Primitives

2

2.1 La différentielle

Dans cette section nous ferons intervenir une notion étroitement liée à celle de la dérivée. Cette notion porte le nom de *différentielle*. Elle présente un intérêt à la fois pratique comme méthode d'approximation et théorique notamment dans les applications du calcul intégral.

Considérons une fonction définie par l'équation $y = f(x)$ et $f'(x)$ la dérivée de cette fonction au point x. Donnons un accroissement à la valeur de x; cet accroissement sera noté Δx.

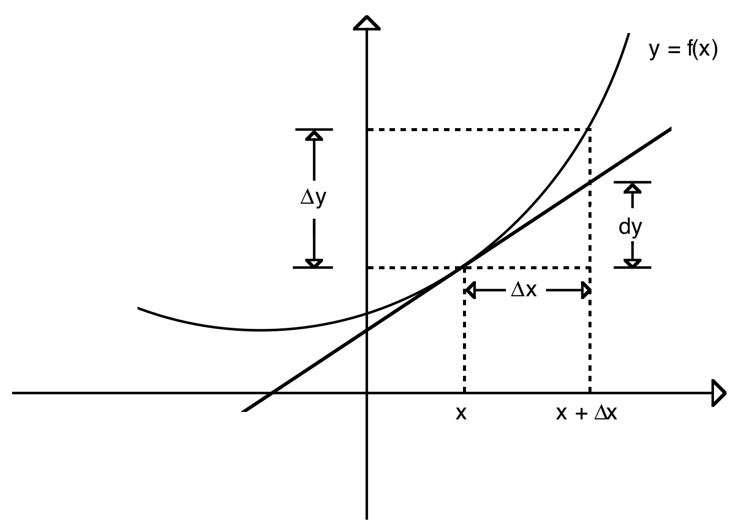


figure 2.1.1

L'accroissement Δx donné à la valeur de x engendre:

a) un accroissement des images de la fonction (noté Δy).

$$\boxed{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

b) un accroissement des images de la droite tangente en x (noté dy);

sachant que la pente de la droite tangente à la fonction en x est $f'(x)$ et que

$$f'(x) = \frac{\text{accroissement des y}}{\text{accroissement des x}} = \frac{dy}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{dy = f'(x)\ \Delta x}$$

exemple 2.1.1

Soit $f(x) = x^2$, $x = 2$ et $\Delta x = 0{,}1$. Calculer Δy et dy.

a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\begin{aligned} &= f(2 + 0{,}1) - f(2) \\ &= f(2{,}1) - f(2) \\ &= 4{,}41 - 4 \\ &= 0{,}41 \end{aligned}$$

b) $dy = f'(x)\,\Delta x$

$$\begin{aligned} &= f'(2)\,(0{,}1) \\ &= 2(2)\,(0{,}1) \quad (\text{puisque } f'(x) = 2x) \\ &= 0{,}4 \end{aligned}$$

exemple 2.1.2

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 4$ et $\Delta x = 0{,}41$. Calculer Δy et dy.

a) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

b) $dy = f'(x)\,\Delta x$

rép: a) $\Delta y = 0{,}1$; b) $dy = 0{,}1025$

Dépendant des fonctions, nous constatons que la valeur de Δy peut être supérieure ou inférieure à celle de dy mais d'une façon générale

$$\boxed{\Delta y \sim dy \quad \text{lorsque } \Delta x \text{ est petit}}$$

définition 2.1.1

Soit f une fonction définie par l'équation $y = f(x)$. Si $f'(x)$ est la dérivée de $f(x)$ pour une valeur particulière de x et Δx est un accroissement arbitrairement choisi de x alors la *différentielle* de cette fonction est définie par

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

exemple 2.1.3

a) Si $y = 4x^3 - 1$ alors $dy = (12x^2)\,\Delta x$

b) Si $y = 4\sqrt{x - 1}$ alors $d(4\sqrt{x - 1}\,) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{x - 1}}\right)\Delta x$ ou $\dfrac{2\Delta x}{\sqrt{x - 1}}$

c) Si $y = x$ alors $d(x) = (1)\,\Delta x$ ou $dx = \Delta x$

Au dernier exemple, on remarque que si x est la variable indépendante d'une fonction alors $dx = \Delta x$,

la notation qu'utilisait LEIBNIZ pour décrire la dérivée était en fait pour lui un quotient de deux différentielles

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)\,dx$$

On peut donc écrire

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

Par la suite, on se servira de cette dernière forme comme définition de la différentielle.

exemple 2.1.4

a) Si $y = 3x^2 - 4x + 7$ alors $dy = (6x - 4)\,dx$

b) Si $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ alors $dy = -\dfrac{2dx}{(x - 1)^2}$

approximations à l'aide de la différentielle

Voyons maintenant comment on peut utiliser la notion de différentielle comme outil d'approximation.

exemple 2.1.5

Donner une approximation de la valeur de $\sqrt{17}$ sans l'aide de votre calculatrice.

