L'intégrale définie

3

Nous verrons dans ce chapitre qu'il existe une relation étonnante entre la notion de primitive et la notion de somme. Cette relation permettra de résoudre rapidement certaines sommes provenant aussi bien des mathématiques que de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'économie, de la psychologie, de la sociologie, etc...

3.1 La notation sigma

On aura souvent à traiter de sommes à plusieurs termes. Il convient d'adopter une notation appropriée pour les traiter. La notation "sigma" sera celle utilisée. Elle tire son nom de la lettre grecque Σ l'équivalent de notre lettre S, la première lettre du mot somme.

Une façon d'abréger l'écriture

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

lire "la somme des termes de la forme i où i varie de 1 jusqu'à 10"

est d'écrire $$\sum_{i=1}^{10} i$$

symbole correspondant à la somme des dix premiers entiers positifs c'est-à-dire à 55.

Ainsi,
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{7} i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 \\ &= 140 \end{aligned}$$

La variable i est une variable fictive (indice de sommation). On peut utiliser une autre lettre sans changer la valeur de la somme. Les bornes de cette variable fictive sont des valeurs quelconques entières. La borne inférieure est toujours plus petite que la borne supérieure.

Par exemple

$$\begin{aligned} \sum_{j=-2}^{1} 3j + 2 &= (3(-2) + 2) + (3(-1) + 2) + (3(0) + 2) + (3(1) + 2) \\ &= (-4) + (-1) + 2 + 5 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ ... + (n+1)^3$$
$$= 1 + 8 + 27 + 64 + \ ... + (n+1)^3 \qquad (n \geq 0)$$

D'une façon générale,

notation sigma

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ ... \ + a_{n-1} + a_n$$

où m et n sont des entiers tels que $m \leq n$ et a_i est un nombre réel.

exemple 3.1.1

Si $a_1 = -4$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 7$, $a_4 = -7/2$, $a_5 = 1$ alors calculer $\sum_{k=1}^{5} a_k$.

solution

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (-4) + 1/2 + 7 + (-7/2) + 1 = 1$$

exemple 3.1.2

Écrire à l'aide de la notation sigma.

$$f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + f(x_3)\Delta x_3 + f(x_4)\Delta x_4 + \ ... \ + f(x_n)\Delta x_n$$

exemple 3.1.3

Évaluer $\displaystyle\sum_{j=2}^{100} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j-1}\right)$.

rép: - 0,99

propriétés de la sommation

m et n sont des entiers tels que n ≥ m

1) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$ où c est une constante,

2) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} \left(a_i \pm b_i\right) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$,

démonstration

1) $$\sum_{i=m}^{n} ca_i = ca_m + ca_{m+1} + ca_{m+2} + ca_{m+3} + ca_{m+4} + \ldots\, ca_{n-1} + ca_n$$
$$= c\,(a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + a_{m+4} + \ \ldots\, a_{n-1} + a_n)$$
$$= c\sum_{i=m}^{n} a_i \ ,$$

2) $$\sum_{i=m}^{n} \left(a_i + b_i\right) =$$

$\displaystyle\sum_{i=m}^{n} \left(a_i - b_i\right) = \sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} b_i$ se démontre de la même façon.

exemple 3.1.4

Si $\sum_{k=1}^{28} a_k = 19$ et $\sum_{k=1}^{28} b_k = 8$ alors trouver $\sum_{k=1}^{28} 2a_k + 3b_k$.

solution

$$\sum_{k=1}^{28} 2a_k + 3b_k = \sum_{k=1}^{28} 2a_k + \sum_{k=1}^{28} 3b_k \qquad \text{(par la propriété 2)}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{28} a_k + 3\sum_{k=1}^{28} b_k \qquad \text{(par la propriété 1)}$$

$$= 2(19) + 3(8) \qquad \text{(par hypothèse)}$$

$$= 62$$

formules utiles

noter que la borne inférieure de la variable fictive i est 1 pour les 3 formules

1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ pour toute valeur de $n \geq 1$ (c est une constante),

2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ pour toute valeur de $n \geq 1$,

3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour toute valeur de $n \geq 1$.

démonstration

1) $\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + c + c + \ldots + c$ (n fois)

$= nc$

preuve par induction

2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ pour toute valeur de $n \geq 1$

a) Vérifions que la proposition est vraie pour $n = 1$.

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$$

$1 = 1$ (vraie pour $n = 1$)

b) Démontrons que la proposition est vraie pour $n = k + 1$ lorsqu'elle est vraie pour $n = k$.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k + 1)$$

puisque par hypothèse , la proposition est vraie pour $n = k$

alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$

$$= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1)$$

$$= \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2}$$

$$= \frac{(k + 2)(k + 1)}{2}$$

$$= \frac{\big((k+ 1) + 1\big)(k + 1)}{2}$$

La proposition est toujours vraie pour $n = k + 1$ lorsqu'elle est vraie pour $n = k$.

On conclut qu'elle est vraie pour toute valeur de $n \geq 1$.

3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ pour toute valeur de $n \geq 1$

Prouver cette proposition par induction.

exemple 3.1.5

Évaluer $\sum_{j=1}^{17} 9$.

solution

$$\sum_{j=1}^{17} 9 = 17(9) \qquad \text{(par la formule 1)}$$

exemple 3.1.6

Évaluer $\sum_{i=1}^{10} 5 - 3i$.

solution

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} 5 - 3i &= \sum_{i=1}^{10} 5 - \sum_{i=1}^{10} 3i && \text{(par la propriété 2)} \\
&= \sum_{i=1}^{10} 5 - 3\sum_{i=1}^{10} i && \text{(par la propriété 1)} \\
&= 10(5) - 3\left(\frac{10(11)}{2}\right) && \text{(par les formules 1 et 2)} \\
&= 50 - 165 \\
&= -115
\end{aligned}$$

exemple 3.1.7

Évaluer $\sum_{i=1}^{n} (2i + 1)$.

rép: $n(n + 2)$

exemple 3.1.8

Évaluer $\sum_{i=1}^{n} 6(1 + i)^2$.

rép: $n(2n^2 + 9n + 13)$

exemple 3.1.9

Évaluer dans $\overline{\mathbf{R}}$ $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} \right)$.

rép: 1/2

Exercices 3.1

1. Évaluer chacune des sommes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k}$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{5} 2^i$

c) $\displaystyle\sum_{j=-5}^{6} j^3$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} (-1)^k$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$

2. Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{18} a_k = 37$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{18} b_k = -83$ alors trouver $\displaystyle\sum_{k=1}^{18} b_k - 3a_k$

3. Évaluer chacune des sommes.

utiliser les propriétés de la sommation (page 3-3) ainsi que les formules de la page 3-4

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{75} (2i - 1)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} (5 - 3k^2)$

4. Calculer chacune des sommes.

utiliser les propriétés de la sommation (page 3-3) ainsi que les formules de la page 3-4

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (3 + 2i)$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (j^2 - 2j + 1)$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\,(3i - 2)$

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (2j - 1)^2$

5. Évaluer chacune des limites dans $\overline{\mathbf{R}}$.

utiliser les propriétés de la sommation (page 3-3) ainsi que les formules de la page 3-4

a) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \left(\frac{2}{n}\right)$

Réponses 3.1

1.	a)	25/12	d)	0
	b)	63	e)	10
	c)	216		
2.		-194		
3.	a)	5625	b)	-8510
4.	a)	$n(4 + n)$	c)	$\dfrac{n(2n - 1)(n + 1)}{2}$
	b)	$\dfrac{n(2n - 1)(n - 1)}{6}$	d)	$\dfrac{n(2n - 1)(2n + 1)}{3}$
5)	a)	1/3	b)	8/3

3.2 Somme intégrale et intégrale définie

Examinons trois problèmes de nature différente que l'on tentera de résoudre en utilisant dans chacun des cas une approche similaire.

Problème 3.2.1:
évaluation d'une aire

Calculer l'aire de la région délimitée par la courbe $y = x^2$, l'axe des x et la droite verticale $x = 3$.

solution

Le problème présente une difficulté de taille. La région en question (figure 3.2.1) possède une forme irrégulière. Les règles de la géométrie élémentaire ne sont d'aucune utilité.

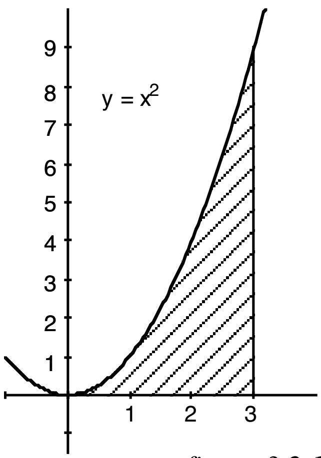
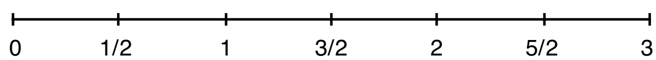


figure 3.2.1

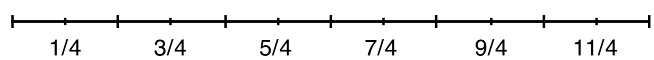
Nous pouvons néanmoins obtenir une approximation de cette aire en décomposant la région en six rectangles.

Pour cela,

- on subdivise l'intervalle [0,3] en six sous-intervalles de longueur 1/2,



- dans le but d'approximer l'aire de la région hachurée, on considère le point milieu de chaque sous-intervalle,



  puis, on construit six rectangles ayant pour base, la longueur des sous-intervalles et pour hauteur, l'image du point milieu des sous-intervalles (voir la figure 3.2.2),

- on calcule l'aire de chacun des rectangles puis, on additionne ces aires,

  on obtient

  $(1/4)^2 \times 1/2 + (3/4)^2 \times 1/2 + (5/4)^2 \times 1/2 + (7/4)^2 \times 1/2 + (9/4)^2 \times 1/2 + (11/4)^2 \times 1/2$

  $= 1/32 + 9/32 + 25/32 + 49/32 + 81/32 + 121/32$

  $= 286/32$ ou 8,937.

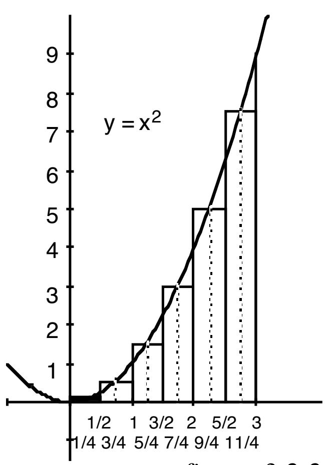


figure 3.2.2

Nous n'avons pas résolu le problème mais, nous savons que l'aire est approximativement de 8,937.

Problème 3.2.2:
évaluation d'une distance

La vitesse d'un escargot est de $v = (2t + 1)$ mm/s. Évaluer la distance parcourue par l'escargot entre $t = 0$ s et $t = 4$ s.

---

solution

Nous savons que la distance parcourue par un objet est fonction de sa vitesse. Les deux quantités sont reliées par l'équation

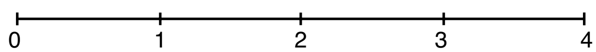
$$\text{distance} = \text{vitesse} \times \text{temps} .$$

Si la vitesse de l'escargot avait été constante sur l'intervalle de temps considéré, le problème aurait été très simple à calculer. La vitesse étant variable il est beaucoup plus difficile de le résoudre. Contentons-nous d'approximer la distance parcourue par l'escargot.

Comme au problème précédent,

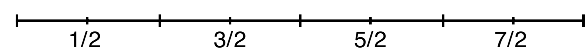
le nombre de sous-intervalles considérés est arbitraire et ceux-ci pourraient ne pas être égaux

- on subdivise l'intervalle [0,4] en quatre sous-intervalles de 1 s,



la valeur choisie dans chaque sous-intervalle est aussi arbitraire, son choix est souvent fonction de la simplicité des calculs

- la vitesse de l'escargot dans chaque sous-intervalle est variable, on approxime cette vitesse en utilisant le point milieu du sous-intervalle,



$v(1/2) = 2(1/2) + 1 = 2$ mm/s dans le premier sous-intervalle,
$v(3/2) = 2(3/2) + 1 = 4$ mm/s dans le second sous-intervalle,
$v(5/2) = 2(5/2) + 1 = 6$ mm/s dans le troisième sous-intervalle,
$v(7/2) = 2(7/2) + 1 = 8$ mm/s dans le quatrième sous-intervalle,

- on calcule la distance approximative parcourue par l'escargot dans chacun des sous-intervalles puis, on additionne les distances,

  on obtient

distance = vitesse . temps

$$(2(1/2) + 1) \times (1) + (2(3/2) + 1) \times (1) + (2(5/2) + 1) \times (1) + (2(7/2) + 1) \times (1)$$

$$= 2 + 4 + 6 + 8$$

$$= 20 \text{ mm}.$$

Encore ici, bien que le problème n'ait pas été résolu, nous savons que la distance approximative parcourue par l'escargot est de 20 mm.

Problème 3.2.3:
évaluation d'un volume

Calculer le volume d'une tente pyramidale dont un des côtés est perpendiculaire à la base. La hauteur de cette tente mesure 3 m et sa base est un carré de 3 m de côté (voir la figure 3.2.1) .

---

solution

Bien que le problème soit à trois dimensions, nous allons utiliser une technique de solution semblable aux deux derniers problèmes.

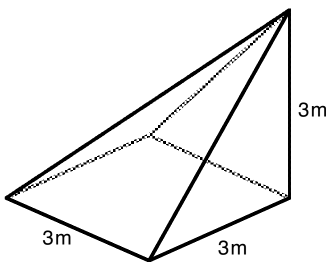
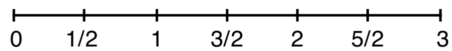


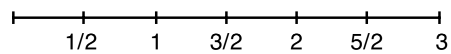
figure 3.2.1

- On subdivise la hauteur de la tente en six parties égales. Associons la valeur 0 au sommet de la tente et la valeur 3 à la base de celle-ci.



Cette subdivision a pour effet de sectionner en six parties le volume cherché (voir la figure 3.2.2).

- Nous allons maintenant estimer le volume des six tranches obtenues en considérant la plus grande valeur de chacune des six parties associées à la hauteur.



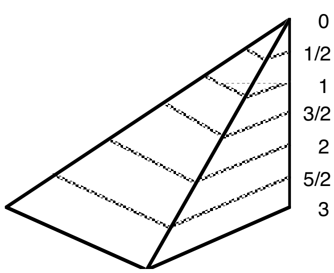


figure 3.2.2

La section du bas sera approximée à l'aide d'une boîte carrée de 3 m de côté par 1/2 m de hauteur (voir la figure 3.2.3).
La section suivante sera approximée à l'aide d'une boîte carrée de 5/2 m de côté par 1/2 m de hauteur.
La troisième section sera approximée à l'aide d'une boîte carrée de 2 m de côté par 1/2 m de hauteur.
La quatrième section sera approximée à l'aide d'une boîte carrée de 3/2 m de côté par 1/2 m de hauteur.
La cinquième section sera approximée à l'aide d'une boîte carrée de 1 m de côté par 1/2 m de hauteur.
La section du haut sera approximée à l'aide d'une boîte carrée de 1/2 m de côté par 1/2 m de hauteur.

À titre d'exercices montrer que les bases des six boîtes sont des carrés et que les longueurs d'arêtes de ces carrés sont respectivement: 3 m pour la boîte du bas, 5/2 m, 2 m, 3/2 m, 1 m, et 1/2 m.

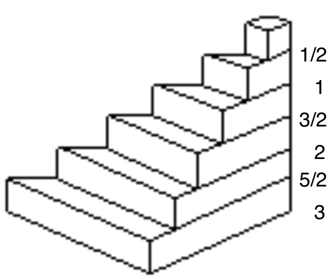


figure 3.2.3

- On calcule le le volume de chacune des boîtes puis, on additionne ces volumes. On obtient

$(1/2)^2(1/2) + (1)^2\,(1/2) + (3/2)^2(1/2) + (2)^2\,(1/2) + (5/2)^2(1/2) + (3)^2\,(1/2)$

$= \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{9}{8} + 2 + \dfrac{25}{8} + \dfrac{9}{2}$

$= \dfrac{91}{8}$ ou $11{,}375\ m^3$.

Rappelons que $11{,}375\ m^3$ n'est qu'une valeur approximative du volume cherchée.

Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) sont considérés comme les pères du calcul différentiel et intégral

Afin de résoudre partiellement les trois derniers problèmes, on a dû recourir à une technique un peu spéciale. Cette technique loin d'être nouvelle, était utilisée dans l'Antiquité. Les mathématiciens de cette époque ne se contentaient pas de réponses partielles à leurs problèmes. Ils développèrent des méthodes de solution très avancées mais aussi excessivement longues (nous le constaterons un peu plus loin). Au XVII ième siècle NEWTON et LEIBNIZ les créateurs du calcul intégral introduisirent une méthode de solution basée sur le calcul différentiel qui fit oublier les longs développements de leurs prédécesseurs et bouleversa du même coup les mathématiques. Cette méthode porte le nom de *théorème fondamental du calcul*.

Pour approximer les réponses des trois problèmes précédents, nous avons construit des sommes en utilisant un même modèle. Nous étudierons maintenant ce modèle.

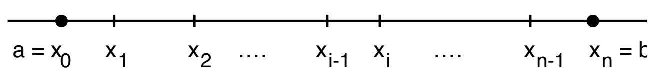
somme intégrale (somme de Riemann)

Soit une fonction f *continue* sur un intervalle [a,b].

a) On subdivise l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles plus petits, on obtient ainsi une *partition* de l'intervalle [a,b].

les sous-intervalles ne sont pas nécessairement égaux

$$a = x_0\ , x_1, x_2, \ \dots \ x_{i-1}, x_i, \ \dots \ x_{n-1}\ , x_n = b$$

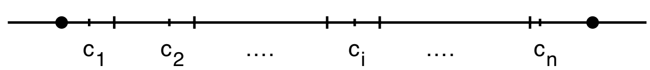


La longueur de chaque sous-intervalle est notée Δx_i .

$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \dots\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \dots\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

b) On choisit un point arbitraire (le représentant) dans chaque sous-intervalle. Le représentant est noté c_i .

$c_1 \in [x_0,x_1],\ c_2 \in [x_1,x_2],\ \dots\ c_i \in [x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,\ c_n \in [x_{n-1},x_n].$



c) On effectue la somme,

$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + f(c_4)\Delta x_4 + \ \dots\ + f(c_n)\Delta x_n$.

En utilisant la notation sigma la somme devient,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i\ .$$

les sommes intégrales sont également appelées sommes de Riemann en l'honneur de Georg Riemann, mathématicien du XIX ième siècle pour sa contribution au développement du calcul intégral

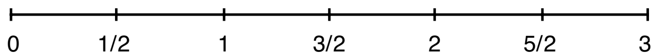
La somme obtenue est appelée *somme intégrale (somme de Riemann)* pour la fonction f sur l'intervalle [a,b] .

exemple 3.2.1

Calculer la somme intégrale de la fonction $f(x) = 1 - x^2$ sur l'intervalle $[0,3]$ en considérant 6 sous-intervalles égaux et en prenant le point milieu comme représentant de chaque sous-intervalle.

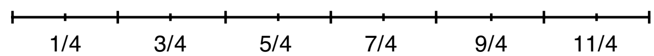
solution

- On subdivise l'intervalle $[0,3]$ en six sous-intervalles égaux de longueur $\Delta x_i = 1/2$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.



$$x_0 = 0,\ x_1 = 1/2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3/2,\ x_4 = 2,\ x_5 = 5/2,\ x_6 = 3$$

- On choisit comme représentant c_i, le point milieu de chaque sous-intervalle.



$$c_1 = 1/4, c_2 = 3/4, c_3 = 5/4, c_4 = 7/4, c_5 = 9/4, c_6 = 11/4$$

- On effectue la somme $\sum_{i=1}^{6} f(c_i)\,\Delta x_i$

$= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + f(c_4)\Delta x_4 + f(c_5)\Delta x_5 + f(c_6)\Delta x_6$

$= f(1/4)(1/2)+f(3/4)(1/2)+f(5/4)(1/2) +f(7/4)(1/2)+f(9/4)(1/2)+f(11/4)(1/2)$

$= 15/32 + 7/32 + (-9/32) + (-33/32) + (-65/32) + (-105/32)$

$= -190/32$ $(-5{,}9375)$

Si dans l'exemple précédent, nous avions choisi un autre représentant que serait devenue la somme intégrale ?

