taux de variation est connu. On parlera dans ce cas de *taux liés*.

exemple 4.5.1

On lance un caillou dans un lac. Le caillou produit des ondes circulaires à partir de son point de chute. Le rayon du cercle ainsi formé s'accroît de 3 cm/s. Calculer le taux d'accroissement de l'aire du cercle par rapport au temps quand le rayon mesure 10 cm.



- Désignons par

  r: le rayon du cercle après t secondes,
  A: l'aire du cercle après t secondes,

- On cherche $\frac{dA}{dt}$ quand $r = 10$ cm.

- On sait que $\frac{dr}{dt} = 3$ cm/s .

- L'aire est reliée au rayon par la relation: $\boxed{A = \pi r^2}$.

- A et r sont deux fonctions de t, dérivons par rapport à t chaque membre de l'équation.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt} .$$

puisque $\frac{dr}{dt} = 3$ cm/s

- $$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r = 10} = 2\pi(10).\,(3)$$
  $$= 60\pi \text{ cm}^2/\text{s} .$$

L'aire augmente donc à raison de 60π cm^2/s ou 188,50 cm^2/s.

marche à suivre pour résoudre les problè-mes de taux liés

- Représenter graphiquement le problème lorsque c'est possible et définir les variables nécessaires à sa solution.
- Indiquer le taux de variation cherché.
- Indiquer le taux de variation connu.
- Trouver une relation entre les variables.
- Dériver implicitement par rapport au temps.
- Calculer la quantité cherchée à l'aide des données du problème.

exemple 4.5.2

La demande y des consommateurs pour un certain produit dépend de son prix p (en dollars) et est donnée par

$$y = \frac{4000}{p^2} .$$

Si la demande y décroît graduellement de 100 unités par mois, trouver le taux de croissance du prix par rapport au temps lorsque le produit se vendra 2 $.

Aucune représentation possible

- *Les variables sont:*

y: la demande du produit après t mois,
p: le prix du produit après t mois,

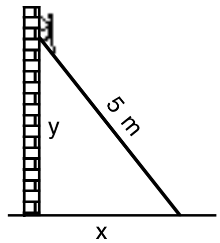
si la demande décroît de 100 unités/mois alors

$\frac{dy}{dt}$ = *-100 unités/mois*

rép: le prix augmente au taux de 0,10 $/mois.

exemple 4.5.3

Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Un homme se tient en haut de l'échelle et soudainement, le bas de l'échelle se met à glisser à raison de 5 cm/s. À quelle vitesse descend cet homme lorsque la base est à 3 m du mur?



• *Désignons par*

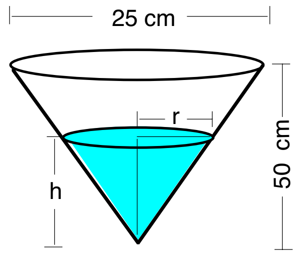
x: la distance entre le pied de l'échelle et le mur après t secondes,
y: la distance entre le haut de l'échelle et le sol après t secondes,

attention! les variables doivent être exprimées à l'aide des mêmes unités.

rép: -3,75 cm/s

exemple 4.5.4

On verse de l'eau dans un réservoir en forme de cône renversé. Le réservoir mesure 50 cm de hauteur et 25 cm de diamètre au sommet. Si l'eau est versé à raison de 5 cm^3 par minute, à quelle vitesse augmente le niveau de l'eau lorsque l'eau atteint 10 cm?



- Désignons par

  r: le rayon de la surface du liquide après t minutes,
  h: la hauteur du liquide après t minutes,
  V: le volume du liquide après t minutes.

- On cherche $\dfrac{dh}{dt}$ quand $h = 10$ cm.

- On sait que $\dfrac{dV}{dt} = 5$ cm^3/min .