---

a) Il s'agit d'obtenir une approximation d'une racine carrée. Pour cela considérons la fonction

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

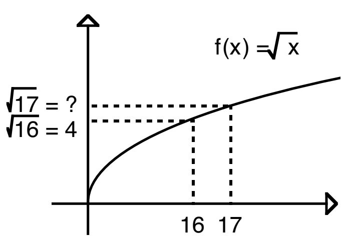


figure 2.1.2

b) Sachant que le carré parfait le plus près de 17 est 16 et que l'accroissement de $f(x)$ lorsque x passe de 16 à 17 est

$$\Delta y = f(17) - f(16)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \sqrt{17} - \sqrt{16}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{17} = \sqrt{16} + \Delta y$$

c) On a vu que lorsque dx est petit $\Delta y \sim dy$.

dy = f'(x) dx

Par conséquent

$$\begin{aligned}\sqrt{17} &\sim \sqrt{16} + dy \\ &\sim 4 + f'(x)\,dx \\ &\sim 4 + f'(16)\,(1) \quad (x = 16 \text{ et } dx = 17 - 16) \\ &\sim 4 + \frac{1}{2\sqrt{16}}\,(1) \\ &\sim 4 + \frac{1}{8} = 4{,}125\end{aligned}$$

exemple 2.1.6

En utilisant la différentielle montrer que lorsque h est petit

$$\left(1+\frac{h}{2}\right) \text{ est une bonne approximation de } \sqrt{1+h}\ .$$

---

a) Considérons la fonction

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) L'accroissement de $f(x)$ lorsque x passe de 1 à $1+h$ est

$$\Delta y = f(1+h) - f(1)$$
$$= \sqrt{1+h} - \sqrt{1}$$

c) Puisque par hypothèse h est petit, on a $\Delta y \sim dy$.

$$dy \sim \sqrt{1+h} - \sqrt{1}$$
$$f'(x)\,dx \sim \sqrt{1+h} - \sqrt{1}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{1}}\ h \sim \sqrt{1+h} - \sqrt{1} \qquad (x = 1 \text{ et } dx = h)$$
$$\Rightarrow \qquad \sqrt{1+h} \sim 1+\frac{h}{2}$$

exemple 2.1.7

En utilisant la différentielle, estimer le volume de peinture (en litres) nécessaire pour recouvrir un cube de 10 dm de côté avec une couche de peinture de 0,001 dm d'épaisseur.

($1\ dm^3 = 1$ litre)

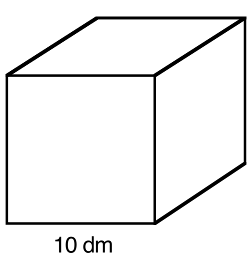


figure 2.1.3

a) Si c représente la longueur du côté du cube alors son volume sera

$$V = c^3 \quad \Rightarrow \quad V' = 3c^2$$

b) Le volume de peinture nécessaire pour recouvrir le cube correspond à

$$V(10 + 0{,}002) - V(10) = \Delta V \qquad (c = 10 \text{ et } \Delta c = 0{,}002)$$

c) Puisque Δc est petit, on a $\Delta V \sim dV$.

$$V(10 + 0{,}002) - V(10) \sim dV$$
$$\sim 3c^2\,\Delta c \qquad (c = 10 \text{ et } \Delta c = 0{,}002)$$
$$\sim 3(10)^2\,(0{,}002)$$
$$\sim 0{,}6\ dm^3 \quad \text{ou} \quad 0{,}6 \text{ litre}$$

exemple 2.1.8

le volume d'une sphère de rayon r est $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

On mesure le rayon d'une sphère et on obtient 21 cm, avec une erreur possible maximale de 0,05 cm. À l'aide de la différentielle,

a) estimer l'erreur maximale que cette mesure peut engendrer sur le calcul du volume de la sphère?
b) trouver l'erreur relative correspondante?