1) En prenant la valeur inférieure de chaque sous-intervalle, on obtient: $c_1 = 0$, $c_2 = 1/2$, $c_3 = 1$, $c_4 = 3/2$, $c_5 = 2$, $c_6 = 5/2$

   La somme intégrale devient dans ce cas,

   $f(0)(1/2) + f(1/2)(1/2) + f(1)(1/2) + f(3/2)(1/2) + f(2)(1/2) + f(5/2)(1/2)$

   $= -3{,}875.$

2) En prenant la valeur supérieure de chaque sous-intervalle, on obtient: $c_1 = 1/2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 3/2$, $c_4 = 2$, $c_5 = 5/2$, $c_6 = 3$

   La somme intégrale devient dans ce cas,

   $f(1/2)(1/2) + f(1)(1/2) + f(3/2)(1/2) + f(2)(1/2) + f(5/2)(1/2) + f(3)(1/2)$

   $= -8{,}375.$

Dans ce cas, le choix du représentant a une grande influence sur la valeur obtenue. En est-t-il toujours ainsi ?

Pour répondre à la question on a construit un tableau comparatif des sommes intégrales obtenues pour un nombre croissant de sous-intervalles égaux en considérant dans chaque cas trois choix de représentant:

a) la valeur inférieure de chaque sous-intervalle,
b) la valeur médiane de chaque sous-intervalle,
c) la valeur supérieure de chaque sous-intervalle.

nombre	inférieure	médiane	supérieure
3	-2	-5,75	-11
6	-3,875	-5,9375	-8,375
12	-4,90625	-5,98775	-7,15625
24	-5,445313	-5,996094	-6570313
48	-5,720703	-5,999023	-6,283203
96	-5,859863	-5,999756	-6,141113
192	-5,929809	-5,999940	-6,070435
384	-5,964874	-5,999985	-6,035187
768	-5,982430	-5,999996	-6,017586

Il apparaît à la lecture du tableau que pour un nombre élevé de sous-intervalles, les sommes intégrales s'approchent de la valeur -6 indépendamment du représentant choisi. Nous verrons qu'effectivement sous certaines conditions, lorsque la longueur des sous-intervalles s'approche de 0 , quels que soient les représentants choisis, les sommes intégrales convergent.

intégrale définie

Soit une fonction f et l'intervalle $[a,b]$.

Si $$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = A \in \mathbf{R}$$

alors f est dite *intégrable* sur [a,b] et la quantité A est appelée *l'intégrale définie* de la fonction f sur [a,b].

lire: l'intégrale définie de la fonction f de a à b

Elle sera notée $$\int_a^b f(x)\,dx = A\,.$$

Le symbole $\int$ est une déformation de la lettre *S* pour somme.
Les valeurs a et b sont les *bornes d'intégration*.
$f(x)$ est *l'intégrande* du problème.
dx représente un petit intervalle sur l'axe des x.

La valeur A (lorsqu'elle existe) est indépendante

a) de la subdivision de l'intervalle et,
b) du représentant choisi dans chaque sous-intervalle.

Puisque la subdivision de l'intervalle n'affecte pas la quantité A, on utilisera des *sous-intervalles égaux* pour calculer cette quantité. Dans ce cas la définition de l'intégrale définie de la fonction f sur $[a,b]$ deviendra:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i}$$

En effet lorsque les sous-intervalles sont égaux, on aura

$$\Delta x_i = \frac{(b-a)}{n}$$

si de plus,

$$\begin{aligned} & \max \Delta x_i \to 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{(b-a)}{n} \to 0 \\ \Rightarrow \quad & n \to \infty \end{aligned}$$

La valeur de A étant indépendante du représentant choisi, on prendra la plupart du temps comme valeur c_i, *le point supérieur*, *inférieur* ou *milieu* du sous-intervalle. Ce choix aura pour avantage de simplifier les calculs.

On en vient maintenant à la question d'existence de cette valeur A. Le théorème qui suit permettra de déterminer si une fonction est intégrable sur un intervalle. On se contente d'énoncé la proposition en laissant à un cours plus avancé sa démonstration.

Théorème 3.2.1
condition d'existence

Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est intégrable.

Retournons au problème précédent et cherchons à montrer que l'intégrale définie de la fonction

$$f(x) = 1 - x^2 \text{ sur } [0,3]$$

est bien la quantité -6 obtenue à partir du tableau de la page précédente.

exemple 3.2.2

Montrer que $\displaystyle\int_0^3 (1 - x^2)\,dx = -6$ en utilisant les sommes intégrales.

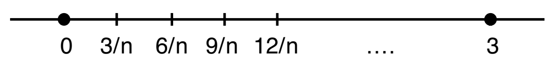
---

on commence toujours par vérifier si la fonction est continue sur l'intervalle

La fonction est continue sur [0,3] donc elle est intégrable .

- On subdivise l'intervalle [0,3] en n sous-intervalles égaux

$\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$



de longueur $\Delta x_i = \dfrac{3}{n}$ $(i = 1,2,3,4, \ \dots \ , n)$.

- On choisit un représentant c_i dans chaque sous-intervalle (on utilise comme représentant la valeur supérieure de chaque sous-intervalle).

$c_1 = \dfrac{3}{n}$, $c_2 = 2\left(\dfrac{3}{n}\right)$, $c_3 = 3\left(\dfrac{3}{n}\right)$, $c_4 = 4\left(\dfrac{3}{n}\right)$. ... $c_i = i\left(\dfrac{3}{n}\right)$

- On évalue la somme intégrale correspondante.

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{3i}{n}\right)^2\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{n} - \frac{27\,i^2}{n^3}\right)$$

propriétés 1 et 2 de la sommation (p 3-3)

$$= \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

formules 1 et 3 (p 3-4)

$$= \frac{3}{n} \cdot (n) - \frac{27}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= -6 - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2}$$

- On considére la somme intégrale lorsque n tend vers l'infini,

$$\int_0^3 (1 - x^2)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(-6 - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2}\right)$$

$$= -6$$

exemple 3.2.3

Évaluer $\int_0^4 (2 - 3x)\,dx$ en utilisant les sommes intégrales.

rép: -16

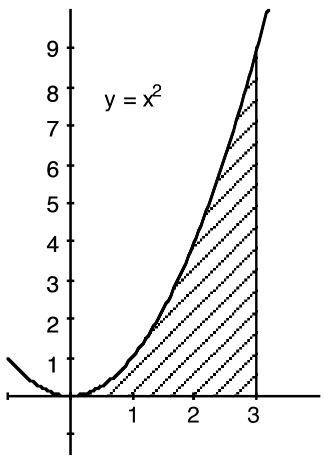
exemple 3.2.4

Évaluer $\int_1^4 x^2\,dx$ en utilisant les sommes intégrales.

rép: 21

exemple 3.2.5

Calculer la valeur exacte de l'aire de la région définie à la page 3-11 (problème 3.2.1) en utilisant les sommes intégrales.



rép: 9

lorsque f est une fonction continue et non négative sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

correspond à l'aire sous la courbe $y = f(x)$ au dessus de l'axe des x entre $x = a$ et $x = b$

Exercices 3.2

1. Calculer la somme intégrale de la fonction

utiliser la démarche de l'exemple 3.2.1

$$f(x) = \frac{1}{x + 1} \quad \text{sur l'intervalle } [0, 1]$$

en utilisant 4 sous-intervalles égaux et les points milieux des sous-intervalles comme représentants.

2. Calculer la somme intégrale de la fonction

utiliser la démarche de l'exemple 3.2.1

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{sur l'intervalle } [1, 4]$$

en utilisant 6 sous-intervalles égaux et les points supérieurs des sous-intervalles comme représentants.

3. Évaluer

utiliser la démarche de l'exemple 3.2.2

a) $\int_0^2 3 \, dx$

b) $\int_0^1 x \, dx$

c) $\int_0^3 (2x + 1) \, dx$

d) $\int_0^1 (x^2 + 2) \, dx$

e) $\int_1^3 (1 - 4x) \, dx$

f) $\int_2^3 (3x^2 - 2) \, dx$

4. Montrer que

utiliser la démarche de l'exemple 3.2.2

a) $\int_a^b c \, dx = c(b - a)$ où c est une constante .

b) $\int_a^b x \, dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

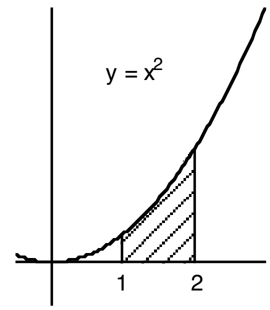
c) $\int_a^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

5. Calculer la distance exacte parcourue par l'escargot à la page 3-12 (problème 3.2.2) en utilisant les sommes intégrales.

6. Calculer le volume exact de la tente à la page 3-13 (problème 3.2.3) en utilisant les sommes intégrales.

7. Calculer l'aire de la région délimitée par la courbe $y = x^2$, l'axe des x et les droites verticales $x = 1$ et $x = 2$.

   (Utiliser les sommes intégrales)



8. Après t secondes, la vitesse d'un objet est de t^2 mètres par seconde. Trouver la distance parcourue par l'objet dans l'intervalle [2,5].

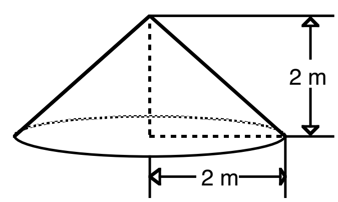
   (Utiliser les sommes intégrales)

diviser la hauteur en n sous-intervalles égaux et former n disques

(le volume d'un disque de rayon r et de hauteur h est $\pi r^2 h$)

9. Calculer le volume d'un cône dont le rayon est de 2 mètres et la hauteur est aussi de 2 mètres.

   (Utiliser les sommes intégrales)



Réponses 3.2

1.	0,691			
2.	4,91			
3. a)	6	d)	2,33	
b)	0,5	e)	- 14	
c)	12	f)	17	
4.				
5.	20 mm			
6.	9 m^3			
7.	2,33			
8.	39 m			
9.	8,378 m^3			

3.3 Le théorème fondamental du calcul

Les quelques problèmes que l'on a résolu à la section précédente montrent à quel point il est difficile et long de calculer une intégrale définie. Avant le XVII siècle, on était contraint à utiliser ces méthodes. Newton et Leibniz ont découvert une façon simple de résoudre ce genre de problème. Leur méthode utilise le lien profond qui existe entre l'intégration et la dérivation. Cette section a pour objet l'exposé de cette méthode.

Lorsqu'on a introduit la notion d'intégrale définie, on a supposé $a < b$. Que se passe-t-il si $b < a$ ou si $b = a$?

définition

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ si $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx$ existe,

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ si $f(a)$ existe.

propriétés de l'intégrale définie

1 $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ où $c \in \mathbf{R}$

2. $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ où $a, b, c \in \mathbf{R}$

(pourvu que les trois intégrales existent)

démonstration

1. $$\int_a^b c\,f(x)\,dx = \lim_{n\to 0} \sum_{i=1}^{n} c\,f(c_i)\,\Delta x_i$$

propriétés de la sommation et des limites

$$= c\left[\lim_{n\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\right]$$

par définition

$$= c\int_a^b f(x)\,dx$$

2. $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) \pm g(x) \big)dx = \lim_{n\to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(f(c_i) \pm g(c_i) \big) \Delta x_i$

propriété de la sommation

$$= \lim_{n \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x_i \right]$$

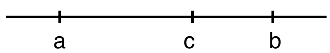
propriété de la limite

$$= \lim_{n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \pm \lim_{n\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\,\Delta x_i$$

par définition

$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(cette propriété se généralise à plusieurs fonctions)



3 a) Supposons d'abord que a < c < b.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to 0} \sum_{a}^{b} f(c_i)\,\Delta x_i$$

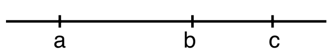
$$= \lim_{n\to 0} \left[\sum_{a}^{c} f(c_i)\,\Delta x_i + \sum_{c}^{b} f(c_i)\,\Delta x_i \right]$$

propriété de la limite

$$= \lim_{n \to 0} \sum_{a}^{c} f(c_i)\,\Delta x_i + \lim_{n\to 0} \sum_{c}^{b} f(c_i)\,\Delta x_i$$

par définition

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ .$$



3 b) Supposons maintenant que a < b < c.

en utilisant 3 a)

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

car si b < c $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ .$$

3 c) À démontrer: b < a < c ; b < c < a ; c < b < a ; c < a < b .

1re application de l'intégrale définie

valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a,b]. La valeur moyenne μ de cette fonction sur l'intervalle [a,b] est donnée par

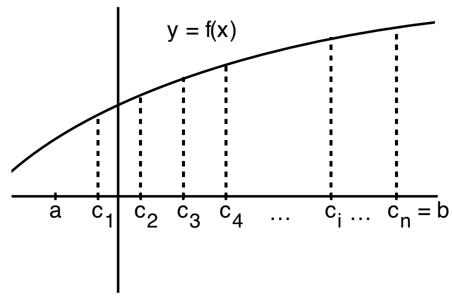
$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

démonstration

Pour résoudre le problème, on subdivise l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles égaux puis, on considère la valeur la plus grande de chaque sous-intervalle. Soient

$c_1, c_2, c_3, c_4, \ \ldots\ , c_i\ \ldots\ , c_n$

les n valeurs.



La valeur moyenne μ peut être approximée de la façon suivante.

$$\mu \sim \frac{f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + f(c_4) + \ \ldots\ + f(c_i) + \ \ldots\ + f(c_n)}{n}$$

$$\sim \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ \frac{1}{n}$$

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{\Delta x_i}{b-a}$

$$\sim \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ \frac{\Delta x_i}{b - a}$$

pour obtenir la valeur exacte de μ, on fait tendre le nombre de sous-intervalles vers l'infini

$$\Rightarrow \qquad \mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ \frac{\Delta x_i}{b - a}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ \frac{\Delta x_i}{b - a}$$

propriété de la sommation et propriété de la limite

$$= \frac{1}{b - a} \left[\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\ \Delta x_i \right]$$

par définition

$$\text{et} \qquad \mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Le résultat précédent est plus souvent utilisé sous la forme suivante.

théorème 3.3.1

théorème de la moyenne (pour l'intégrale)

Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a,b] alors il existe un nombre c dans [a,b] pour lequel

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)\,(b - a)$$

démonstration

Si m et M sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur de $f(x)$ sur [a,b] alors

$$m \le \mu \le M$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

$f(x)$ étant <u>continue</u> sur [a,b], elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M. On aura donc pour une certaine valeur de c $(a \le c \le b)$

$$\mu = f(c)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \quad \text{où} \quad a \le c \le b$$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a) \quad \text{où} \quad a \le c \le b$$

exemple 3.3.1

Calculer la valeur moyenne μ de $f(x) = x^2$ sur [0,2].

---

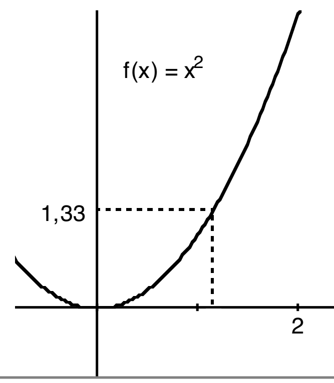
solution

La valeur moyenne μ de $f(x) = x^2$ sur [0,2] est donnée par

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3} = 1{,}33$$



par le résultat du #4 c), à la page 3-22

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

exemple 3.3.2

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ sur [-1,3].

(utiliser les propriétés de l'intégrale définie page 3-25 ainsi que les trois résultats du # 4 à la page 3-22)

---

rép: -0,33

À l'aide du *théorème fondamental du calcul* on est maintenant en mesure

a) d'établir le lien qui existe entre l'intégration et la dérivation,
b) de développer un moyen rapide pour calculer une intégrale définie.

On a vu que si une fonction f est continue sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

existe et correspond à un nombre réel. Si maintenant la borne supérieure est variable

$$\int_a^x f(x)\,dx \quad \text{où } x \in [a,b]$$

la valeur de l'intégrale variera en conséquence. L'intégrale définie sera alors une fonction de sa borne supérieure. Supposons que F(x) est cette fonction. (pour éviter toute confusion utilisons la lettre t comme variable d'intégration.

la valeur de l'intégrale définie ne dépend pas de la variable d'intégration

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) \quad \text{où } x \in [a,b]$$

Déterminons la nature de F(x).

théorème 3.3.2

théorème fondamental du calcul (première partie)

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a,b]$ et soit x une valeur de l'intervalle.

Si $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ alors $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

démonstration

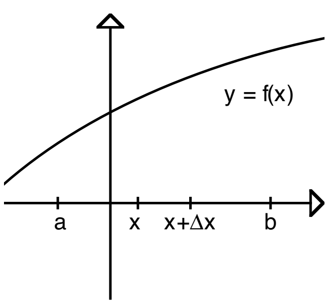


figure 3.3.1

Soit $f(x)$ une fonction continue sur $[a,b]$ et x une valeur de l'intervalle. Donnons à la variable x un accroissement Δx positif (figure 3.3.1) ou négatif.

On admettra facilement à partir de la remarque du haut que:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) \qquad \text{et} \qquad \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = F(x+\Delta x)$$

où $F(x)$ est une fonction définie sur $[a,b]$.

$$\Rightarrow \qquad F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

par une propriété de l'intégrale définie

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

donc

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b - a)$ où $c \in [a,b]$

Appliquons le théorème de la moyenne (théorème 3.3.1) à la dernière intégrale. On obtient

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(c)(x + \Delta x - x)$$

$$= f(c)\,\Delta x \quad \text{où } c \text{ est entre } x \text{ et } x + \Delta x$$

On divise chaque membre de l'équation par Δx.

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(c)$$

Par conséquent lorsque $\Delta x \to 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

Puisque c est entre x et $x + \Delta x$ alors $c \to x$ lorsque $\Delta x \to 0$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c)$$

par définition de la dérivée et f est continue sur [a,b]

$$F'(x) = f(x)$$

On conclut que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$.

théorème 3.3.3

théorème fondamental du calcul (seconde partie)

Si $F(x)$ est une primitive de la fonction continue $f(x)$ sur [a, b] alors,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

démonstration

Par hypothèse $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et d'après le théorème précédent,

$$\int_a^x f(t)\,dt \text{ est aussi une primitive de } f(x).$$

On conclut que

deux primitives d'une même fonction diffèrent par une constante

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

L'égalité tient pour toute valeur de x alors

lorsque x = a on a, $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$

par définition $0 = F(a) + C$

$C = -F(a)$

lorsque x = b on a, $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C$

Puisque C = - F(a), $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

En utilisant la variable x comme variable d'intégration on obtient,

cette formule est souvent appelée formule de Newton-Leibniz

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

exemple 3.3.3

Effectuer $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{2}{x^2} - 4x^3 - 2 \right) dx$

---

solution

a) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^2} - 4x^3 - 2 \right) dx = \int (2x^{-2} - 4x^3 - 2)\ dx$

$\displaystyle = 2\frac{x^{-1}}{-1} - 4\frac{x^4}{4} - 2x + C$

$\displaystyle = -\frac{2}{x} - x^4 - 2x + C$

condition nécessaire pour appliquer la formule de Newton-Leibniz

b) La fonction $f(x) = \dfrac{2}{x^2} - 4x^3 - 2$

est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ donc elle est continue sur $[-2,-1]$.

c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{2}{x^2} - 4x^3 - 2 \right) dx = \left[-\frac{2}{x} - x^4 - 2x + C \right]_{-2}^{-1}$

il est inutile de tenir compte de la constante C puisque de toute façon, elle s'annule

$= (2 - 1 + 2 + C) - (1 - 16 + 4 + C)$

$= 3 + C + 11 - C$

$= 14$

exemple 3.3.4

Effectuer $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{dt}{36 + 4t^2}$

rép: π/24

Soit f une fonction continue sur [-a, a]

a) Si f est une fonction paire
($f(x) = f(-x)\ \ \forall x$)

alors

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{r} f(x)\,dx$$

b) Si f est une fonction impaire
($f(x) = -f(-x)\ \ \forall x$)

alors

$$\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 0$$

exemple 3.3.5

Effectuer $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} x \cos x \ dx$

rép: $\dfrac{\pi\sqrt{3} - 3}{6}$

changement des bornes d'intégration lors d'un changement de variable

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a,b],
u = h(x) une fonction continue et dérivable sur l'intervalle [a,b] et
g une fonction continue sur [h(a), h(b)].