- Le volume V est relié à la hauteur h par la relation $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

  D'après la forme du cône et des rapports dans les triangles semblables, on peut écrire

le volume est exprimé à l'aide de deux variables, on peut l'exprimer en utilisant la seule variable h,

$$\frac{r}{h} = \frac{12{,}5}{50} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h}{4}$$

par conséquent, $V = \dfrac{\pi (h/4)^2 h}{3}$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{V = \frac{\pi h^3}{48}}$$

- V et h sont deux fonctions de t, dérivons par rapport à t chaque membre de l'équation.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{16} \cdot \frac{dh}{dt}$$

- $$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=10} = \left.\frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{\pi h^2}{16}}\right|_{h=10}$$

$$= \frac{5}{\frac{\pi (10)^2}{16}} = \frac{80}{100\pi} = 0{,}255 \text{ cm/min.}$$

car $\dfrac{dV}{dt} = 5$ cm^3/min

La hauteur du liquide augmente de 0,255 cm/min. L'eau monte donc dans le cône à la vitesse de 0,255 cm/min.

Exercices 4.5

1. Un point se déplace le long d'une courbe d'équation $y = x^2$ de telle façon que son abscisse x augmente à la vitesse de 4 unités à la seconde. Calculer la vitesse de y lorsque $x = 3$.

2. Le taux de croissance des arêtes d'un cube est de 2 cm/min. Calculer le taux de croissance du volume du cube par rapport au temps lorsque la longueur d'une arête est de 12 cm.

3. L'administration d'un hôpital estime qu'environ

$$N = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{4000} \text{ personnes}$$

seront traitées chaque mois au service des urgences si la population desservie par cet hôpital est de x habitants. Sachant que la population croît au taux de 120 habitants par mois, quel sera le taux de croissance par rapport au temps du nombre de personnes traitées au service des urgences de l'hôpital lorsque la population passera à 125 000 habitants.

4. Un pompiste réalise un revenu quotidien de

$$R = \left(0{,}49 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)x \text{ dollars}$$

où x représente le nombre de litres d'essence vendu par jour. Calculer le taux de variation du revenu du pompiste par rapport au temps lorsque la quantité d'essence vendue est de 2500 litres et que cette quantité

a) augmente de 75 litres/jour,
b) diminue de 50 litres/jour.

5. Une assiette de métal circulaire est chauffée dans un four. Son rayon augmente au taux de 0,01 cm/min. À quel taux augmente l'aire de l'assiette lorsque son rayon est de 50 cm?

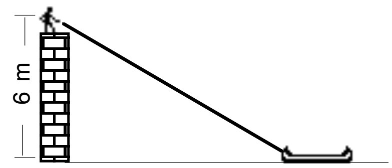
6. Un liquide s'écoule d'un réservoir cylindrique de 2 mètres de rayon à la vitesse de 5 m^3/min, calculer la vitesse à laquelle le niveau du liquide baisse.

7. Un ballon perd de l'air au rythme de 10 cm^3/s. Calculer le taux de variation du rayon du ballon par rapport au temps lorsque celui-ci est de 10 cm.

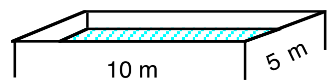
(Le volume d'une sphère de rayon r est $V = \frac{4}{3}\pi r^3$)

8. On appuie une échelle de 10 m contre un mur. Si le pied de l'échelle glisse et s'éloigne du mur à la vitesse de 2 m/s, à quelle vitesse le sommet de l'échelle descend-il le long du mur lorsqu'il est à 6 m au-dessus du sol?

9. Un homme se tient debout à l'extrémité d'un embarcadère à 6 m au-dessus du niveau de l'eau. Il ramène un câble attaché à une barque. La longueur du câble décroît au rythme de 1 m/s. À quelle vitesse, la barque se déplace-t-elle sur l'eau lorsqu'elle se trouve à 8 m de l'embarca-dère?



10. On verse de l'eau dans une piscine à un rythme de 1 m^3/h. La largeur de cette piscine est de 5 m et sa longueur de 10 m. Calculer la vitesse de montée du niveau de l'eau.

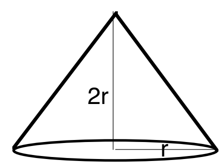


11. La marée fait pénétrer l'eau de mer dans une crique étroite à la vitesse de 7200 m^3/min. La crique couvre 1,5 km^2. Calculer la vitesse de montée du niveau de l'eau.