---

a) Si r représente le rayon de la sphère alors son volume sera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad V' = 4\pi r^2$$

b) L'erreur maximale possible sur le volume est donnée par

$$V(21 + 0{,}05) - V(21) = \Delta V \qquad (r = 21 \text{ et } \Delta r = 0{,}05)$$

c) Puisque Δr est petit, on a $\Delta V \sim dV$.

$$\begin{aligned} V(21 + 0{,}05) - V(21) &\sim dV \\ &\sim 4\pi r^2\,\Delta r \quad (r = 21 \text{ et } \Delta r = 0{,}05) \\ &\sim 4\pi(21)^2\,(0{,}05) \\ &\sim 277 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

erreur relative

Cette quantité peut paraître énorme. Pour avoir une meilleure idée de l'ordre de grandeur de cette erreur, on utilise souvent la notion *d'erreur relative*. On calcule l'erreur relative équivalente en divisant l'erreur obtenue par le volume total de la sphère.

$$\frac{\Delta V}{V} \sim \frac{dV}{V} \sim \frac{277}{\frac{4\pi(21)^3}{3}} \sim \frac{277}{38\,792} \sim 0{,}00714 \;\; (0{,}7\ \%)$$

Ainsi, l'erreur relative du rayon de $dr/r = 0{,}05/21 \sim 0{,}0024$ (0,24 %) engendre une erreur relative de 0,7 % dans le calcul du volume.

La différentielle et la dérivée sont deux notions très proches l'une de l'autre. La majorité des propositions et formules relatives à la dérivée sont valables pour la différentielle.

propriétés de la différentielle

Soients $u = u(x)$ et $v = v(x)$

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$

---

par définition de la différentielle

$$\begin{aligned} d(u \pm v) &= (u \pm v)'\,dx \\ &= (u' \pm v')\,dx \\ &= u'\,dx \pm v'\,dx \\ &= du \pm dv \end{aligned}$$

2. $d(uv) = v\,du + u\,dv$

3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

4. Si $y = f(u)$ et $u = g(x)$ alors $dy = f'(u)\, du$.

Par la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

puisque $du = g'(x)\, dx$

par conséquent, $dy = f'(u)\, g'(x)\, dx$

$\Rightarrow$ $dy = f'(u)\, du$

exemple 2.1.9

Trouver la différentielle de $y = (3x - 1)^6$

a) par rapport à la variable indépendante x,
b) par rapport à la variable dépendante $u = 3x - 1$.

par définition

a) $dy = 6(3x - 1)^5\, (3)\, dx$
$= 18(3x - 1)^5\, dx$

par la propriété 4 de la différentielle

b) $dy = 6u^5\, du$ (où $u = 3x - 1$)

propriété d'invariabilité de la différentielle

Ainsi la différentielle d'une fonction composée s'exprime de la même manière que si la variable intermédiaire u était une variable indépendante. En d'autres termes, la différentielle d'une fonction $f(x)$ ne dépend pas du fait que x est une variable indépendante ou une fonction d'une autre variable. Cette propriété importante de la différentielle qui consiste dans *l'invariabilité de la différentielle* sera largement utilisée à la section suivante lorsqu'on traitera de la *méthode de changement de variable*.

Si $u = u(x)$,

$$d(u^n) = nu^{n-1}\, du \quad \text{(où } n \text{ est une constante réelle)}$$

$$d(e^u) = e^u\, du$$

$$d(\ln u) = \frac{1}{u}\, du$$

Exercices 2.1

1. Trouver dy.

a) $y = \dfrac{5 - 3x}{2x + 7}$

b) $y = (1 - 4x^3)(1 + 2x^2)$

c) $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

d) $y = \log_4(5x - 2x^2)$

e) $y = tg(x^3)$

f) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

g) $y = x \arcsin(x^2)$

h) $y = \ln(\text{cosec}(3x - 1))$

2. Compléter le tableau suivant.

$f(x)$	x	Δx	dy	Δy
$x(x + 1)$	3	5		
$x^2 - 3x + 1$	2	0,1		
$\dfrac{1}{x}$	1	$\dfrac{-1}{16}$		

3. En utilisant la différentielle, approximer la valeur de chacune des expressions suivantes.

a) $\sqrt{101}$

b) $\sqrt[4]{15{,}98}$

c) $(2{,}01)^3$

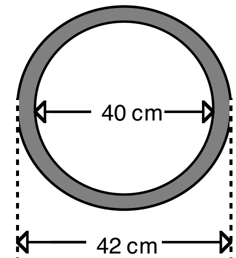
d) $\ln 3$

4. En utilisant la différentielle montrer que si h est petit alors

a) $(1 + 4h)$ est une bonne approximation de $(1 + h)^4$,

b) h est une bonne approximation de $\ln(1 + h)$.