Si $\qquad f(x)\,dx = g(h(x))\,h'(x)\,dx \qquad$ sur [a,b]

alors $\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{h(a)}^{h(b)} g(u)\,du \qquad$ où u = h(x)

exemple 3.3.6

Effectuer $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$

solution

u =arcsin$\left(\frac{x}{3}\right)$ est continue et dérivable sur [0,3]

Posons $u = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow \sin u = \frac{x}{3}$

$\Rightarrow \cos u\,du = \frac{1}{3}\,dx$

$$\int \sqrt{9 - x^2}\,dx = \int (3\cos u)\,(3\cos u\,du)$$

$$= 9\int \cos^2 u\,du$$

$$= 9\int \frac{1 + \cos 2u}{2}\,du$$

$$= \frac{9}{2}\int 1\,du + \frac{9}{2}\int \cos 2u\,du$$

$$= \frac{9}{2}u + \frac{9}{2}\left(\frac{\sin 2u}{2}\right) + C$$

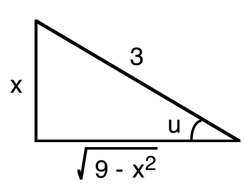
$$= \frac{9}{2}u + \frac{9}{2}\left(\frac{2\sin u\cos u}{2}\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{9}{2}u + \frac{9}{2}\sin u\cos u + C} \qquad (1)$$

$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}\right)$$

$$= \boxed{\frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} + C} \qquad (2)$$

sin u = $\frac{x}{3}$



La fonction $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ est continue sur [-3, 3]; elle est donc continue sur [0,3].

évaluation de l'intégrale définie en utilisant la primitive sous la forme (2)

$$\Rightarrow \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\ dx = \left[\frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} \right]_0^3$$

$$= \left(\frac{9}{2}\arcsin 1\right) - \left(\frac{9}{2}\arcsin 0\right)$$

$$= \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{9}{2}(0)$$

$$= \frac{9\pi}{4}$$

Il est possible d'intégrer en laissant la primitive exprimée à l'aide de la variable u. Dans ce cas les bornes d'intégration deviennent

évaluation de l'intégrale définie en utilisant la primitive sous la forme (1)

$$x = 0 \ \Rightarrow\ u = \arcsin\left(\frac{0}{3}\right) = \arcsin 0$$
$$\Rightarrow\ u = 0$$

$$x = 3 \ \Rightarrow\ u = \arcsin\left(\frac{3}{3}\right) = \arcsin 1$$
$$\Rightarrow\ u = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\ dx = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} 1 + \cos 2u\ du$$

La fonction $g(u) = 1 + \cos 2u$ est continue sur l'ensemble des réels; elle est donc continue sur $[0, \pi/2]$.

$$= \left[\frac{9}{2}u + \frac{9}{2}\sin u \cos u \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{9}{2}(1)(0)\right) - \left(\frac{9}{2}(0) + \frac{9}{2}(0)(1)\right)$$

$$= \frac{9\pi}{4}\ .$$

Exercices 3.3

utiliser la définition ainsi que les propriétés de l'intégrale définie (page 3-25)

1. Si f et g sont deux fonctions continues telles que

$$\int_1^2 f(x)\ dx = 3\ ,\quad \int_1^5 f(x)\ dx = 2\ ,\quad \int_1^5 g(x)\ dx = 1 \quad \text{alors évaluer:}$$

a) $\displaystyle\int_5^5 g(x)\ dx$ c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{f(x) + g(x)}{5}\ dx$ e) $\displaystyle\int_2^5 f(x)\ dx$

b) $\displaystyle\int_2^1 4f(x)\ dx$ d) $\displaystyle\int_1^5 \big(3f(t) - 2g(t)\big)\ dt$

utiliser la définition ainsi que les propriétés de l'intégrale définie (page 3-25)

2. Si f est une fonction continue telle que

$$\int_a^c f(x)\ dx = b \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\ dx = c \quad \text{alors évaluer} \quad \int_b^c \big(af(t) - b\big)\ dt$$

il est important de toujours vérifier que l'intégrande soit continue sur l'intervalle d'intégration

3. Effectuer chacune des intégrales.

a) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$ h) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1 - \sin x}$

b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9 - 2x}}$ i) $\displaystyle\int_0^1 \ln(y^2 + 1)\ dy$

c) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$ j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 y \cos^3 y\ dy$

d) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dy}{\sin^2 y}$ k) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2 - 9}$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{9x^2 + 6x + 1}$ l) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta\ d\theta$

f) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sin^2 x\ dx$ m) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2}\ dx$

g) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{x + 1}\ dx$ n) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^4 x \,\mathrm{cotg}^2 x\ dx$

si vous faites un changement de variable, effectuer le changement de bornes

4. Effectuer chacune des intégrales.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{dx}{2 + \sqrt{5 + x}}$

d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 5)^3}}$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}}\, dx$

f) $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2}\, dx$

5. Quelle est la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = x^2$ sur $[-1, 3]$

b) $f(x) = \ln x$ sur $[1, e]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x + x^2}$ sur $[2, 3]$

d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ sur $[-2, 2]$

e) $f(x) = \text{arctg } x$ sur $[0, 1]$

6. La population du Mexique peut être modélisée à l'aide de la fonction suivante

$$P = 67{,}38\ (1.026)^t$$

où P est en millions d'habitants et t en années depuis 1980. Utilisez cette fonction pour prédire la valeur moyenne de la population du Mexique entre les années 2000 et 2020.

7. Une barre de métal se refroidit, passant de 1000˚C à la température ambiante, soit 20˚C. La température T de la barre, t minutes après qu'elle commence à refroidir, est donnée en degrés Celcius par

$$T = 20 + 980e^{-0{,}1t}$$

Trouver la valeur moyenne de la température durant la première heure.

8. Le nombre d'heures H où il fait jour à Madrid en fonction de la date est calculé approximativement par la formule

$$H = 12 + 2{,}4 \sin(0{,}0172(t - 80))$$

où t est le nombre de jours depuis le début de l'année. Trouver le nombre d'heures moyen où il fait jour à Madrid en janvier.

Réponses 3.3

1. a) 0 b) -12 c) $3/5$ d) 4 e) -1

2. $(b - c)(a + b)$

3. a) $\frac{10}{9}$
   b) 2
   c) $\frac{\pi}{4}$
   d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
   e) $\frac{1}{10}$
   f) $\frac{3\pi - 2}{8}$
   g) $\frac{8 - 3\ln 3}{3}$
   h) $1+\sqrt{3}$
   i) $\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2$
   j) $\frac{1}{12}$
   k) $\frac{1}{6}\ln\frac{1}{10}$ ou $-\frac{1}{6}\ln 10$
   l) $\frac{4}{3}$
   m) $\frac{e^2 + 1}{2}$
   n) $\frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{96}$

4. a) $2 + 4\ln\frac{4}{5}$
   b) $\ln\left[\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right] = 2\ln(\sqrt{2} + 1)$
   c) $\frac{3\pi - 8}{3}$
   d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   e) $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}$
   f) $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$

5. a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{1}{e - 1}$ c) $\ln\frac{9}{8}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

6. environ 147 millions d'habitants

7. 183°C

8. 9,9 heures

3.4 Intégrales impropres

Jusqu'à maintenant seule l'intégration de <u>fonctions continues</u> sur des <u>intervalles finis</u> ont été considérées. La formule de Newton-Leibniz s'applique seulement si ces conditions sont satisfaites. Nous verrons dans cette section comment contourner la difficulté lorsqu'elle se présente.

intégrale impropre

L'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ est une *intégrale impropre* si

a) $f(x)$ possède au moins un point de discontinuité sur $[a,b]$ et/ou,
b) au moins une des bornes d'intégration est infinie.

exemple 3.4.1

Lesquelles parmi ces intégrales sont des intégrales impropres ?

a) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{x-2}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{r}\,dr$ c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,dt$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{1}{x}\,dx$

intégrande discontinue sur l'intervalle d'intégration

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$

a) sauf à droite en a, on définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx \quad (\text{ si la limite existe dans } \mathbf{R})$$

b) sauf à gauche en b, on définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \quad (\text{ si la limite existe dans } \mathbf{R})$$

c) sauf en $c \in\ ]a, b[$, on définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

(pourvu que les limites existent dans **R**)

intégrale convergente et intégrale divergente

L'intégrale est dite *convergente* lorsque la limite du second membre existe dans **R**, et *divergente* dans le cas contraire.

exemple 3.4.2

Effectuer $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$

---

solution

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ est continue sur $[0,3]$ sauf à gauche en $x = 3$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \lim_{t \to 3^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= \lim_{t \to 3^-} \left[\arcsin \frac{x}{3} \right]_0^t$$

$$= \lim_{t \to 3^-} \left(\arcsin \frac{t}{3} - \arcsin 0 \right)$$

$$= \arcsin 1^- - \arcsin 0$$

$\arcsin 1^- = \pi/2$
$\arcsin 0 = 0$

$$= \frac{\pi}{2}$$

exemple 3.4.3

Effectuer $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x - 2)^2}$

si on n'avait pas tenu compte de la discontinuité au point $x = 2$ quelle aurait été la réponse du problème?

montrer à l'aide des sommes intégrales que ce résultat est impossible!

rép: diverge (∞)

exemple 3.4.4

Effectuer $\displaystyle\int_0^1 \ln x \; dx$

rép:-1

borne(s) infinie(s)

Soit f une fonction continue

a) sur $[a, \infty[$, on définit

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx \qquad (\text{ si la limite existe dans } \mathbf{R})$$

b) sur $]-\infty, b]$, on définit

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx \qquad (\text{ si la limite existe dans } \mathbf{R})$$

c) sur $\mathbf{R}$, on définit

on utilisera la valeur $c = 0$ lorsque le problème le permet

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx \qquad (\text{ où } c \in \mathbf{R})$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t \to \infty} \int_c^t f(x)\,dx$$

(pourvu que les limites existent dans $\mathbf{R}$)

L'intégrale est dite *convergente* lorsque les limites du second membre existent dans $\mathbf{R}$, et *divergente* dans le cas contraire.

exemple 3.4.5

Effectuer $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

---

solution

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ donc continue sur $[2, \infty[$.

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\Rightarrow \qquad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \to \infty} \int_2^{t} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

exemple 3.4.6

Effectuer $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$

rép: $3\pi/4$

exemple 3.4.7

Effectuer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{x}\ dx$

rép: diverge (∞)

exemple 3.4.8

Effectuer $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+4)}$

rép:π/2

Exercices 3.4

Effectuer chacune des intégrales.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$

2. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - x}}$

3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x - 1)^2}$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\, dx$

5. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

6. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec x \, dx$

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{x/2}}$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{\sqrt{7 - x}}$

9. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x e^x \, dx$

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}}\, dx$

13. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x^2 - 1)}$

14. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\, dx$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

16. $\displaystyle\int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$

17. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x - 1}}$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\, dx$

19. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$

20. $\displaystyle\int_0^e x \ln x \, dx$

21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x(x + 1)}$

22. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \sin x \, dx$

23. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

24. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sec x \operatorname{tg} x - \sec^2 x)\, dx$

Réponses 3.4

1.	diverge	13.	diverge
2.	4	14.	diverge
3.	diverge	15.	$\frac{\pi}{2}$
4.	2	16.	$-\frac{\pi}{3}$
5.	π	17.	$\pi - 2\text{arctg}\sqrt{2}$
6.	diverge	18.	0
7.	2	19.	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
8.	diverge	20.	$\frac{e^2}{4}$
9.	$\frac{1}{\ln 2}$	21.	diverge
10.	π	22.	$\frac{1}{2}$
11.	-1	23.	1
12.	2	24.	-1

3.5 Calcul d'aires

Les applications de l'intégrale se retrouvent dans une multitude de domaines. La physique est sûrement la discipline qui utilise le plus ce concept. De nos jours on retrouve des applications de l'intégrale aussi bien dans des domaines scientifiques (physique, chimie, biologie, ...) que dans des domaines tels l'administration , l'économie, la sociologie, la psychologie ...

Le champ des applications de l'intégrale est énorme. Le cours n'a pas pour but de couvrir d'une façon exhaustive l'ensemble des possibilités de ce concept. On se contentera d'applications de nature strictement mathématique en laissant aux autres disciplines le soin de de compléter le travail.

calcul de l'aire entre deux courbes

(découpage vertical)

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle [a,b]. Si on a $f(x) \geq g(x)$ pour toute valeur dans l'intervalle [a,b] alors l'aire de la région bornée par les deux courbes entre x = a et x = b est donnée par

$$\int_{x=a}^{x=b} h(x)\,dx \quad \text{où} \quad h(x) = f(x) - g(x)$$

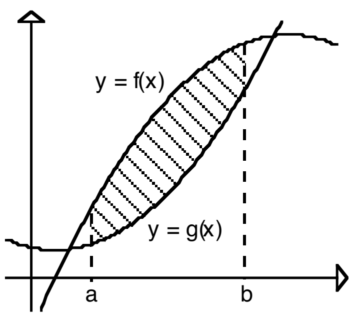


figure 3.5.1

Essayons d'approximer l'aire de la région en question (figure 3.5.1) à l'aide d'une somme intégrale. Pour cela,

- subdivisons d'abord l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles égaux de longueur Δx_1, Δx_2, Δx_3, Δx_4, ... , Δx_n ;
- considérons ensuite la valeur la plus grande de chaque sous-intervalle, soient x_1, x_2, x_3, x_4, ... , x_n les n valeurs ;
- construisons dans chaque sous-intervalle, un rectangle ayant pour hauteur et pour base:

hauteur	base	
$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1)$	Δx_1	
$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2)$	Δx_2	
$h(x_3) = f(x_3) - g(x_3)$	Δx_3	
$h(x_4) = f(x_4) - g(x_4)$	Δx_4	etc ...

On obtient le découpage vertical ci-dessous.

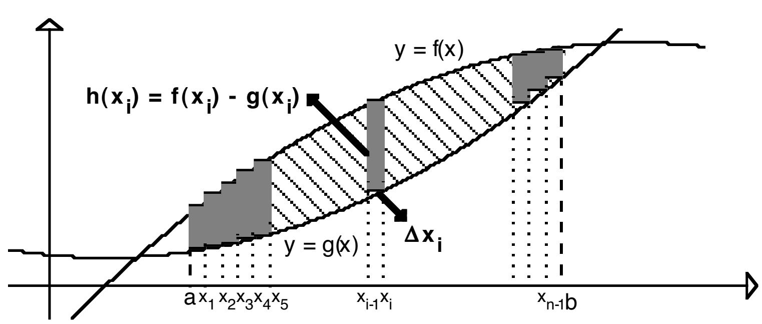


figure 3.5.2

En additionnant l'aire des rectangles on obtient une approximation de l'aire A cherchée.

$$A \sim h(x_1)\,\Delta x_1 + h(x_2)\,\Delta x_2 + h(x_3)\,\Delta x_3 + \;\ldots\; + h(x_n)\,\Delta x_n$$

$$\sim \sum_{i=1}^{n} h(x_i)\,\Delta x_i \qquad \text{où} \qquad h(x_i) = f(x_i) - g(x_i)$$

L'aire exacte est donnée par

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} h(x_i)\,\Delta x_i$$

puisque les Δx_i sont égaux

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(x_i)\,\Delta x_i$$

par définition

$$= \int_a^b h(x)\,dx \qquad \text{où} \qquad h(x) = f(x) - g(x)$$

exemple 3.5.1

Calculer l'aire de la région bornée par les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = 2x$.

---

solution

On trace d'abord les deux courbes puis, on détermine les points d'intersection des courbes. Il suffit pour cela de résoudre le système formé des équations $y = x^2$ et $y = 2x$.

$$y = x^2 \text{ et } y = 2x \;\Rightarrow\; x^2 = 2x \;\Rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-2) = 0$$
$$\Rightarrow\; x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Les courbes se coupent aux points (0,0) et (2,4).

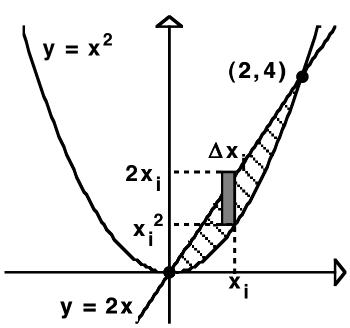


figure 3.5.3

Une fois la région délimitée, on trace un petit rectangle de base Δx_i (découpage vertical). La hauteur de ce rectangle est égale à l'ordonnée en x_i de la courbe supérieure moins l'ordonnée en x_i de la courbe inférieure (figure 3.5.3).

$$h(x_i) = y_{\text{supérieur}} - y_{\text{inférieur}} = 2x_i - x_i^2$$

L'aire du rectangle est $(2x_i - x_i^2)\,\Delta x_i$ et celle de la région entière

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (2x_i - x_i^2)\,\Delta x_i$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} (2x - x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

exemple 3.5.2

Calculer l'aire de la région bornée par les courbes d'équations

$$y = -x^2 + 4x - 3, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad x = 0.$$

rép: $\frac{4}{3}$

exemple 3.5.3

Calculer l'aire de la région bornée par les courbes d'équations

$$y = x^3 \quad \text{et} \quad y = x.$$

rép: $\frac{1}{2}$

Il existe une seconde façon d'obtenir l'aire entre les deux courbes. Au lieu d'utiliser un découpage vertical, on utilise un découpage horizontal. Toutes les données doivent au préalable être exprimées en fonction de la variable y.

calcul de l'aire entre deux courbes

(découpage horizontal)

Soit q et p deux fonctions continues sur l'intervalle [c,d]. Si on a $q(y) \geq p(y)$ pour toute valeur dans l'intervalle [c,d] alors l'aire de la région bornée par les deux courbes entre $y = c$ et $y = d$ est donnée par

$$\int_{y=c}^{y=d} h(y)\,dy \quad \text{où} \quad h(y) = q(y) - p(y)$$

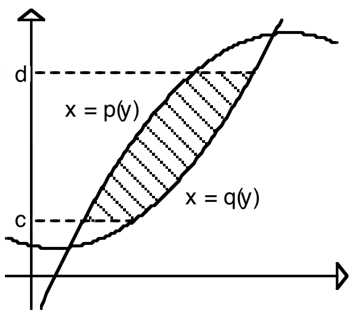


figure 3.5.4

On approxime l'aire de la région (figure 3.5.4) à l'aide d'une somme intégrale en y. Pour cela,

- on subdivise l'intervalle [c,d] en n sous-intervalles égaux de longueur Δy_1, Δy_2, Δy_3, Δy_4, ... , Δy_n ;
- on considère la valeur la plus grande de chaque sous-intervalle, soient y_1, y_2, y_3, y_4, ... , y_n les n valeurs ;
- on construit dans chaque sous-intervalle, un rectangle ayant pour hauteur et pour base:

hauteur	base	
$h(y_1) = q(y_1) - p(y_1)$	Δy_1	
$h(y_2) = q(y_2) - p(y_2)$	Δy_2	
$h(y_3) = q(y_3) - p(y_3)$	Δy_3	
$h(y_4) = q(y_4) - p(y_4)$	Δy_4	etc ...

Cette fois les n rectangles sont empilés les uns sur les autres. La hauteur de chaque rectangle est $h(y_i) = q(y_i) - p(y_i)$ et la base Δy_i .

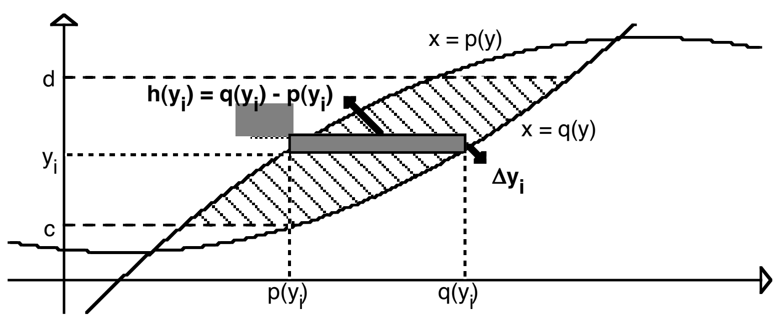


figure 3.5.5

L'addition de l'aire des rectangles donnera une approximation de l'aire cherchée; lorsque le nombre de sous-intervalles augmente vers l'infini, on aura

$$A = \int_{y=c}^{y=d} h(y)\,dy \quad \text{où} \quad h(y) = q(y) - p(y)$$

exemple 3.5.4

Calculer l'aire de la région bornée par les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = 2x$.