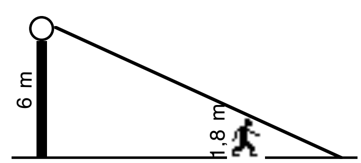
(attention aux unités!)

12. On verse du blé en un tas conique dont la hauteur est toujours le double du rayon de la base. Le rythme de tombée du blé est de 5 m^3/min. Calculer le taux de croissance du rayon de la base par rapport au temps lorsque la hauteur du tas de blé est de 10 m.

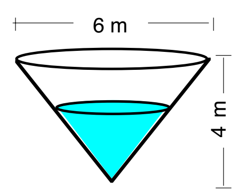
(Le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h est $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$)



13. Un homme de taille 1,8 m s'éloigne d'un lampadaire de 6 m de hauteur en marchant à une vitesse de 0,5 m/s. Calculer la vitesse de croissance de l'ombre de cet homme.

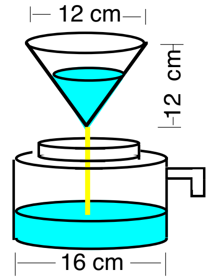


14. On verse de l'eau à un rythme de 2 m^3/min dans un réservoir conique de hauteur 4 m et de rayon 3 m. Calculer la vitesse de montée de l'eau dans le réservoir lorsque la hauteur du liquide est de 2 m.



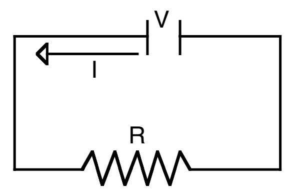
15. Du café s'égoutte dans une cafetière à partir d'un filtre conique. Au moment où la hauteur du liquide dans le cône est de 8 cm cette hauteur baisse à la vitesse de 0,75 cm/min. À ce même moment, à quelle vitesse monte le café dans la cafetière?

(On considère qu'il n'y a pas de perte de liquide du haut vers le bas c'est-à-dire que la somme des liquides dans le filtre et dans la cafetière reste toujours constante.)



16. Dans un circuit électrique comme celui de la figure de droite, on sait que V = IR, où V représente un voltage (en volts), I représente l'intensité du courant (en ampères) et R représente une résistance (en ohms). V augmente au taux de 1 volt/sec tandis que I décroît au taux de 0,3 ampères/sec. Si t représente un temps en secondes.

a) trouver une équation reliant dR/dt, dV/dt et dI/dt,
b) trouver dR/dt lorsque V = 12 volts et I = 2 ampères; est-ce que R augmente ou diminue ?

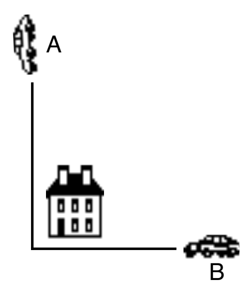


17. La longueur l d'un rectangle décroît au taux de 2 cm/sec tandis que sa largeur L croît au taux de 2 cm/sec. Lorsque l = 12 cm et L = 5 cm, trouver le taux de variation

a) de l'aire du rectangle,
b) du périmètre du rectangle,
c) de la diagonale du rectangle,

Parmi ces quantités, indiquer celles qui augmentent et celles qui diminuent?

18. Deux voitures de patrouille de la police municipale viennent de recevoir un appel pour se rendre sur la scène d'un vol qui vient de se produire à la Banque municipale. La voiture A circule direction sud à une vitesse de 72 km/h (20 m/s) tandis que la voiture B circule direction ouest à une vitesse de 90 km/h (25 m/s). Calculer à quelle vitesse les deux voitures se rapprochent l'une de l'autre lorsque la voiture A est à 150 m de l'intersection et la voiture B à 100 m?



19. La relation $PV^{1,4} = k$, où k est une constante lie le volume et la pression d'un gaz comprimé de façon adiabatique (sans gain ni perte de chaleur). À un instant donné un gaz a un volume de 56 litres et une pression de 36 kPa qui augmente à la vitesse de 0,3 kPa/min. Calculer le taux de variation du volume.