---

solution

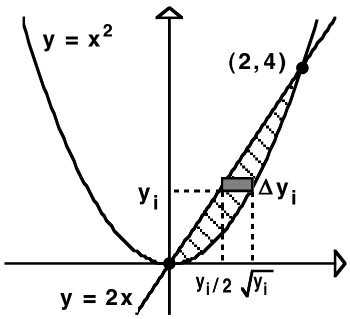


figure 3.5.6

Le problème est le même que celui de l'exemple 3.5.1. Cette fois on le résout à l'aide d'un découpage horizontal. On trace un petit rectangle de base Δy_i (figure 3.5.6). La hauteur de ce rectangle est égale à l'abscisse en y_i de la courbe supérieure moins l'abscisse en y_i de la courbe inférieure.

$$\begin{aligned} h(y_i) &= x_{\text{supérieur}} - x_{\text{inférieur}} \\ &= \sqrt{y_i} - \frac{y_i}{2} \end{aligned}$$

L'aire du rectangle est $\left(\sqrt{y_i} - \frac{y_i}{2}\right) \Delta y_i$,

et celle de la région entière

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{y_i} - \frac{y_i}{2}\right) \Delta y_i \\ &= \int_{y=0}^{y=4} \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy \\ &= \left[\frac{2}{3} y^{3/2} - \frac{y^2}{4}\right]_0^4 \\ &= \frac{2}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3 - \frac{4^2}{4} \\ &= \frac{16}{3} - 4 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

La réponse est bien la même que celle de l'exemple 3.5.1. On remarque par ailleurs que la solution de l'exemple 3.5.1 est sensiblement plus courte que celle de l'exemple 3.5.4. Dans les problèmes qui suivront, à moins d'avis contraire, on choisira la méthode qui semble la plus facile à calculer.

exemple 3.5.5

Calculer l'aire de la région bornée par les courbes d'équations $y^2 = x$ et $y = x - 2$.

a) Utiliser un découpage horizontal.
b) Utiliser un découpage vertical.

---

solution

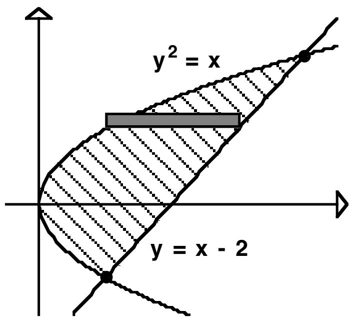


figure 3.5.7

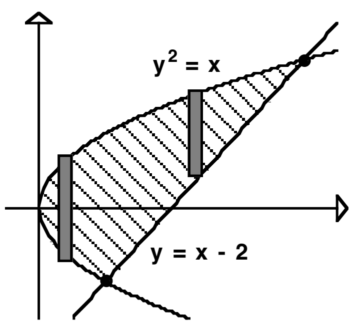


figure 3.5.8

rép: a) $\int_{-1}^{2} ((y + 2) - y^2)\, dy$; b) $\int_{0}^{1} (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))\, dx + \int_{1}^{4} (\sqrt{x} - (x - 2))\, dx$; $\boxed{\frac{9}{2}}$

exemple 3.5.6

Calculer l'aire de la région bornée par les courbes d'équations

$$y^2 = x + 2 \quad \text{et} \quad y^2 = 2x.$$

rép: $\frac{16}{3}$

exemple 3.5.7

Calculer l'aire de l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 4$;

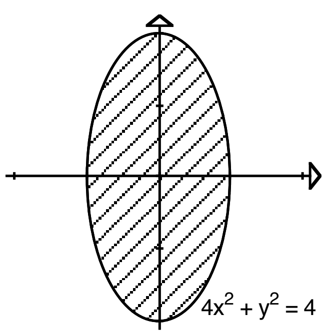


figure 3.5.9

rép: 2π

exemple 3.5.8

Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = 2\sqrt{x}$, la droite tangente à cette courbe au point $x = 1$ et l'axe des x.

solution

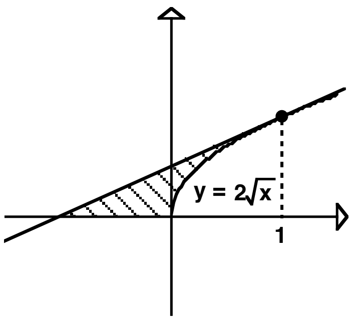


figure 3.5.10

rép: $\frac{2}{3}$

exemple 3.5.9

Sachant que l'aire de la région bornée par les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = cx^3$ $(c > 0)$ est 2/3, on demande de calculer la valeur de c.

solution

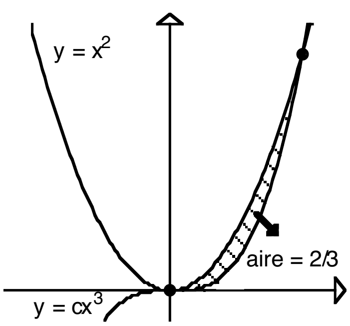


figure 3.5.11

rép: $\frac{1}{2}$

Exercices 3.5

déterminer graphiquement chacune des régions puis, résoudre en utilisant un ***découpage vertical***

1. Calculer l'aire de la région bornée par les courbes suivantes:

   a) $y = 2x - x^2$, $y = 0$;

   b) $y = x^2 - 3$, $y = x - 1$;

   c) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, entre $x = -1$ et $x = -2$;

   d) $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$;

   e) $y = x^3 - x$, $y = 0$.

déterminer graphiquement chacune des régions puis, résoudre en utilisant un ***découpage horizontal***

2. Calculer l'aire de la région bornée par les courbes suivantes:

   a) $x = y^2 - 1$, $x = 0$;

   b) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$;

   c) $y^2 = 2x$, $x - y = 4$;

   d) $y = \frac{2}{x}$, $y = 3 - x$;

   e) $x - 4y + 4 = 0$, $x - y - 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

déterminer graphiquement chacune des régions puis, résoudre en utilisant d'abord un ***découpage vertical*** *et ensuite un* ***découpage horizontal***

3. Calculer l'aire de la région bornée par les courbes suivantes:

   a) $y = x^2$, $y = 4$;

   b) $x = y^2$, $y = 3$, $x = 0$;

   c) $y = \ln x$, $y = -1$, $x = 1$;

   d) $y = \text{arctg } x$, $x = 1$, $y = 0$;

   e) $x^2 = 8y$, $y^2 = x$.

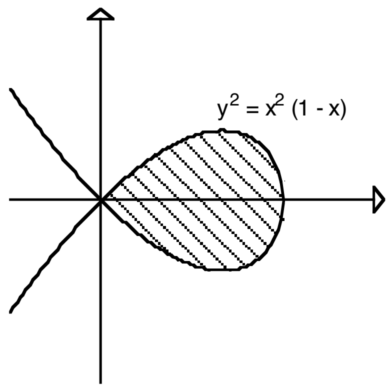
4. Calculer l'aire à l'intérieur

   a) du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$;

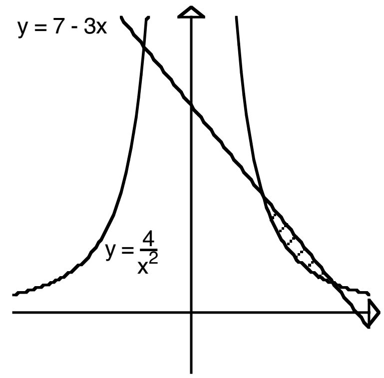
   b) de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

5. Calculer l'aire des régions hachurées.

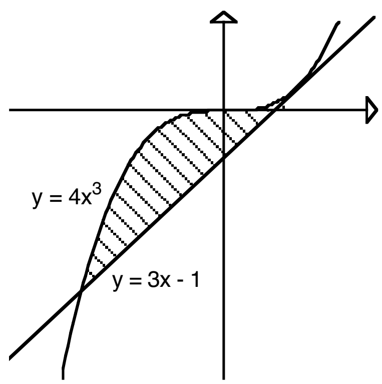
a)



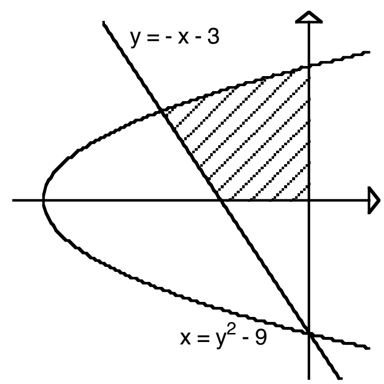
b)



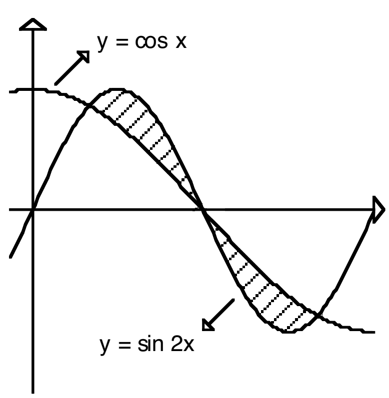
c)



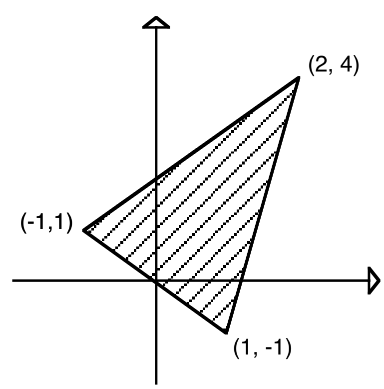
d)



e)



f)



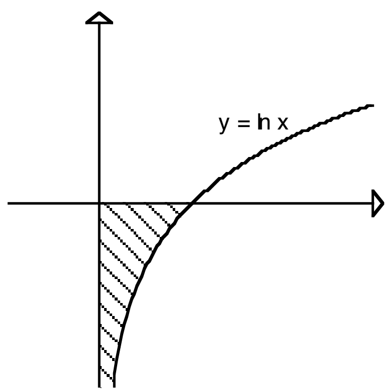
6. La région délimitée par les courbes de $y = 1/x^2$, l'axe des x et les droites $x = 1$ et $x = 2$ est partagée en deux régions de même aire par la droite d'équation $x = c$. Quelle est la valeur de c?

7. Trouver la valeur de c telle que la droite d'équation $y = c$ divise en deux régions d'aires égales le triangle borné par les droites d'équations $y = 2x$, $y = 0$ et $x = 1$.

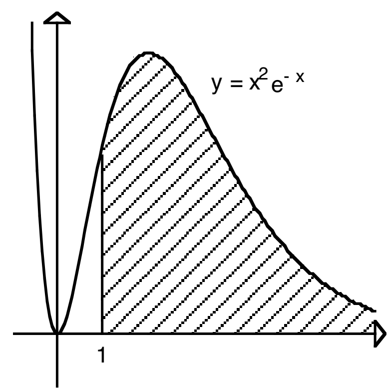
8. La région bornée par les courbes d'équations $y = x - x^2$ et $y = ax$ $(a < 0)$ a une aire de $9/2$. Quelle est la valeur de a ?

9. Calculer si possible l'aire des régions hachurées *non bornées*.

a)



b)



10. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = x^2$, la droite tangente à cette courbe en $x = 2$ et l'axe des y.

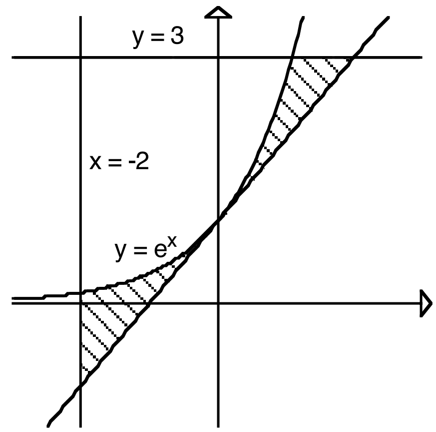
11. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = x^3$ et la droite tangente à cette courbe en $x = 1$.

12. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = 4 - x^2$ la droite tangente à cette courbe au point $x = 1$ et la droite

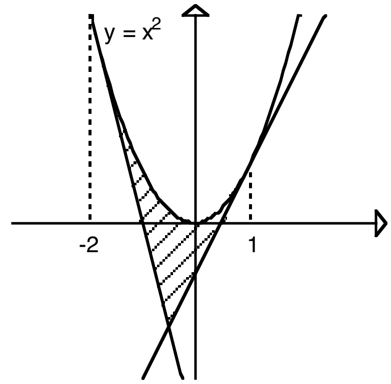
a) $x = 0$ (utiliser un découpage vertical)
b) $y = 0$ (utiliser un découpage horizontal)

13. Calculer l'aire de la région bornée par les courbes $y = e^x$, la droite tangente à cette courbe en $x = 0$ et
    a) la droite $x = -2$,
    b) la droite $y = 3$.

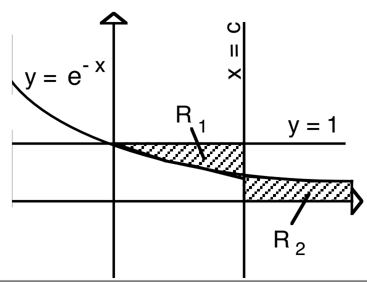
utiliser un découpage vertical en a) un découpage horizontal en b)



14. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = x^2$ et les deux droites tangentes à cette courbe en $x = 1$ et en $x = -2$.



15. Déterminer c pour que les régions R_1 et R_2 aient
    a) des aires égales,
    b) une aire totale minimale.



Réponses 3.5

1. a) $\displaystyle\int_{0}^{2} (2x - x^2)\,dx = \frac{4}{3}$

   b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \big((x - 1) - (x^2 - 3)\big)\,dx = \frac{9}{2}$

   c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \Big(-\frac{1}{x}\Big)\,dx = \ln 2$

   d) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} (2 - e^x)\,dx = 2\ln 2 - 1$

   e) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} \big(-(x^3 - x)\big)\,dx = \frac{1}{2}$

2. a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(-(y^2 - 1)\big)\,dy = \frac{4}{3}$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{2} (4 - y^2)\,dy = \frac{16}{3}$

   c) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \Big((4 + y) - \frac{y^2}{2}\Big)\,dy = 18$

   d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \Big((3 - y) - \frac{2}{y}\Big)\,dy = \frac{3}{2} - 2\ln 2$

   e) $\displaystyle\int_{0}^{1} (y + 2)\,dy + \int_{1}^{2} \big((y + 2) - (4y - 4)\big)\,dy = 4$

3. a) $\boxed{V}$ $\displaystyle\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = \frac{32}{3}$

   $\boxed{H}$ $\displaystyle\int_{0}^{4} 2\sqrt{y}\,dy = \frac{32}{3}$

b) $\boxed{V}$ $\displaystyle\int_0^9 (3 - \sqrt{x})\ dx = 9$

$\boxed{H}$ $\displaystyle\int_0^3 y^2\, dy = 9$

c) $\boxed{V}$ $\displaystyle\int_{1/e}^1 \big(\ln x - (-1)\big)\, dx = \frac{1}{e}$

$\boxed{H}$ $\displaystyle\int_{-1}^0 (1 - e^y)\, dy = \frac{1}{e}$

d) $\boxed{V}$ $\displaystyle\int_0^1 \text{arctg}\ x\, dx = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$

$\boxed{H}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 - \text{tg}\ y)\, dy = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$

e) $\boxed{V}$ $\displaystyle\int_0^4 \Big(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\Big)\, dx = \frac{8}{3}$

$\boxed{H}$ $\displaystyle\int_0^2 \big(\sqrt{8y} - y^2\big)\, dy = \frac{8}{3}$

4. a) 4π b) 6π

5. a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{1}{2}$
   c) $\frac{27}{16}$ d) $\frac{32}{3}$
   e) $\frac{1}{2}$ f) 6

6. $\frac{4}{3}$

7. $2 - \sqrt{2}$

8. -2

9. a) 1 b) $\frac{5}{e}$

10. $\frac{8}{3}$

11. $\dfrac{27}{4}$

12. a) $\displaystyle\int_0^1 \big((-2x + 5) - (4 - x^2)\big)\,dx = \frac{1}{3}$

b) $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{5 - y}{2} - \sqrt{4 - y}\right)dy = \frac{7}{12}$

13. a) $1 - \dfrac{1}{e^2}$ b) $4 - 3\ln 3$

14. $\dfrac{9}{4}$

15. a) 1 b) $-\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ou $\ln 2$

3.6 Calcul du volume d'un solide de révolution

À la section précédente nous avons utilisé l'intégrale pour obtenir l'aire d'une région bornée par deux courbes. Dans cette section nous allons l'utiliser pour obtenir la mesure d'un volume.

Imaginons que l'on fasse tourner une région autour d'une droite fixe (appelée axe de rotation). Chaque point de la région décrira une orbite circulaire délimitant *un solide de révolution*.

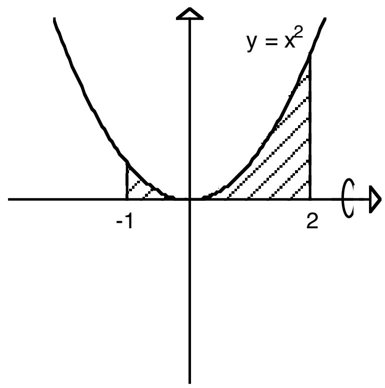


figure 3.6.1

Rotation autour de l'axe des x de la région bornée par les courbes d'équations: $y = x^2$, $y = 0$ entre $x = -1$ et $x = 2$.

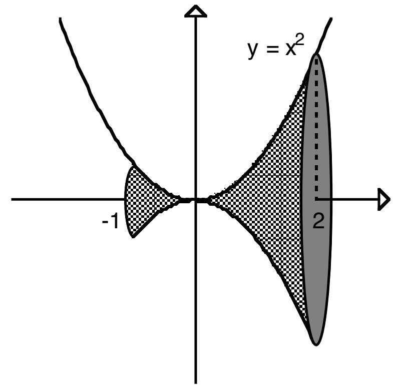


figure 3.6.2

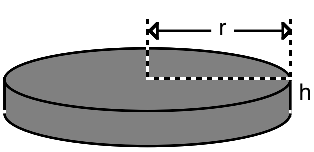
Solide de révolution correspondant.

Dans la plupart des cas, il est possible de calculer le volume d'un solide de révolution en faisant appel au calcul intégral. Nous verrons deux façons de le faire:

a) la méthode du disque,
b) la méthode des enveloppes cylindriques.

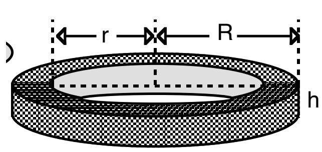
a) la méthode du disque

Avant d'entreprendre cette étude, rappelons d'abord deux formules de la géométrie élémentaire.



Le volume V d'un disque de rayon r et de hauteur h est donné par la formule:

$$V = \pi r^2 h$$



Dans le cas d'un disque troué de rayons R et r et de hauteur h, le volume V devient:

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 h - \pi r^2 h \\ &= \pi (R^2 - r^2) h \end{aligned}$$

calcul du volume d'un solide de révolution

(méthode du disque)

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Si pour toute valeur de l'intervalle $[a,b]$ on a $f(x) \geq g(x) \geq c$ alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation autour de la droite $y = c$ de la région bornée par les deux courbes entre $x = a$ et $x = b$ (figure 3.6.3) est donné par

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi\left(\left(f(x) - c\right)^2 - \left(g(x) - c\right)^2\right) dx$$

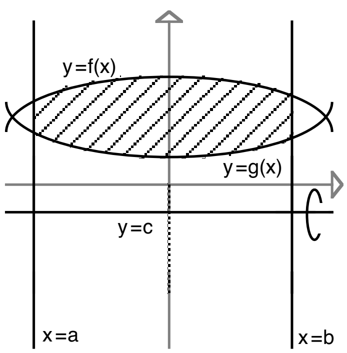


figure 3.6.3

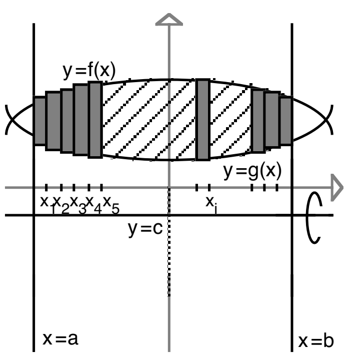


figure 3.6.4

Pour approximer le volume en question, utilisons une somme intégrale comportant un *découpage vertical*.

- subdivisons l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles égaux de longueur: $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$;
- prenons comme représentant, la valeur la plus grande de chaque sous-intervalle: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$;
- construisons dans chaque sous-intervalle un rectangle ayant une base Δx_i et une hauteur $f(x_i) - g(x_i)$; (figure 3.6.4)
- faisons faire une rotation à ces rectangles autour de la droite $y = c$, on obtient n disques troués ; (figure 3.6.5)

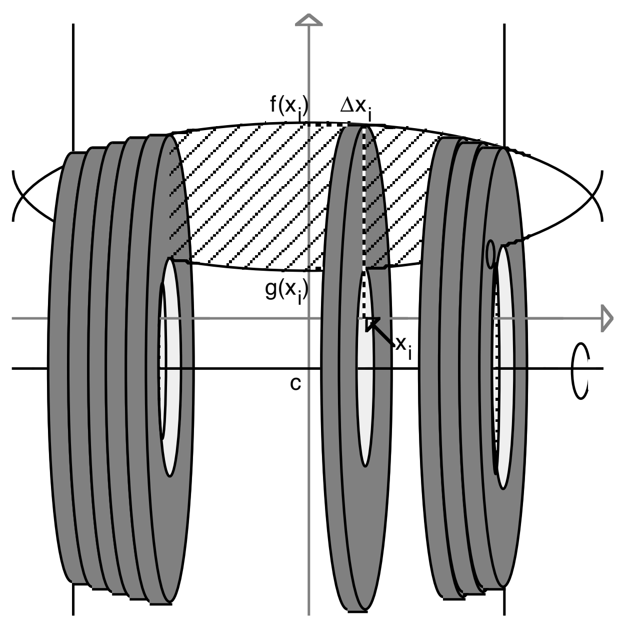


figure 3.6.5

le volume du $i^{\text{ième}}$ disque troué est

$$V_i = \pi\left(R_i^2 - r_i^2\right) h_i$$

$$V_i = \pi\left(\left(f(x_i) - c\right)^2 - \left(g(x_i) - c\right)^2\right) \Delta x_i$$

$R_i = f(x_i) - c$
$r_i = g(x_i) - c$
$h_i = \Delta x_i$

- en additionnant les volumes des n disques troués, on obtient une approximation du volume cherché.

$$V \sim \sum_{i=1}^{n} \pi\left(\left(f(x_i) - c\right)^2 - \left(g(x_i) - c\right)^2\right) \Delta x_i$$

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\left(\left(f(x_i) - c\right)^2 - \left(g(x_i) - c\right)^2\right) \Delta x_i$$

f et g sont continues sur $[a,b]$, on peut donc utiliser le théorème fondamental du calcul

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi\left(\left(f(x) - c\right)^2 - \left(g(x) - c\right)^2\right) dx$$

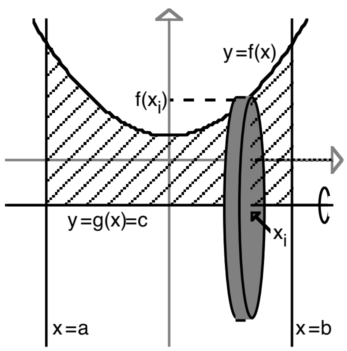


figure 3.6.6

Si pour toute valeur de l'intervalle [a,b] on a $f(x) \geq g(x) = c$, c'est-à-dire si la fonction g correspond à l'axe de rotation sur l'intervalle [a,b] (figure 3.6.6), la somme intégrale sera constituée de disques non troués et le volume deviendra

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi\left(f(x) - c\right)^2 dx$$

Si pour toute valeur de l'intervalle [a,b] on a $f(x) \leq g(x) \leq c$, c'est-à-dire si la région se trouve sous l'axe de rotation sur l'intervalle [a,b] (figure 3.6.7), la mesure des rayons se trouve inversée et le volume devient

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi\left(\left(c - f(x)\right)^2 - \left(c - g(x)\right)^2\right) dx$$

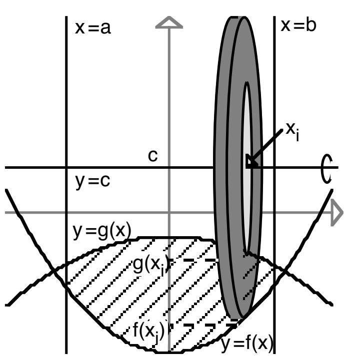


figure 3.6.7

Lorsque l'axe de rotation traverse la région, la solution du problème dépend du cas considéré. Nous aurons l'occasion d'étudier quelques exemples de problèmes reliés à cette situation.

Évidemment la rotation pourra se faire autour d'un axe vertical. Dans ce cas la méthode du disque exige un *découpage horizontal*. On solutionne ce genre de problème en utilisant les mêmes règles que pour un découpage vertical. Nous verrons un peu plus loin plusieurs exemples de problèmes utilisant un découpage horizontal.

☞

La méthode du disque utilise toujours
un découpage perpendiculaire à l'axe de rotation

exemple 3.6.1

Trouver le volume engendré par la rotation de la région bornée par les courbes d'équations $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$

a) autour de l'axe des x,

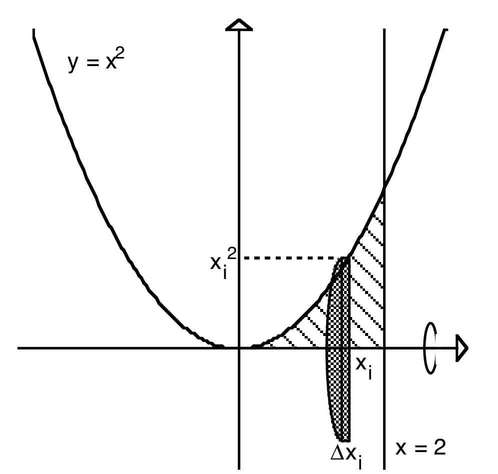


figure 3.6.8

Pour obtenir le volume du solide de révolution en utilisant la méthode du disque, considérons une somme intégrale qui utilise un découpage vertical.

Traçons dans la région hachurée un rectangle vertical. Lorsque ce rectangle tourne autour de l'axe des x, il engendre un disque. Le volume de ce disque (non troué) est

$$V_i = \pi r_i^2 h_i \quad \text{où} \quad \begin{cases} r_i = x_i^2 \\ h_i = \Delta x_i \end{cases}$$

$$V_i = \pi (x_i^2)^2 \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \qquad V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi (x_i^2)^2 \Delta x_i$$

$$V = \int_{x=0}^{x=2} \pi x^4 \, dx = \left[\frac{\pi x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

b) autour de la droite $y = 4$,

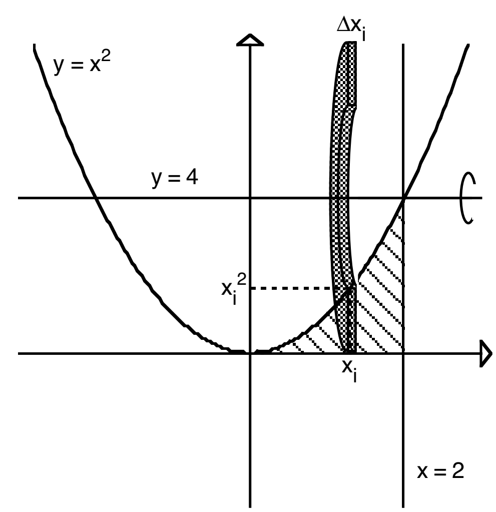


figure 3.6.9

rép: $\frac{224\pi}{15}$

c) autour de l'axe des y,

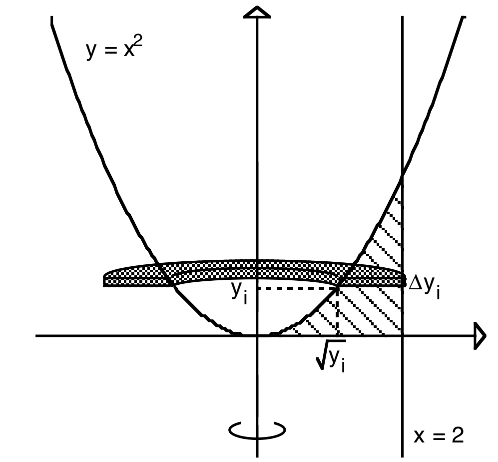


figure 3.6.10

rép: 8π

d) autour de la droite x= 2.

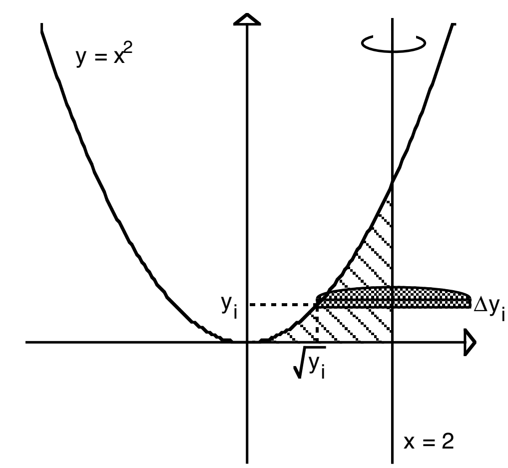


figure 3.6.11

rép: $\frac{8\pi}{3}$

b) la méthode des enveloppes cylindriques

Il existe une autre façon d'obtenir le volume d'un solide de révolution. Au lieu d'approximer le volume à l'aide d'une somme intégrale constituée de disques, on utilise plutôt des enveloppes cylindriques.

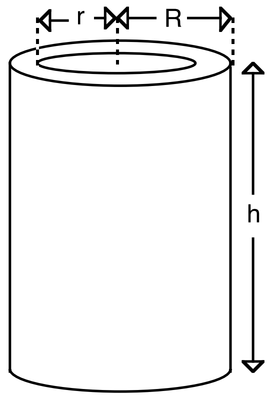


figure 3.6.12

Considérons un disque troué ayant un rayon extérieur R, un rayon intérieur r et une hauteur h. Le volume V du disque troué est donné par

$$V = \pi(R^2 - r^2)\,h$$

$$V = \pi(R - r)(R + r)\,h$$

Lorsque $R \to r$ le disque troué devient ce qu'on appelle une enveloppe cylindrique avec une paroi très mince de $\Delta r = R - r$. Le volume de cette enveloppe cylindrique sera donc

$$V = \pi\,(\Delta r)\,(r + r)\,h$$

$$V = 2\pi r h \Delta r$$

> Le volume V d'une enveloppe cylindrique de rayon r et de hauteur h ayant une paroi d'épaisseur Δr est donné par la formule
>
> $$V = 2\pi r h \Delta r$$

calcul du volume d'un solide de révolution

(méthode des enveloppes cylindriques)

> Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle [a,b]. Si $a \geq c$ et si, pour toute valeur de l'intervalle [a,b] on a $f(x) \geq g(x)$ alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation autour de la droite $x = c$ de la région bornée par les deux courbes entre $x = a$ et $x = b$ (figure 3.6.13) est donné par
>
> $$V = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi\,(x - c)\big(f(x) - g(x)\big)\;dx$$

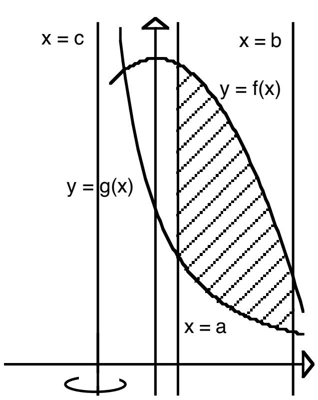


figure 3.6.13

Pour approximer le volume en question, utilisons encore une fois une somme intégrale comportant un *découpage vertical*.

- subdivisons l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles égaux de longueur: $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$;
- prenons comme représentant, la valeur la plus grande de chaque sous-intervalle: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$;
- construisons dans chaque sous-intervalle un rectangle ayant une base Δx_i et une hauteur $f(x_i) - g(x_i)$; (figure 3.6.14)
- faisons faire une rotation à ces rectangles autour de la droite $x = c$, on obtient n enveloppes cylindriques ; (figure 3.6.15)

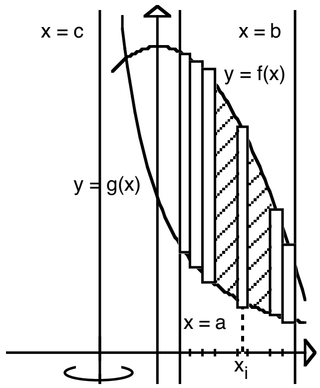


figure 3.6.14

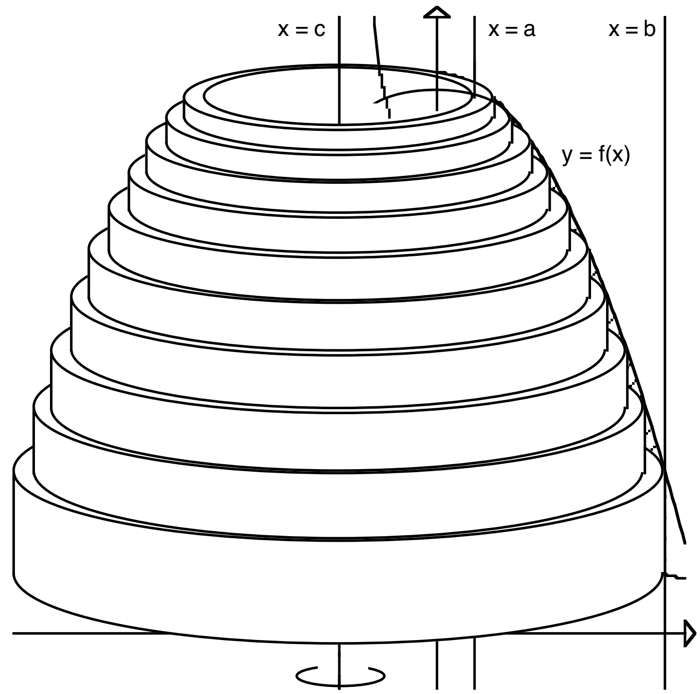


figure 3.6.15

Le volume de la i ième enveloppe est

$$V_i = 2\pi r_i h_i \Delta r_i$$

$$V_i = 2\pi(x_i - c)\big((f(x_i) - g(x_i)\big)\Delta x_i$$

$r_i = x_i - c$
$h_i = f(x_i) - g(x_i)$
$\Delta r_i = \Delta x_i$
(voir figure 3.6.16)

- en additionnant les volumes des n enveloppes cylindriques, on obtient une approximation du volume cherché.

$$V \sim \sum_{i=1}^{n} 2\pi(x_i - c)\big(f(x_i) - g(x_i)\big)\Delta x_i$$

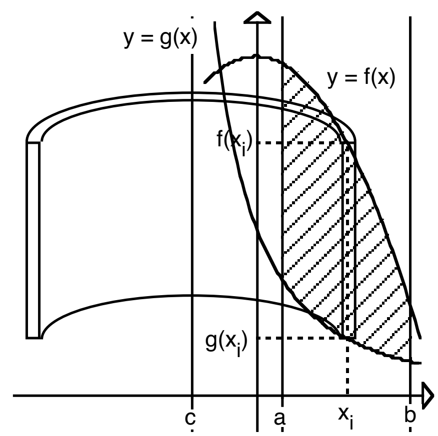


figure 3.6.16

$$\Rightarrow \qquad V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\,(x_i - c)\big(f(x_i) - g(x_i)\big)\,\Delta x_i$$

$$V = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi(x - c)\big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

La rotation pourra aussi se faire autour d'un axe horizontal. Dans ce cas la méthode exige un *découpage horizontal*.

La méthode des enveloppes cylindriques utilise toujours un découpage parallèle à l'axe de rotation.

exemple 3.6.2

comparer chacune des solutions avec celles de l'exemple 3.6.1

Trouver le volume engendré par la rotation de la région bornée par les courbes d'équations $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$

a) autour de l'axe des y,

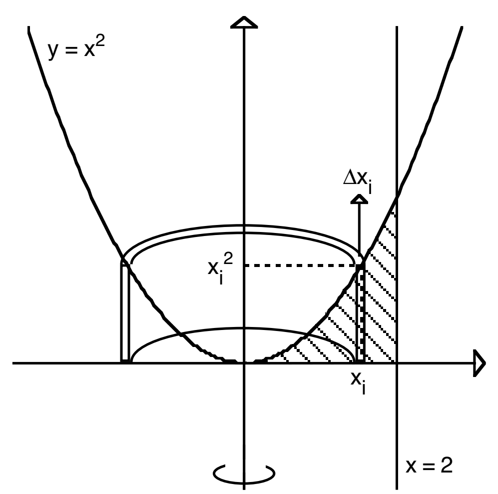


figure 3.6.17

Pour obtenir le volume du solide de révolution en utilisant la méthode des enveloppes cylindriques, considérons une somme intégrale qui utilise un découpage vertical. Traçons dans la région hachurée un rectangle vertical. Lorsque ce rectangle tourne autour de l'axe des y, il engendre une enveloppe cylindrique dont le volume est

$$V_i = 2\pi\, r_i\, h_i\, \Delta r_i \quad \text{où} \quad \begin{cases} r_i = x_i \\ h_i = x_i^2 \\ \Delta r_i = \Delta x_i \end{cases}$$

$$V_i = 2\pi (x_i)(x_i^2)\,\Delta x_i$$

$$\Rightarrow \qquad V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\, x_i^3\, \Delta x_i$$

$$V = \int_{x=0}^{x=2} 2\pi\, x^3\, dx = \left[2\pi \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi$$

b) autour de la droite $x = 2$,

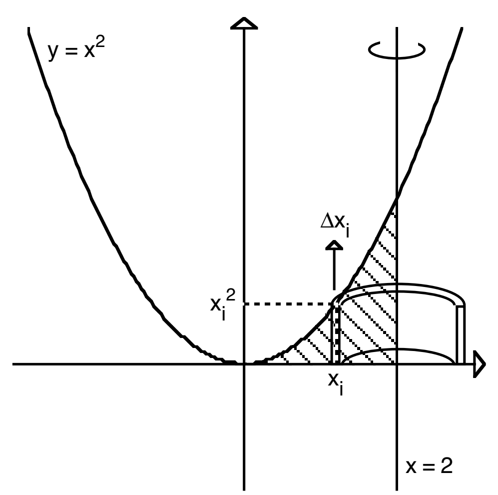


figure 3.6.18

rép: $\frac{8\pi}{3}$

c) autour de l'axe des x,

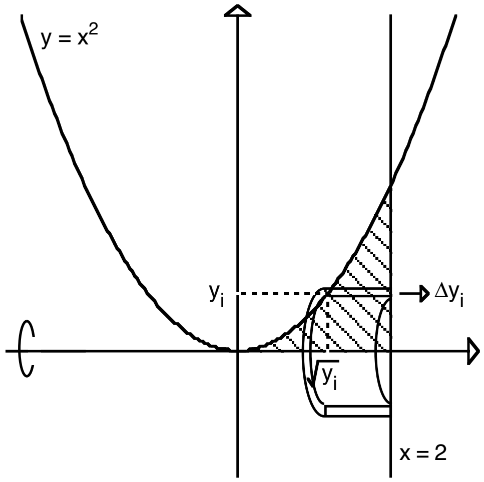


figure 3.6.19

rép: $\frac{32\pi}{5}$

d) autour de la droite $y = 4$.

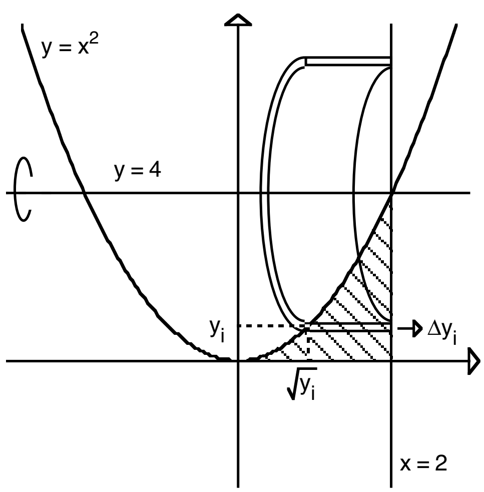


figure 3.6.20

rép: $\frac{224\pi}{15}$

exemple 3.6.3

Trouver le volume engendré par la rotation de la région bornée par les courbes d'équations $y = x^2$, $y = x+6$ autour de l'axe des y.

(Utiliser la méthode de votre choix)

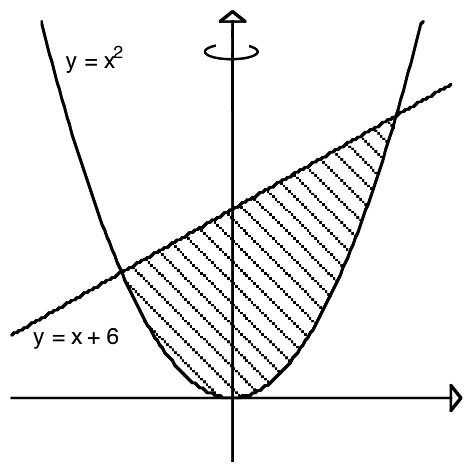


figure 3.6.21

rép: $\frac{63\pi}{2}$

exemple 3.6.4

Une sphère de rayon 3 cm est coupée en trois morceaux en divisant son diamètre en trois parties égales. Calculer le volume du morceau au centre.