20. La résistance électrique R équivalent de deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle est telle que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

R_1 et R_2 augmentent respectivement à la vitesse de 1 et 1,5 ohm/s. Calculer la vitesse d'accroissement de R lorsque $R_1 = 50$ ohms et $R_2 = 75$ ohms.

Réponses aux exercices 4.5

1. 24 unités/s
2. 864 cm^3/min
3. 2 personnes/mois
4. a) 38,25$ / jour b) -25,50 $ / jour
5. 3,14 cm^2/min
6. -39,79 cm/min
7. -0,008 cm/s
8. -2,67 m/s
9. -1,25 m/s
10. 2 cm/h
11. 0,48 cm/min
12. 3,2 cm/min
13. 21,4 cm/sec
14. 28,3 cm/min
15. 0,19 cm/min
16. a) $\frac{dV}{dt} = R\frac{dI}{dt} + I\frac{dR}{dt}$ b) 1,4 ohms/s ;augmente
17. a) 14 cm^2/s b) 0 cm/s c) -1,08 cm/s
    l'aire augmente, la diagonale diminue tandis que le périmètre demeure constant.
18. 30,51 m/s
19. -0,33 litre/min
20. 0,6 ohms/s

Exercices de révision

1. La fonction

$$N(t) = \frac{500\,000\ t}{(4 + t)^3}$$

représente le nombre de gens malades t semaines après l'apparition d'un virus de la grippe. Calculer le nombre maximal d'individus qui seront contaminés par le virus.

2. La position d'un objet en mouvement rectiligne, par rapport à son point de départ est en tout temps t (en secondes) de $s = t^3 - 12t^2 + 36t$ mètres $(0 \le t \le 10)$. Déterminer pour quelles valeurs de t, l'objet

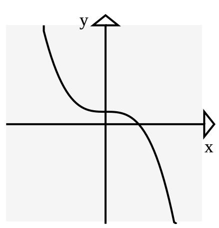
a) revient vers son point de départ,
b) s'éloigne de son point de départ,
c) accélère,
d) décélère.

3. Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. Trouver s'il y a lieu,

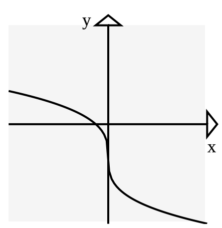
a) les extremums relatifs de la fonction,
b) les points d'inflexion du graphique de la fonction.

4. Trouver les extremums absolus de la fonction $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ sur $[-1, 1]$.

5. Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dont les graphiques sont représentés ci-dessous.



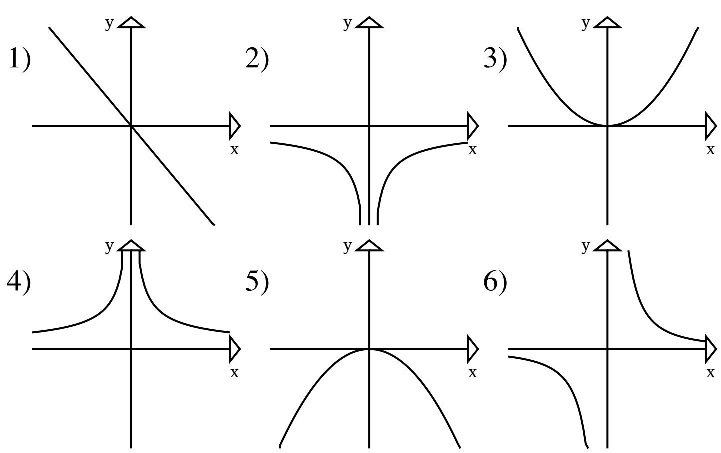
$f(x)$



$g(x)$

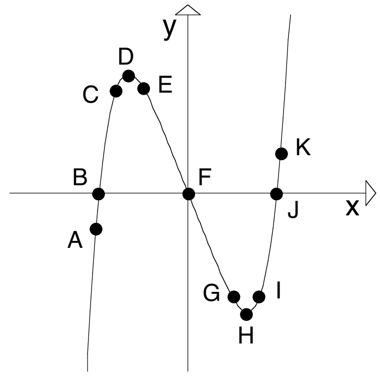
Identifier parmi les 6 graphiques de droite celui qui est associé à

a) $f'(x)$,
b) $f''(x)$,
c) $g'(x)$,
d) $g''(x)$,



6. Quel point de la courbe possède les propriétés suivantes:

   a) $y > 0$; $y' > 0$; $y'' < 0$?
   b) $y > 0$; $y' < 0$; $y'' < 0$?
   c) $y < 0$; $y' > 0$; $y'' > 0$?
   d) $y < 0$; $y' = 0$; $y'' > 0$?
   e) $y = 0$; $y' > 0$; $y'' < 0$?