(Utiliser la méthode de votre choix)

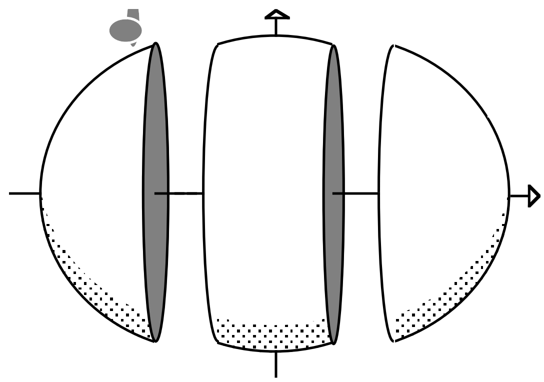


figure 3.6.22

rép: $\frac{52\pi}{3}$ *cm*^{3}

Exercices 3.6

déterminer graphiquement chacune des régions

Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation, autour de l'axe donné, de la région comprise entre les courbes d'équations:

laisser votre réponse sous forme symbolique (n'évaluer pas les intégrales)

1. $y = 3\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$;

   a) autour de l'axe des x,
   b) autour de l'axe des y,
   c) autour de la droite $x = 1$,
   d) autour de la droite $y = 3$.

   (utiliser la méthode du disque puis, celle des enveloppes cylindriques)

laisser votre réponse sous forme symbolique (n'évaluer pas les intégrales)

2. $y = \frac{x}{2}$, $y = -1$, $x = 0$;

   a) autour de l'axe des x,
   b) autour de l'axe des y,
   c) autour de la droite $y = -1$,
   d) autour de la droite $x = -3$.

   (utiliser la méthode du disque puis, celle des enveloppes cylindriques)

laisser votre réponse sous forme symbolique (n'évaluer pas les intégrales)

3. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;

   a) autour de l'axe des x,
   b) autour de l'axe des y.

   (utiliser la méthode du disque puis, celle des enveloppes cylindriques)

4. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$;

   a) autour de l'axe des x,
   b) autour de la droite $y = 2$,
   c) autour de la droite $x = 4$.

5. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = -\pi$, $x = 0$;

   a) autour de l'axe des x,
   b) autour de l'axe des y.

6. $y = e^x$, $y = 1$, $x = -1$;

   a) autour de l'axe des x,
   b) autour de l'axe des y.

7. $y^2 = 2x$, $y = x - 4$; autour de l'axe des x.

8. $y = 2x$, $y = 4$, $x = 0$;

   a) autour de la droite $y = 2$,
   b) autour de la droite $y = 3$. (Ne pas évaluer l'intégrale.)

9. Trouver le volume de la soucoupe volante engendrée par la rotation autour de l'axe des y de la région comprise entre les courbes

$$y = \frac{x^4 - 1}{4}\ ,\ y = \frac{1 - x^6}{6}\ ,\ x = 0\ ,\ x = 1$$

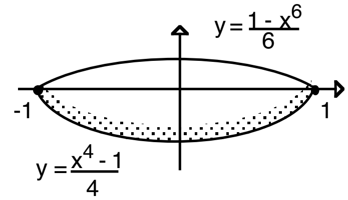


figure 3.6.23

10. Déterminer le volume d'une sphère de rayon r en faisant tourner autour de l'axe des x le demi-cercle de rayon r d'équation

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

11. Calculer le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe des x de la partie supérieure de la boule elliptique définie par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ .$$

12. Soit la région délimitée par les courbes d'équations

$$y = x \ \text{ et } \ y = ax^2 \quad (a > 0)$$

Sachant que le volume engendré par la rotation de cette région autour de l'axe des y est $\pi/48$, trouver la valeur de a.

13. Soit la région délimitée par les courbes d'équations

$$y = \sqrt{x}\ ,\ y = \frac{x}{2} \ \text{ de } \ x = 0 \ \text{ à } \ x = a \quad (0 < a < 3)$$

Sachant que le volume engendré par la rotation de cette région autour de l'axe des x est $\pi a^3/3$, trouver la valeur de a.

14. Soit la région (non bornée), délimitée par les courbes d'équations:

$$y = \frac{1}{x}\ ,\ \text{l'axe des x et à droite de } x = 1.$$

   a) Calculer l'aire de cette région.
   b) Calculer le volume engendré par la rotation de cette région autour de l'axe des x.

15. Calculer le volume du solide de révolution obtenu par la rotation autour de l'axe des x de la région bornée par la boucle d'équation

$$2y^2 = x(x^2 - 4)$$

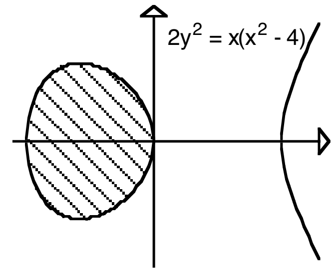


figure 3.6.24

16. Soit le triangle formé par les points (1,3), (3,1) et (3,3). Calculer le volume du solide engendré par la rotation de ce triangle autour
    a) de l'axe des x,
    b) de la droite $x = -1$.

17. Un trou cylindrique de 3 cm de rayon est percé dans une sphère de 5 cm de rayon. Quel est le volume de matériau enlevé ?

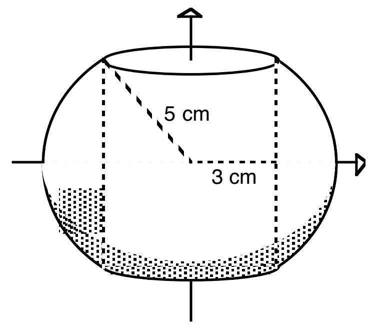


figure 3.6.25

18. Trouver le volume d'un tore (beignet) engendré par la rotation autour de la droite $x = 3$ du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

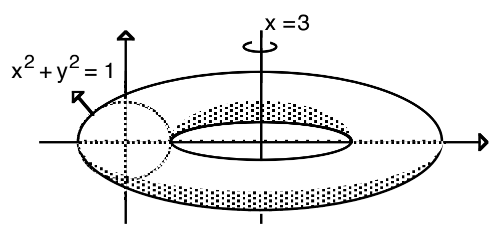


figure 3.6.26

Réponses 3.6

1. a) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_0^1 \pi(3\sqrt{x})^2\,dx = \frac{9\pi}{2}$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_0^3 2\pi y\left(1 - \frac{y^2}{9}\right)dy = \frac{9\pi}{2}$

b) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_0^3 \pi\left(1^2 - \left(\frac{y^2}{9}\right)^2\right)dy = \frac{12\pi}{5}$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_0^1 2\pi x(3\sqrt{x})\,dx = \frac{12\pi}{5}$

c) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_0^3 \pi\left(1 - \frac{y^2}{9}\right)^2 dy = \frac{8\pi}{5}$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_0^1 2\pi(1 - x)(3\sqrt{x})\,dx = \frac{8\pi}{5}$

d) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_0^1 \pi\left(3^2 - (3 - 3\sqrt{x})^2\right)dx = \frac{15\pi}{2}$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_0^3 2\pi(3 - y)\left(1 - \frac{y^2}{9}\right)dy = \frac{15\pi}{2}$

2. a) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{-2}^0 \pi\left(1^2 - \left(\frac{-x}{2}\right)^2\right)dx = \frac{4\pi}{3}$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{-1}^0 2\pi(-y)(-2y)\,dy = \frac{4\pi}{3}$

b) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{-1}^0 \pi(-2y)^2\,dy = \frac{4\pi}{3}$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{-2}^{0} 2\pi\,(-x)\left(\frac{x}{2}+1\right)dx = \frac{4\pi}{3}$

c) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{-2}^{0} \pi\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 dx = \frac{2\pi}{3}$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2\pi\,(y+1)(-2y)\,dy = \frac{2\pi}{3}$

d) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{-1}^{0} \pi\left((3)^2 - (2y+3)^2\right) dy = \frac{14\pi}{3}$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{-2}^{0} 2\pi\,(x+3)\left(\frac{x}{2}+1\right)dx = \frac{14\pi}{3}$

3. a) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{1}^{e} \pi\,(\ln x)^2\,dx = \pi\,(e-2)$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{0}^{1} 2\pi\,y\,(e - e^y)\,dy = \pi(e-2)$

b) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \pi\,(e^2 - e^{2y})\,dy = \pi\frac{(e^2+1)}{2}$

$\boxed{E}$ $\displaystyle\int_{1}^{e} 2\pi\,(x)(\ln x)\,dx = \pi\frac{(e^2+1)}{2}$

4. a) $\frac{3\pi}{4}$

b) $\pi\left(4(\ln 4) - \frac{3}{4}\right)$

c) $2\pi\left(4(\ln 4) - 3\right)$

5. a) $\frac{\pi^2}{2}$

b) $2\pi^2$

6. a) $\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^2}\right)$

   b) $\pi\left(\frac{4}{e} - 1\right)$

7. $\frac{128\pi}{3}$

8. a) $\frac{20\pi}{3}$

   b) $\frac{31\pi}{6}$ $\left(\int_3^4 2\pi\,(y - 3)\left(\frac{y}{2}\right)dy + \int_0^2 2\pi\,(3 - y)\left(\frac{y}{2}\right)dy\right)$

9. $\frac{7\pi}{24}$

10. $4\pi r^3/3$

11. $\frac{4}{3}\pi ab^2$

12. $a = 2$

13. $a = \frac{6}{5}$

14. a) l'aire est infinie

    b) π

15. 2π

16. a) $\frac{28\pi}{3}$

    b) $\frac{40\pi}{3}$

17. $\frac{244\pi}{3}$ cm^3

18. $6\pi^2$

3.7 Longueur d'un arc de courbe

Sous certaines conditions, l'intégration permet de calculer la longueur d'une courbe même si celle-ci n'est pas une figure régulière (droite, polygone, cercle). Comme pour les applications précédentes, nous chercherons à approximer la longueur de la courbe à l'aide d'une somme intégrale puis, à évaluer cette longueur en utilisant l'intégrale définie.

calcul de la longueur d'un arc de courbe

Soit $y = f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle [a,b]. Si f' est continue sur l'intervalle]a,b[alors la longueur L de l'arc de courbe défini par la fonction f entre $x = a$ et $x = b$ est donnée par

$$L = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

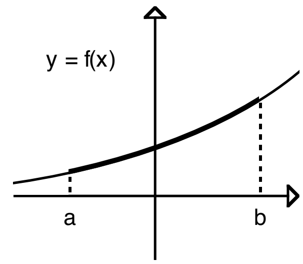


figure 3.7.1

Nous pouvons approximer la longueur de l'arc de courbe de la façon suivante:

- subdivisons l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles égaux de longueur: $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ \ldots \ , \Delta x_i, \ \ldots \ , \Delta x_n$; cette partition de l'intervalle détermine les points: $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots , P_n$;

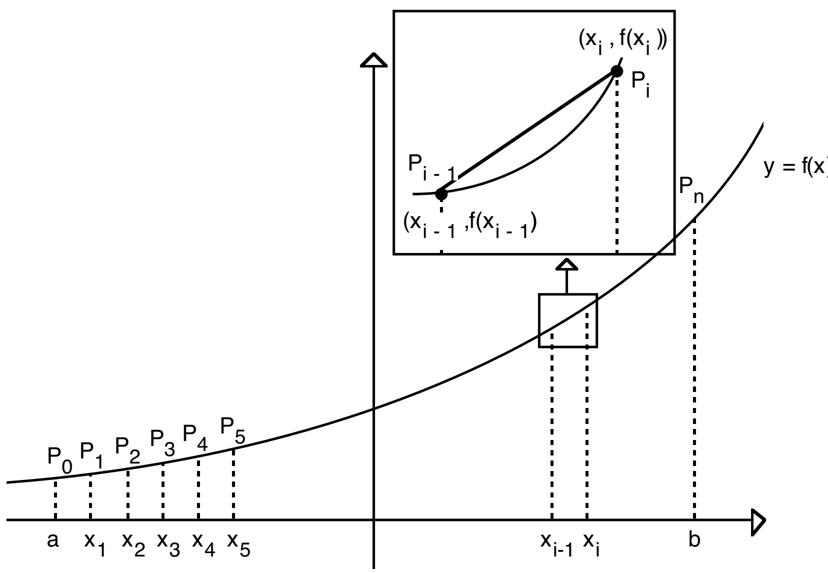


figure 3.7.2

- joignons ces points par des segments de droite; on obtient alors une ligne polygonale qui constitue une approximation de la longueur d'arc cherchée.

La longueur du i^e segment de cette ligne brisée est

par le théorème de Pythagore

$$\sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}$$

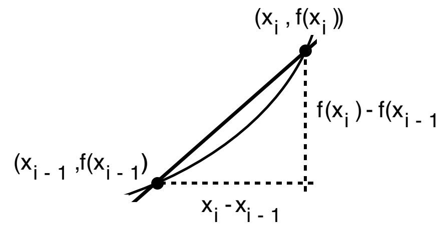


figure 3.7.3

La somme des n segments constitue une approximation de la valeur cherchée

$$L \sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}$$

par hypothèse

a) f est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$
b) f est dérivable sur $]x_{i-1}, x_i[$

Selon le *théorème de la moyenne* il existe une valeur $x = c_i$ dans chaque sous-intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ telle que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\Rightarrow \quad L \sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f'(c_i)\,(x_i - x_{i-1})\right)^2}$$

$$L \sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f'(c_i)\right)^2\left(x_i - x_{i-1}\right)^2}$$

$$L \sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}\,(x_i - x_{i-1})$$

$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$

$$L \sim \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i$$

La longueur de l'arc de courbe sera donc de

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i \quad \text{où} \quad x_{i-1} < c_i < x_i$$

$$L = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

exemple 3.7.1

Trouver la longueur de l'arc de courbe définie par l'équation

$$f(\mathrm{x}) = \sqrt{\mathrm{x}^3} \text{ entre } \mathrm{x} = 1 \text{ et } \mathrm{x} = 4.$$

---

solution

a) La fonction f est continue sur $[0, \infty[$,
$\Rightarrow$ f est continue sur $[1,4]$.

b) $f'(\mathrm{x}) = \dfrac{3\sqrt{\mathrm{x}}}{2}$
La fonction f' est continue sur $[0, \infty[$,
$\Rightarrow$ f' est continue sur $]1,4[$.

La longueur L de la courbe entre x = 1 et x = 4 est donnée par

$$\mathrm{L} = \int_{\mathrm{x}=1}^{\mathrm{x}=4} \sqrt{1 + \left(f'(\mathrm{x})\right)^2}\, d\mathrm{x}$$

$$= \int_{\mathrm{x}=1}^{\mathrm{x}=4} \sqrt{1 + \left(\frac{3\sqrt{\mathrm{x}}}{2}\right)^2}\, d\mathrm{x}$$

$$= \int_{\mathrm{x}=1}^{\mathrm{x}=4} \sqrt{1 + \frac{9\mathrm{x}}{4}}\, d\mathrm{x}$$

si $u = 4 + 9x$
$du = 9\, dx$

$$= \int_{\mathrm{x}=1}^{\mathrm{x}=4} \frac{\sqrt{4 + 9\mathrm{x}}}{2}\, d\mathrm{x}$$

$$= \frac{1}{18} \int_{\mathrm{u}=13}^{\mathrm{u}=40} \sqrt{\mathrm{u}}\, d\mathrm{u}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{\mathrm{u}^3}}{27}\right]_{13}^{40}$$

$$= \frac{\sqrt{40^3}}{27} - \frac{\sqrt{13^3}}{27}$$

$$= \frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27}$$

$$= 7.63$$

Lorsque la variable x est exprimée en fonction de la variable y, nous pouvons à l'aide d'un raisonnement semblable au précédent, démontrer le résultat suivant.

calcul de la longueur d'un arc de courbe

Soit $x = f(y)$ une fonction continue sur l'intervalle [c,d]. Si f' est continue sur l'intervalle]c,d[alors la longueur L de l'arc de courbe défini par la fonction f entre $y = c$ et $y = d$ est donnée par

$$L = \int_{y=c}^{y=d} \sqrt{1 + \left(f'(y)\right)^2}\, dy$$

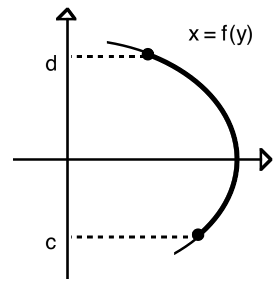


figure 3.7.4

exemple 3.7.2

Trouver la longueur de l'arc de courbe définie par l'équation

$f(y) = \frac{2}{3}y^{3/2} - 1$ entre les points (-1,0) et (17,9)

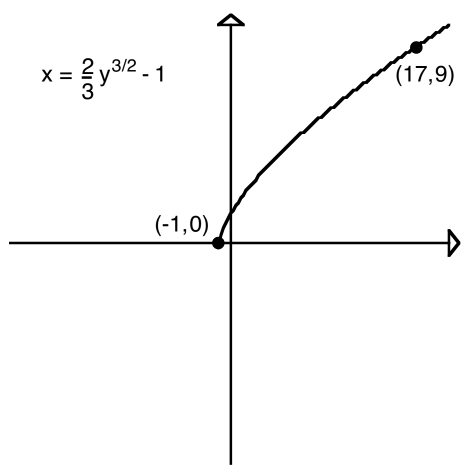


figure 3.7.5

rép: $\frac{2}{3}(10\sqrt{10} - 1) = 20{,}42$

exemple 3.7.3

Trouver la longueur de l'arc de courbe définie par l'équation

$$y = \frac{x^3}{24} + \frac{2}{x} \quad \text{entre} \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = 4.$$

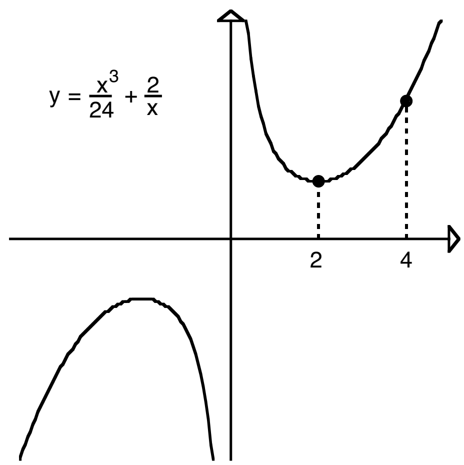


figure 3.7.6

rép: $\frac{17}{6} = 2.83$

Exercices 3.7

1. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \sqrt{25 - x^2}$$
pour $0 \le x \le \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \ln(\cos x)$$
pour $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$.

3. Trouver la longueur du segment de droite $y = 3x - 2$ entre les points $(1,1)$ et $(4,10)$.

   a) Utiliser le résultat de la page 3-77.
   b) Utiliser le résultat de la page 3-80.
   c) Utiliser le théorème de Pythagore.

4. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \frac{2}{\sqrt{27}}(x - 2)^{3/2}$$
pour $2 \le x \le 11$.

5. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
pour $2 \le x \le 3$.

6. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par $y = x^{2/3}$ pour $1 \le x \le 8$.

   a) Utiliser le résultat de la page 3-77.
   b) Utiliser le résultat de la page 3-80.

7. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$$
pour $1 \le x \le 2$.

8. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \frac{x^4 - 12x + 3}{6x}$$
pour $2 \le x \le 3$.

9. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
pour $0 \leq x \leq 1$.

10. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \ln(1 - x^2)$$
pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

11. Trouver la longueur totale de la boucle définie par l'équation $9y^2 = x(x - 3)^2$.

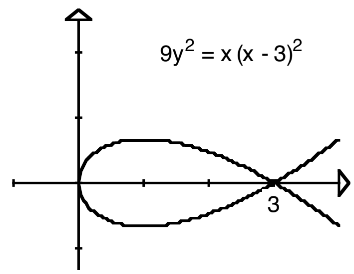


figure 3.7.7

12. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \ln x$$
entre $x = 1$ et $x = 2\sqrt{2}$.

13. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par l'équation
$$y = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$$
pour $2 \leq x \leq 4$.

14. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par $16x = y^2$ entre les points $(4,8)$ et $(4,-8)$.

Réponses 3.7

1. $\frac{5\pi}{4} = 3{,}93$

2. $\ln(2+\sqrt{3}) = 1{,}32$

3. a) , b) et c) $3\sqrt{10} = 9{,}49$

4. 14

5. $2\sqrt{2} - \sqrt{3} = 1{,}10$

6. a) et b) $\frac{80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}}{27} = 7{,}63$

7. $\frac{3 + 2\ln 2}{4} = 1{,}10$

8. $\frac{13}{4} = 3{,}25$

9. $\frac{e^2 - 1}{2e} = 1{,}18$

10. $\ln 3 - \frac{1}{2} = 0{,}60$

11. $4\sqrt{3} = 6{,}93$

12. $3 - \sqrt{2} - \ln(2 - \sqrt{2}) = 2{,}12$

13. $\ln(e^4 + 1) - 2 = 2{,}02$

14. $8\sqrt{2} + 4\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 18{,}36$

3.8 Aire d'une surface de révolution

Dans cette section nous allons utiliser l'intégrale définie pour calculer l'aire d'une surface de révolution. On appelle surface de révolution une surface engendrée par la rotation d'un arc de courbe autour d'une droite.

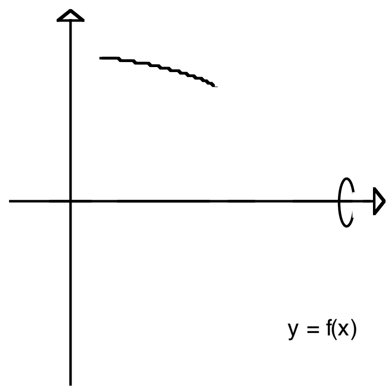


figure 3.8.1

Rotation autour de l'axe des x de l'arc de courbe définie par $y = f(x)$.

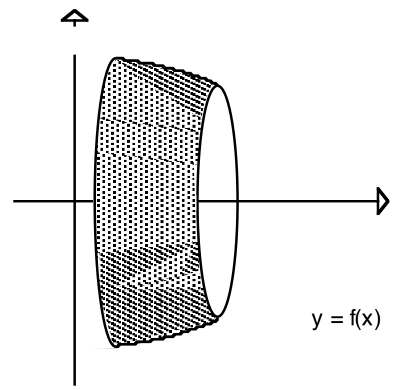


figure 3.8.2

Surface de révolution correspondante (région hachurée).

D'abord rappelons les formules permettant d'obtenir

a) l'aire latérale d'un cône,
b) l'aire latérale d'un cône tronqué.

Pour obtenir l'aire latérale d'un cône de rayon R et de hauteur latérale S (figure 3.8.3), il suffit de couper ce cône selon sa hauteur latérale et de le déplier pour en faire une surface plane. On obtient ainsi un secteur circulaire de rayon S (figure 3.8.4).

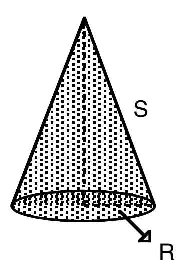


figure 3.8.3

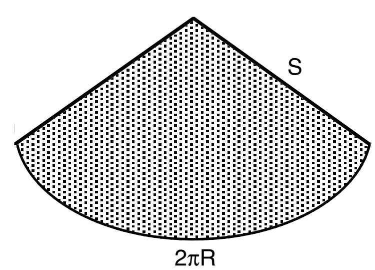


figure 3.8.4

$$\frac{\textit{aire du secteur circulaire}}{\textit{aire du cercle}} = \frac{\textit{longueur de l'arc du secteur}}{\textit{circonférence du cercle}}$$

L'aire du secteur circulaire est obtenue à l'aide d'un simple rapport.

$$\frac{\text{aire du secteur circulaire}}{\pi S^2} = \frac{2\pi R}{2\pi S}$$

Donc l'aire du secteur circulaire est

$$\frac{(2\pi R)(\pi S^2)}{2\pi S} = \pi RS$$

et par conséquent

L'aire latérale d'un cône de rayon R et de hauteur latérale S est πRS.

On tranche maintenant le cône de la figure 3.8.3 à l'aide d'une coupe horizontale et on considère la partie du bas. On obtient un cône tronqué de rayons r et R et de hauteur latérale s (figure 3.8.5).

L'aire latérale du cône tronqué est obtenue en soustrayant l'aire latérale du cône de rayon r de l'aire latérale du cône de rayon R.

$$\pi R(S + s) - \pi rS$$

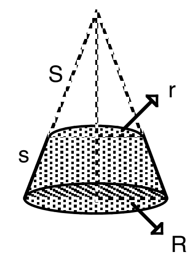


figure 3.8.5

Les côtés correspondants étant proportionnels dans les triangles semblables, nous avons

$$\frac{S}{S + s} = \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow \qquad RS = r(S + s) \qquad (*)$$

Il en découle que

puisque par (*) Rs = r(S + s)

$$\begin{aligned} \pi R(S + s) - \pi rS &= \pi Rs + \pi Rs - \pi rS \\ &= \pi r(S + s) + \pi Rs - \pi rS \\ &= \pi rS + \pi rs + \pi Rs - \pi rS \\ &= \pi rs + \pi Rs \\ &= \pi(r + R)s \end{aligned}$$

et par conséquent

L'aire latérale d'un cône tronqué de rayons r et R et de hauteur latérale s est $\pi(r + R)s$.

Cette dernière formule combinée à l'intégrale définie permettra d'évaluer l'aire d'une surface engendrée par la révolution d'un arc de courbe autour d'un axe.

calcul de l'aire d'une surface engendrée par la révolution d'un arc de courbe autour de l'axe des x

Soit $y = f(x)$ une fonction continue et non-négative sur l'intervalle [a,b]. Si f' est continue sur l'intervalle]a,b[alors l'aire de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe des x de la courbe définie par la fonction f entre $x = a$ et $x = b$ est donnée par

$$A_{sr} = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi\, f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx$$

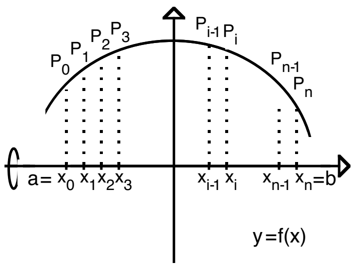


figure 3.8.6

Nous pouvons approximer l'aire de la surface de révolution de la façon suivante:

- subdivisons l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles égaux de longueur: $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots \Delta x_{i-1}, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$; cette partition de l'intervalle détermine les points: $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_{i-1}, P_i \ldots, P_n$;

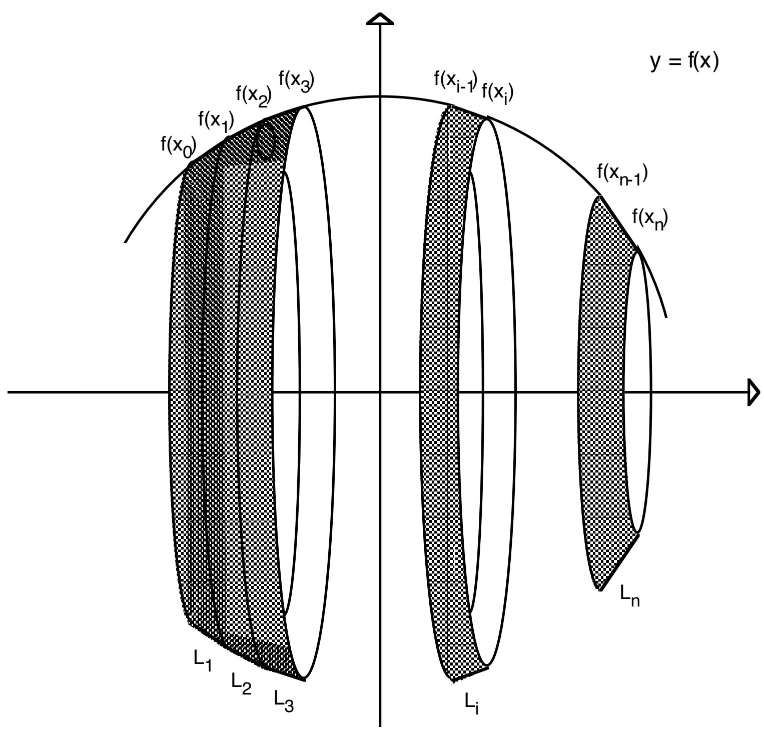


figure 3.8.7

l'aire latérale d'un cône tronqué est donnée par la formule:

$\pi(r + R)s$

- joignons ces points par des segments de droite; on obtient alors une ligne polygonale; dans sa rotation autour de l'axe des x, le $i^{\text{ème}}$ segment tracé engendre un cône tronqué dont l'aire latérale est

$$\pi\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\, L_i$$

(L_i correspond à la longueur du $i^{\text{ème}}$ segment)

La somme des n aires constitue une approximation de la valeur cherchée

$$A_{sr} \sim \sum_{i=1}^{n} \pi\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\, L_i$$

à la section précédente on a montré que

$$L_i = \sqrt{1 + \big(f'(c_i)\big)^2}\, \Delta x_i$$

$$A_{sr} \sim \sum_{i=1}^{n} \pi\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\sqrt{1 + \big(f'(c_i)\big)^2}\,\Delta x_i \quad \text{où } x_{i-1} < c_i < x_i$$

L'aire de la surface de révolution est donc

$$A_{sr} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\sqrt{1 + \big(f'(c_i)\big)^2}\,\Delta x_i$$

Puisque $x_{i-1} < c_i < x_i$ alors lorsque $n \to \infty$ on a $c_i \to x_{i-1}$ et $c_i \to x_i$

$$A_{sr} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\big(f(c_i) + f(c_i)\big)\sqrt{1 + \big(f'(c_i)\big)^2}\,\Delta x_i$$

$$A_{sr} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + \big(f'(c_i)\big)^2}\,\Delta x_i \quad \text{où } x_{i-1} < c_i < x_i$$

$$\Rightarrow \qquad A_{sr} = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx$$

Lorsqu'une courbe est donnée sous la forme $x = f(y)$ et que l'axe de rotation est l'axe des y, on peut démontrer le résultat suivant de la même façon.

calcul de l'aire d'une surface engendrée par la révolution d'un arc de courbe autour de l'axe des y

Soit $x = f(y)$ une fonction continue et non-négative sur l'intervalle $[c,d]$. Si f' est continue sur l'intervalle $]c,d[$ alors l'aire de la surface engendrée par la révolution autour de l'axe des y de la courbe définie par la fonction f entre $y = c$ et $y = d$ est donnée par

$$A_{sr} = \int_{y=c}^{y=d} 2\pi f(y)\sqrt{1 + \big(f'(y)\big)^2}\, dy$$

exemple 3.8.1

Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des x de la courbe définie par l'équation $f(x) = \sqrt{2x}$ entre $x = 0$ et $x = 1$.

---

solution

a) La fonction f est continue sur $[0, \infty[$,
$\Rightarrow$ f est continue sur $[0,1]$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$
La fonction f' est continue sur $]0, \infty[$,
$\Rightarrow$ f' est continue sur $]0,1[$.

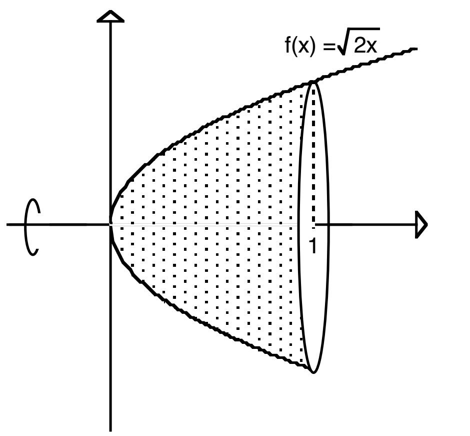


figure 3.8.8

L'aire A_{sr} de la surface de révolution de la courbe entre $x = 0$ et $x = 1$ est donnée par

$$A_{sr} = \int_{x=0}^{x=1} 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} 2\pi \sqrt{2x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{2x} \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{2x}\, \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{2x+1}\, dx$$

si $u = 2x + 1$
$du = 2\, dx$

$$= \frac{2\pi}{2} \int_{u=1}^{u=3} \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_1^3$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3} \right)$$

$$= \frac{2\pi\left(3\sqrt{3} - 1\right)}{3} = 8.79$$

exemple 3.8.2

Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des y de la courbe définie par l'équation $y = 2x - 1$ entre $x = 1$ et $x = 2$.

solution

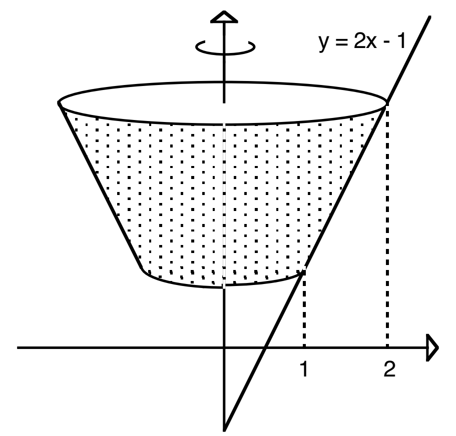


figure 3.8.9

rép: $3\pi\sqrt{5} = 21{,}07$

exemple 3.8.3

Calculer l'aire de la surface d'une sphère de rayon r.

solution

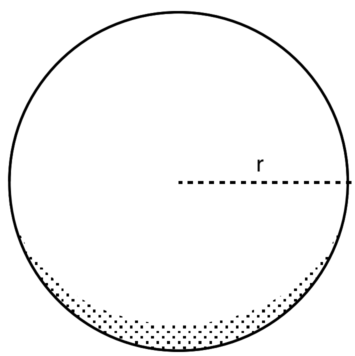


figure 3.8.10

rép: $4\pi r^2$

Exercices 3.8

1. Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des x de la courbe définie par l'équation

$$y = x^3 \quad \text{entre } x = 0 \text{ et } x = 1 \ .$$

2. Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des x de la courbe définie par l'équation

$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{entre } x = 0 \text{ et } x = 4.$$

3. Calculer l'aire engendrée par la rotation

   a) autour de l'axe des x,
   b) autour de l'axe des y,

   de la courbe définie par l'équation

$$y = 4x \quad \text{entre } x = 2 \text{ et } x = 4.$$

4. Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des x de la courbe définie par l'équation

$$y^2 = 12x \quad \text{entre } x = 0 \text{ et } x = 3$$

5. Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des y de la courbe définie par l'équation

$$y = x^2 \quad \text{entre } x = 1 \text{ et } x = 2$$

6. Calculer l'aire de la surface de l'ellipse définie par l'équation

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

7. Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des x de la courbe définie par l'équation

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} \quad \text{entre } x = 2 \text{ et } x = 4.$$

$$\int sec^3 u \, du = \frac{sec\, u \, tg\, u + ln|sec\, u + tg\, u|}{2} + C$$

8. Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des y de la courbe définie par l'équation

$$y = x^3 \quad \text{entre } x = 0 \text{ et } x = 2$$

9. Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des x de la courbe définie par l'équation

$$y = \sin x \quad \text{entre} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = \pi$$

10. Calculer l'aire engendrée par la rotation autour de l'axe des y de la courbe définie par l'équation

$$y = \ln x \quad \text{entre} \quad x = 1 \quad \text{et} \quad x = e$$

Réponses 3.8

1. $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1) = 3{,}56$

2. $40\pi = 125{,}66$

3. a) $48\pi\sqrt{17} = 621{,}75$ b) $12\pi\sqrt{17} = 155{,}44$

4. $24\pi(2\sqrt{2} - 1) = 137{,}86$

5. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}) = 30{,}85$

6. $\frac{8\pi}{9}(9 + 4\sqrt{3}\pi) = 85{,}91$

7. $364{,}57$

8. $\frac{\pi}{3}\left(12\sqrt{145} + \ln(\sqrt{145} + 12)\right) = 154{,}65$

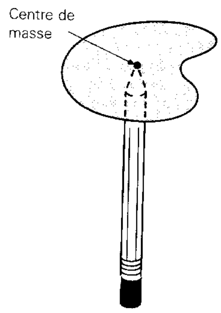
9. $2\pi\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right) = 14{,}42$

10. $\pi\left(e\sqrt{1 + e^2} + \ln(e + \sqrt{1 + e^2}) - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)\right) = 22{,}94$

3.9 Centre de masse

centre de masse

Considérons une plaque mince de forme quelconque et de densité homogène. À l'aide de l'intégrale définie nous chercherons maintenant à obtenir le *centre de masse* de cette plaque c'est-à-dire le point d'appui sur lequel la plaque demeure en équilibre.



en état d'équilibre, le centre de masse de la plaque coïncide avec le point d'appui

figure 3.9.1

En se basant sur un principe découvert par Archimède et appelé «la loi du levier», on sait que deux personnes assises aux extrémités d'une balançoire demeurent en équilibre s'ils sont à une certaine distance du point d'appui de la balançoire. Un petit garçon peut contrebalancer un garçon plus gros si le point d'appui est situé à un endroit bien précis.

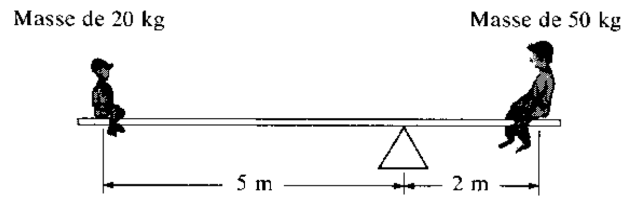


figure 3.9.2

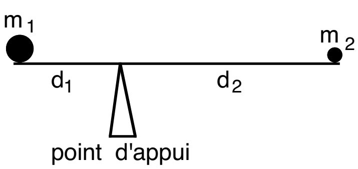


figure 3.9.3

Selon le principe d'Archimède si deux masses m_1 et m_2 sont situées sur une tige (de masse négligeable) de part et d'autre du point d'appui et que ces masses se trouvent respectivement à des distances d_1 et d_2 du point d'appui alors la tige sera en équilibre si

$$\boxed{m_1 d_1 = m_2 d_2}$$

moments statiques

Plaçons maintenant la tige sur un axe que nous considérerons être l'axe des x et déposons la masse m_1 au point x_1, la masse m_2 au point x_2 et le point d'appui au point $\bar{x}$.

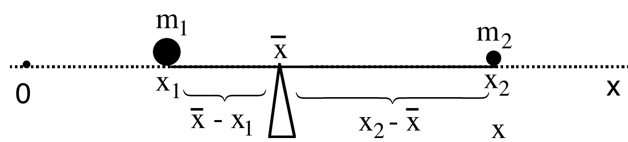


figure 3.9.4

La tige sera en équilibre si

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1 \bar{x} + m_2 \bar{x} = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Les quantités $m_1 x_1$ et $m_2 x_2$ sont appelées les *moments statiques* (ou simplement moments) des masses m_1 et m_2 par rapport à l'origine. En additionnant les moments des deux masses puis, en divisant le tout par la masse totale, on obtient le centre de masse $\bar{x}$ du système.

Un système qui possède n particules de masses:

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$$

situées sur l'axe des x respectivement aux points:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

aura son centre de masse au point

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

exemple 3.9.1

Trouver le centre de masse d'un système constitué de quatre objets dont les masses de 10 g, 45 g, 32 g et 24 g sont situées respectivement aux points -4, 1, 3 et 8 de l'axe des x.

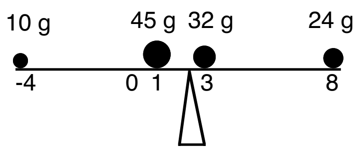


figure 3.9.5

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} m_i} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{10(-4) + 45(1) + 32(3) + 24(8)}{10 + 45 + 32 + 24}$$

$$= \frac{293}{111}$$

$$= 2{,}64$$

Le centre de masse se situe au point 2,64 de l'axe des x.

De la même façon nous pouvons obtenir les coordonnées du centre de masse d'un système à deux dimensions.

Un système qui possède n particules de masses

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$$

situées dans un plan cartésien respectivement aux points

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

aura son centre de masse au point de coordonnées:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

exemple 3.9.2

Trouver le centre de masse d'un système comprenant trois objets de masses 3 g, 4 g et 8 g situés dans un plan cartésien respectivement aux points (-1, 1), (2, -1) et (3, 2).