7. Soit la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + 18x - 13$. Trouver a et b si la fonction possède un extremum relatif en $x = 1$ et un point d'inflexion en $x = -1$.

8. Pour chacune des fonctions f,

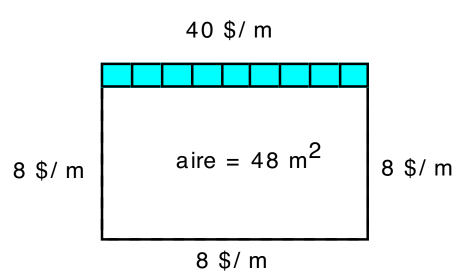
   - trouver son domaine,
   - étudier la continuité ,
   - déterminer si f est paire, impaire ou ni paire, ni impaire,
   - déterminer les asymptotes,
   - trouver $f'(x)$ et les nombres critiques et $f''(x)$ et les nombres de transition,
   - construire le tableau de variation de f en indiquant clairement s'il y a lieu, les intervalles de croissance et de décroissance, les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas, les extremums relatifs et les points d'inflexion,
   - tracer le graphique.

   a) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{4(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{-8x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$

   b) $f(x) = \dfrac{1 + 2x - 2x^2 - x^3}{(x + 1)^2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{- x(x^2 + 3x + 6)}{(x + 1)^3}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{6(x - 1)}{(x + 1)^4}$

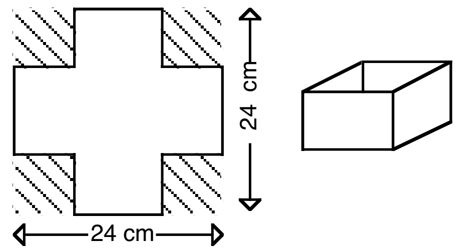
9. Une station service vend 4800 litres d'essence par semaine lorsque le prix est de 50 ¢ le litre. Par expérience, le gérant sait que chaque augmentation de 1 ¢ entraîne une diminution des ventes de 80 litres par semaine. À quel prix le litre doit-il vendre son essence pour maximiser les revenus?

10. Le gérant d'une quincaillerie veut construire un enclos rectangulaire de 48 m^2 dans le stationnement de la quincaillerie pour étaler différents types d'équipement. Trois des côtés de l'enclos seront construits en cèdre rouge au coût de 8 $ le mètre. Le quatrième côté sera construit de blocs de ciment au coût de 40 $ le mètre. Le gérant veut déterminer les dimensions de l'enclos qui minimiseront les frais de matériaux de construction.



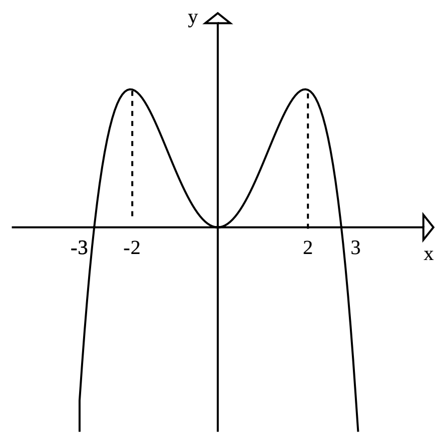
11. On doit construire une boîte fermée dont le fond est un rectangle trois fois plus long que large. La surface totale des côtés, du dessus et du dessous doit être de 72 cm^2. Déterminer les dimensions de cette boîte pour que son volume soit maximal.

12. À l'aide d'une pièce de carton de 24 cm de côté, on fabrique une boîte sans couvercle en coupant à chaque coin un même carré et en redressant les côtés. Quelles sont les dimensions de la boîte de volume maximal pouvant être ainsi obtenu? Calculer ce volume maximal.