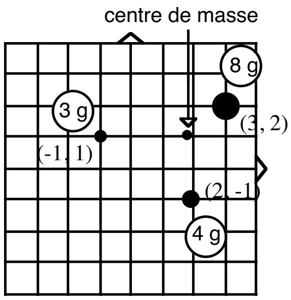


figure 3.9.6

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3(-1) + 4(2) + 8(3)}{3 + 4 + 8} = 1{,}93$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3(1) + 4(-1) + 8(2)}{3 + 4 + 8} = 1$$

Le centre de masse se situe au point (1,93; 1) du plan cartésien

centroïde

Trouver le centre de masse d'un ensemble fini de points matériels dont on connaît les masses relève de l'arithmétique et non pas du calcul intégral. Par ailleurs l'évaluation du centre de masse d'une distribution continue de matière nécessite l'utilisation de l'intégrale définie.

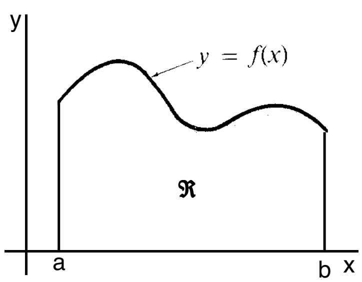


figure 3.9.7

Considérons maintenant une plaque mince de densité uniforme ρ (rhô) occupant une région ℜ du plan. Tout au long de cette section nous supposerons que ρ est constant et que le métal est par conséquent parfaitement homogène. Cherchons à trouver le centre de masse de cette plaque mince que l'on appelle le *centroïde de la région du plan*.

le centroïde de la mince plaque (de densité uniforme) de la figure 3.9.8 est localisé au point $(\bar{x}, \bar{y})$

le centroïde d'un fil contenu dans un plan n'est pas nécessairement un point du fil (voir la figure 3.9.9)

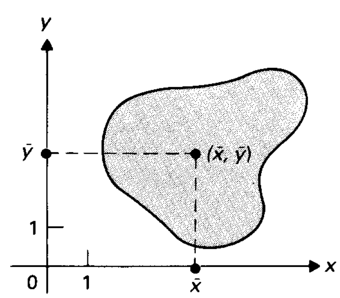


figure 3.9.8

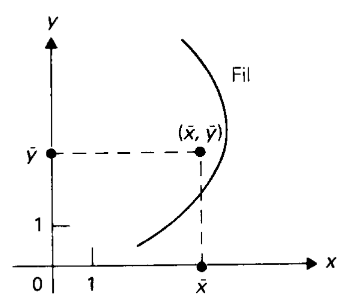


figure 3.9.9

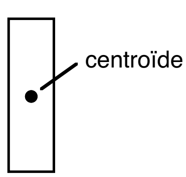


figure 3.9.10

Pour obtenir le centroïde d'une région du plan nous utiliserons un principe tiré de la physique qui affirme que lorsqu'une région ℜ est symétrique par rapport à une droite l, le centroïde de la région ℜ se situe sur la droite l, Par conséquent le centroïde d'un rectangle est situé en son centre.

De plus, le moment d'une région provenant de l'union de deux régions qui n'ont pas de points en commun correspond à la somme des moments de chacune des régions.

proposition 3.9.1

Soit $\Re$ la région du plan bornée par la courbe $y = f(x)$ l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$. Si f est continue et non négative sur l'intervalle [a, b] et l'aire de la région est A alors le centroïde de $\Re$ est situé au point $(\bar{x}, \bar{y})$ où

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\,f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\,[f(x)]^2\,dx$$

démonstration

Essayons d'obtenir une valeur approchée du centroïde de la région en question à l'aide d'une somme intégrale. Pour cela,

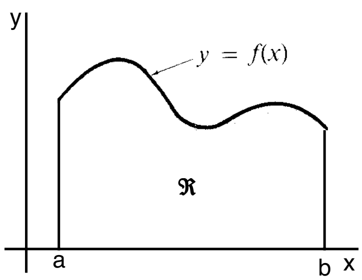


figure 3.9.11

- subdivisons d'abord l'intervalle [a,b] en n sous-intervalles égaux de longueur $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3,\ \Delta x_4,\ \ldots,\ \Delta x_n$;
- considérons ensuite le point milieu de chaque sous-intervalle, soient $c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,c_n$ les n valeurs ;
- construisons dans chaque sous-intervalle un rectangle de base Δx_i et de hauteur $f(c_i)$;

On obtient le découpage vertical de la figure 3.9.12 représentant l'approximation polygonale de la région $\Re$. Le centroïde du i[e] rectangle est localisé en son centre c'est-à-dire au point

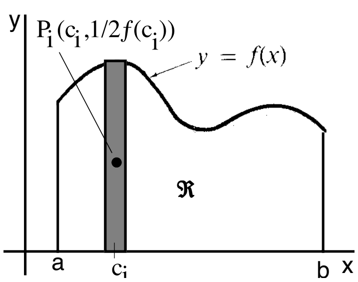


figure 3.9.12

$$P_i\left(c_i, \tfrac{1}{2}f(c_i)\right)$$

Puisque

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

et que la masse d'une mince plaque de densité homogène est égale au produit de son aire par sa densité, la i[e] plaque rectangulaire aura donc une masse égale à $\rho f(c_i)\Delta x_i$.

$m_i = \rho f(c_i)\Delta x_i$
$x_i = c_i$

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} (\rho f(c_i)\Delta x_i)c_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho f(c_i)\Delta x_i}$$

$$\approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho c_i f(c_i)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho f(c_i)\Delta x_i}$$

Lorsque $n \to \infty$, on a

$$\bar{x} = \frac{\rho \int_a^b x\, f(x)\, dx}{\rho \int_a^b f(x)\, dx} = \frac{\int_a^b x\, f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$$

De même

$$\bar{y} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$m_i = \rho f(c_i)\Delta x_i$

$y_i = \frac{1}{2} f(c_i)$

$$\approx \frac{\sum_{i=1}^{n} (\rho f(c_i)\Delta x_i)\left(\frac{1}{2} f(c_i)\right)}{\sum_{i=1}^{n} (\rho f(c_i)\Delta x_i)}$$

$$\approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho\, [f(c_i)]^2 \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho f(c_i)\Delta x_i}$$

Lorsque $n \to \infty$, on a

$$\bar{y} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2\, dx}{\rho \int_a^b f(x)\, dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$$

D'une façon plus concise, le centre de masse d'une plaque mince et homogène d'aire

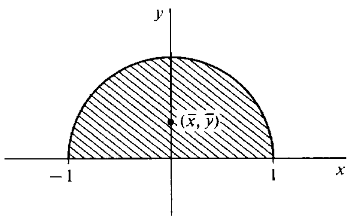
$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

est situé au point $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\, f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\, [f(x)]^2\, dx}$$

exemple 3.9.3

Trouver le centroïde du demi-cercle d'équation $y = \sqrt{1 - x^2}$.



l'aire d'un demi-cercle de rayon $r = 1$ est $A = \pi/2$

Il est inutile de calculer $\bar{x}$ puisque la région est symétrique par rapport à l'axe des y (la fonction est paire). Le centroïde est situé sur l'axe des y par conséquent $\bar{x} = 0$. On trouve $\bar{y}$ à l'aide de la proposition 3.9.1.

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)\,dx$$

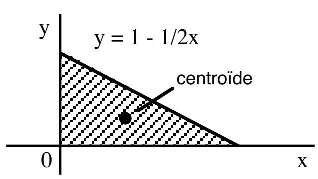
$$= \frac{1}{\pi}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

Le centroïde est situé au point $\left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$

exemple 3.9.4

Trouver le centroïde de la région triangulaire bornée par

l'axe des x, l'axe des y et la droite $y = 1 - \frac{1}{2}x$.



---

rép: (2/3, 1/3)

exemple 3.9.5

Trouver le centroïde de la région bornée par l'axe des x, l'axe des y, la droite $x = \pi/2$ et la courbe $y = \cos x$.

rép: $(\pi/2 - 1, \pi/8)$

proposition 3.9.2

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle [a, b]. Si pour toute valeur de l'intervalle [a, b] on a $f(x) \geq g(x)$ alors les coordonnées du centroïde de la région d'aire A bornée par les courbes des deux fonctions entre x = a et x = b sont

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right]dx \quad ; \quad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right]dx$$

On peut démontrer cette proposition en utilisant une démarche semblable à celle de la proposition 3.9.1. La démonstration est laissée à l'étudiant.

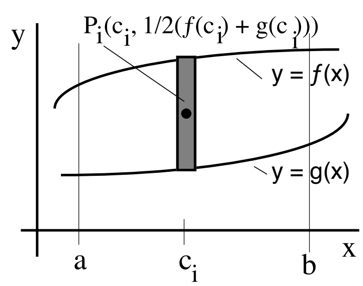


figure 3.9.13

exemple 3.9.6

Trouver le centroïde de la région bornée par les courbes

$$y = x \ \text{ et } \ y = x^2 .$$

rép: (1/2, 2/5)

centroïde et volume de révolution

Le centroïde d'une région plane $\Re$ est étroitement lié au volume du solide engendré par la rotation de la région $\Re$ autour d'un axe. Le théorème de Pappus, mathématicien grec du quatrième siècle, met en lumière cette relation.

proposition 3.9.3

théorème de Pappus

Soit $\Re$ une région du plan. Le volume du solide engendré par la rotation de la région $\Re$ autour d'une droite (qui ne rencontre pas la région) correspond à la distance parcourue par le centroïde de $\Re$ pendant sa rotation multipliée par l'aire de $\Re$.

démonstration

La démonstration est faite pour le cas où la région $\Re$ est située entre les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ comme à la figure 3.9.13. L'axe des y correspond à l'axe de rotation. À l'aide de la méthode des enveloppes cylindriques, on a

$$V = \int_a^b 2\pi x\big[f(x) - g(x)\big]\,dx$$

$$= 2\pi \int_a^b x\big[f(x) - g(x)\big]\,dx$$

puisque par la proposition 3.9.2

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\big[f(x) - g(x)\big]dx$$

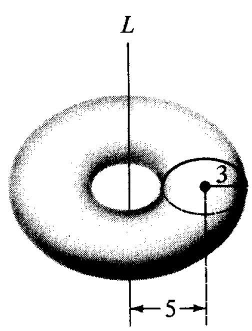
$$= 2\pi\,(\bar{x}\,A)$$

$$= (2\pi\bar{x})\,A$$

$2\pi\bar{x}$ correspond à la distance parcourue par le centroïde durant sa rotation autour de l'axe des y et A représente l'aire de la région $\Re$.

exemple 3.9.7

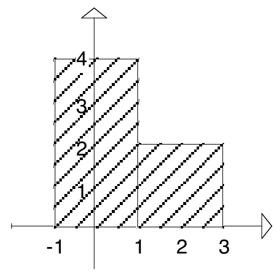
À l'aide du théorème de Pappus, trouver le volume du tore (beignet) engendré par la rotation d'un cercle de rayon 3 cm autour d'une droite distante de 5 cm de son centre.



rép: $90\pi^2$ cm^3

exemple 3.9.8

Soit la région hachurée



a) Trouver le centroïde de cette région.

b) Trouver le volume du solide engendré par la rotation de cette région autour

- de l'axe des x,
- de la droite $x = 3$.

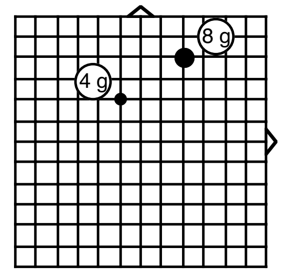
rép: a) (2/3; 5/3) ; b) 40π ; 56π

Exercices 3.9

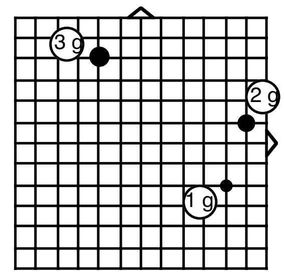
on suppose que les objets ont une densité homogène

1. Trouver le centroïde d'un système

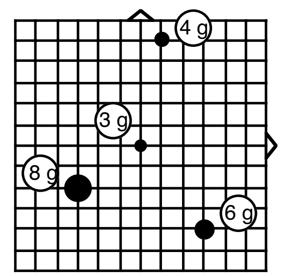
   a) constitué de deux objets dont les masses de 4 g et 8 g sont situées respectivement aux points $(-1, 2)$ et $(2, 4)$,



   b) constitué de trois objets dont les masses de 2 g , 1 g et 3 g sont situées respectivement aux points $(5, 1)$, $(4, -2)$ et $(-2, 4)$,



   c) constitué de quatre objets dont les masses de 3 g , 4 g , 6 g et 8 g sont situées respectivement aux points $(0, 0)$, $(1, 5)$, $(3, -4)$ et $(-3, -2)$.



2. Trouver le centroïde de la région bornée par les courbes

   a) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$

   b) $y = 1 - x^2$, $y = 0$

   c) $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

   d) $y = \dfrac{1}{x - 1}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

   e) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \pi/2$ (entre $x = 0$ et $x = \pi/2$)

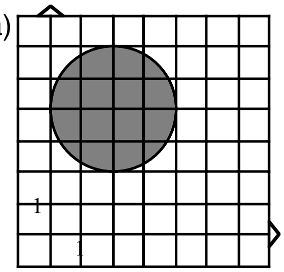
   f) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

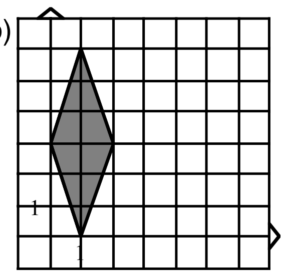
   g) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$

   h) $y = \sqrt{x}$, $y = x$

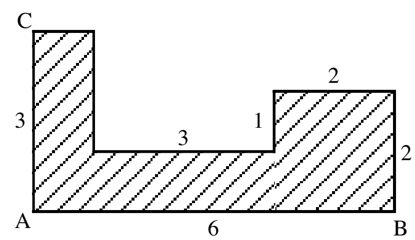
   i) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/4$

3. À l'aide du théorème de Pappus, trouver le volume du solide engendré par la rotation des formes géométriques suivantes,
   - autour de l'axe des x ; • autour de l'axe des y.





4. Trouver le centroïde de la région hachurée puis à l'aide du théorème de Pappus, trouver le volume du solide engendré par la rotation de la région hachurée autour
   a) du segment $\overline{AB}$,
   b) du segment $\overline{AC}$.



5. Trouver le centroïde de la région bornée par les courbes
$$y = \sqrt{x}\ ,\ y = 0\ ,\ x = 4$$
puis, à l'aide du théorème de Pappus, trouver le volume du solide engendré par la rotation de cette région
   a) autour de l'axe des x,
   b) autour de l'axe des y.

6. Démontrer la proposition 3.9.2.

Réponses aux exercices 3.9

1. a) $\left(1\ ,\frac{10}{3}\right)$

   b) $\left(\frac{4}{3}\ ,2\right)$

   c) $\left(\frac{-2}{21}\ ,\frac{-20}{21}\right)$

2) a) $\left(\frac{3}{2}\ ,\frac{6}{5}\right)$

   b) $\left(0\ ,\frac{2}{5}\right)$

   c) $\left(\frac{7}{12}\ ,\frac{13}{12}\right)$

   d) $\left(\frac{2 + \ln 3}{\ln 3}\ ,\frac{1}{3 \ln 3}\right)$

   e) $\left(1\ ,\frac{\pi}{8}\right)$

   f) $\left(\frac{1}{e - 1}\ ,\frac{e + 1}{4}\right)$

   g) $\left(\frac{e^2 + 1}{4}\ ,\frac{e - 2}{2}\right)$

   h) $\left(\frac{2}{5}\ ,\frac{1}{2}\right)$

   i) $\left(\frac{\pi\sqrt{2} - 4}{4(\sqrt{2} - 1)}\ ,\ \frac{1}{4(\sqrt{2} - 1)}\right)$

3 a) $32\pi^2$ (autour de l'axe des x) $16\pi^2$ (autour de l'axe des y)

   b) 36π (autour de l'axe des x) 12π (autour de l'axe des y)

4. le centroïde de la région est situé au point $\left(\frac{29}{10}\ ;1\right)$

   a) 20π b) 58π

5. le centroïde de la région est situé au point $\left(\frac{12}{5}\ ,\frac{3}{4}\right)$

   a) 8π b) $\frac{128\pi}{5}$

6.

Problèmes de révision

(subdiviser l'intervalle en parties égales et utiliser le point supérieur de chaque sous-intervalle pour représentant)

1. Évaluer les intégrales suivantes en les considérant comme la limite d'une somme. (Ne pas utiliser la formule de Newton et de Leibniz)

   a) $\displaystyle\int_0^2 (1 + 2x)\ dx$ b) $\displaystyle\int_1^3 (2x - 3)\ dx$

2. Évaluer, si elles existent, les intégrales suivantes:

   a) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2}\ dx$ d) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{\infty} x \ln x\ dx$

   b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x - 2)^{2/3}}$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-2x}\ dx$

   c) $\displaystyle\int_0^e \ln x\ dx$ f) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x - 2}}$

3. Calculer l'aire de la surface délimitée par $y = \sqrt{x}$, la droite tangente à cette courbe au point (9,3) et l'axe des x.

4. Considérer la région bornée par les courbes d'équations:

   $$y = 6x - x^2 \quad \text{et} \quad y = x + 4$$

   a) Calculer l'aire de cette région.
   b) Calculer le volume engendré par la rotation de cette région autour de
      i) l'axe des y,
      ii) la droite $x = 3$,
      iii) la droite $y = -1$.

5. Considérer la région bornée par les courbes d'équations:

$$x = 3y^2 - 9 \ , \ x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ y = 1$$

a) Calculer l'aire de cette région.
b) Calculer le volume engendré par la rotation de cette région autour de

i) la droite $x = 1$,
ii) la droite $y = 2$.

6. Considérer la région non bornée entre les courbes d'équations:

$$y = e^{-x} \ , \ y = 0 \ \text{ et à droite de } \ x = 0.$$

a) Calculer l'aire de cette région,
b) Calculer le volume engendré par la rotation de cette région autour de

i) l'axe des x,
ii) l'axe des y.

7. Calculer la longueur d'arc de la courbe définie par les courbes d'équations:

a) $y = \sqrt{9 - x^2}$ pour $0 \leq x \leq 3$,

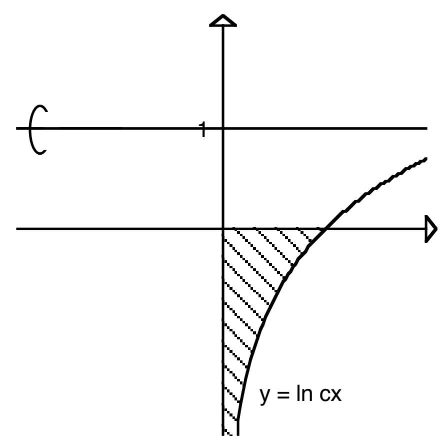
b) $y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\ln x}{4}$ pour $1 \leq x \leq e$,

c) $6xy = x^4 + 3$ pour $1 \leq x \leq 2$.

8. Considérer la région située dans le quatrième quadrant, comprise entre

$y = \ln cx$ $(c>0)$, l'axe des x et l'axe des y.

Si le volume engendré par la rotation de cette région autour de la droite $y = 1$ est de 4π, déterminer la valeur de c en utilisant la méthode des enveloppes cylindriques.



Réponses aux problèmes de révision

1. a) 6 b) 2

2. a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi}{6}$
   b) $6\sqrt[3]{2}$
   c) 0
   d) diverge
   e) diverge
   f) $\sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

3. 9

4. a) $\boxed{V}$ $\displaystyle\int_1^4 \big((6x - x^2) - (x + 4)\big)\, dx$
   b) i) $\boxed{E}$ $\displaystyle\int_1^4 2\pi x\big((6x - x^2) - (x + 4)\big)\, dx$
   ii) $\boxed{E}$ $\displaystyle\int_1^3 2\pi\,(3 - x)\big((6x - x^2) - (x + 4)\big)\, dx$
   iii) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_1^4 \pi\Big(\big((6x - x^2) - (-1)\big)^2 - \big((x + 4) - (-1)\big)^2\Big)\, dx$

5. a) $\boxed{H}$ $\displaystyle\int_0^1 \big(0 - (3y^2 - 9)\big)\, dy$
   b) i) $\boxed{D}$ $\displaystyle\int_0^1 \pi\Big(\big(1 - (3y^2 - 9)\big)^2 - (1 - 0)^2\Big)\, dy$
   ii) $\boxed{E}$ $\displaystyle\int_0^1 2\pi\,(2 - y)\big(0 - (3y^2 - 9)\big)\, dy$

6. a) 1
   b) i) $\dfrac{\pi}{2}$ b) ii) 2π

7. a) $\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{17}{12}$

8. $c = 1$