13. Le graphique de droite représente <u>la dérivée de la fonction $f(x)$</u>. Trouver pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction $f(x)$

    a) est croissante,
    b) est décroissante,
    c) possède un maximum relatif,
    d) possède un minimum relatif,
    e) est concave vers le haut,
    f) est concave vers le bas,
    g) possède un point d'inflexion.



graphique de $\frac{d}{dx} f(x)$

14. Un cinéma a établi que le profit p réalisé une certaine journée est donné par

$$p = \frac{x(\sqrt{x} - 3)}{3} \quad \text{dollars}$$

où x représente le nombre d'entrées cette journée. Quel est présentement le taux de variation du profit du cinéma par rapport au temps si sa clientèle est de 100 personnes et qu'elle diminue de 4 personnes par jour?

15. Une boule de neige fond à raison de 2 cm^3/heure. À quelle vitesse son rayon diminue-t-il lorsque celui-ci mesure 3 cm?

(Le volume d'une sphère de rayon r est $V = \frac{4}{3}\pi r^3$)

Réponses aux exercices de révision

1. 4630 personnes

2. a) sur $]2, 6[$ l'objet se rapproche de son point de départ,
   b) sur $]0, 2[\cup]6, 10[$ l'objet s'éloigne de son point de départ,
   c) sur $]2, 4[\cup]6, 10[$ l'objet accélère,
   d) sur $]0, 2[\cup]4, 6[$ l'objet décélère.

3. a) max. rel. au point: $(1, 2)$ min. rel. au point: $(3, -2)$
   b) PI: $(2, 0)$

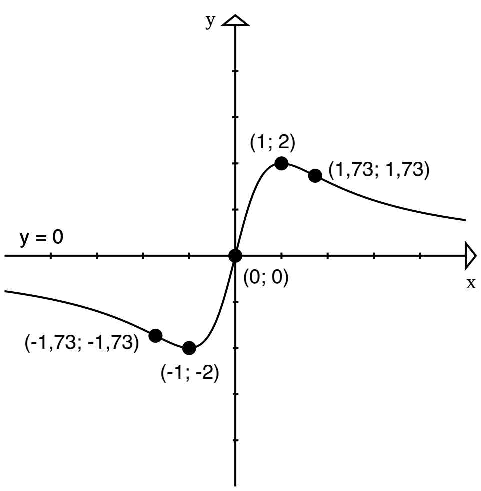
4. a) max. abs. au point: $(0, 0)$ min. abs. au point: $(-1, -5)$

5. a) 5 b) 1 c) 2 d) 6

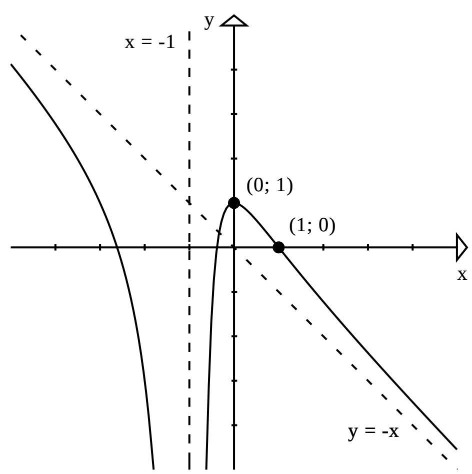
6. a) C b) E c) I d) H e) B

7. $a = -2$ et $b = -6$

8. a)



b)



9. 55 ¢ le litre

10. 12 m$\times$ 4 m (le côté en blocs de ciment aura 4 m)

11. 2 cm$\times$ 6 cm$\times$ 3 cm

12. 4 cm$\times$ 16 cm$\times$ 16 cm; 1024 cm^3

13. a)]-3, 3[
    b)]-∞, -3[∪]3, ∞[
    c) x = 3
    d) x = -3
    e)]-∞, -2[∪]0, 2[
    f)]-2, 0[∪]2, ∞[
    g) x = -2, x = 0, x = 2

14. -16 $/jour

15. -0,018 cm/h