5. Trouver à l'aide de la différentielle une valeur approchée de l'aire de l'anneau circulaire ayant un diamètre intérieur de 40 cm et un diamètre extérieur de 42 cm.



le volume d'une sphère de rayon r est donné par la formule

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

6. En utilisant la différentielle, estimer le volume de peinture (en litres) nécessaire pour recouvrir une immense sphère de 5 m de rayon avec une couche de peinture de 0,01 cm d'épaisseur.

7. On mesure l'arête d'un cube et on obtient 30 cm, avec une erreur possible maximale de 0,1 cm. À l'aide de la différentielle, estimer l'erreur maximale que cette mesure engendre sur
   a) le calcul du volume du cube,
   b) le calcul de l'aire de la surface des côtés du cube.

8. On mesure le rayon d'un disque circulaire et on obtient 24 cm, avec une erreur possible maximale de 0,2 cm. À l'aide de la différentielle,
   a) estimer l'erreur maximale que cette mesure engendre sur le calcul de l'aire du disque,
   b) trouver l'erreur relative correspondante.

l'aire de la surface d'une sphère de rayon r est donnée par la formule

$A = 4\pi r^2$

9. On mesure la circonférence d'une sphère et on obtient 84 cm, avec une erreur possible maximale de 0,5 cm. À l'aide de la différentielle,
   a) estimer l'erreur maximale que cette mesure engendre sur le calcul de l'aire de la surface de la sphère,
   b) trouver l'erreur relative correspondante.

Réponses 2.1

1. a) $-\dfrac{31}{(2x+7)^2}\,dx$ e) $3x^2\sec^2(x^3)\,dx$

   b) $-4x(10x^3+3x-1)\,dx$ f) $\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$

   c) $\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$ g) $\dfrac{\sqrt{1-x^4}\arcsin(x^2)+2x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

   d) $\dfrac{5-4x}{x(5-2x)\ln 4}\,dx$ h) $-3\,\text{cotg}(3x-1)\,dx$

2.

f(x)	x	Δx	dy	Δy
$x(x+1)$	3	5	35	60
x^2-3x+1	2	0,1	0,1	0,11
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{-1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{15}$

3. a) 10,05 c) 8,12
   b) 1,9994 d) 1,10

4. a) b)

5. 125,7 cm^2

6. 31,4 litres

7. a) 270 cm^3 b) 36 cm^2

8. a) 30,16 cm^2 b) 1,67 %

9. a) $\frac{84}{\pi} = 26{,}74$ cm^2 b) $\frac{1}{84} = 1{,}19$ %

2.2 L'intégrale indéfinie

En général lorsqu'on définit une opération, on tente immédiatement d'en définir une autre qui défait le travail de la première et permet ainsi d'augmenter le champ d'application de l'opération. On parle alors d'opération inverse.

En algèbre plusieurs opérations possèdent leur opération inverse.

Opération	Opération inverse
addition	soustraction
multiplication	division
élévation à une puissance	extraction de racine

Ce principe d'action inverse s'applique également aux fonctions.

Fonction	Fonction inverse
$y = 2x + 1$	$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$

La dérivation peut être considérée comme une opération que l'on applique aux fonctions. Il est tout à fait naturel de se demander s'il est possible par un procédé inverse de la dérivation de retrouver une fonction dont on connaît la dérivée. La réponse est oui, ce procédé existe et s'appelle *l'intégration*.

Dérivation	Intégration
$y' = 3x^2$	$y = x^3$
$y' = e^x$	$y = e^x$
$y' = \sin x$	$y = - \cos x$

Plusieurs applications découlent de l'intégration. Connaissant

- la vitesse d'un objet, on pourra calculer sa position,
- le rythme de croissance d'une population, on pourra obtenir la taille de cette population,
- le taux de variation des profits d'une compagnie, on pourra prévoir les profits de cette compagnie.

On verra au chapitre 3 que l'intégration est aussi un outil puissant de *sommation*. C'est d'ailleurs de ce concept de sommation qu'est né le calcul intégral.

Supposons que $f(x) = 2x$ représente la dérivée de la fonction $F(x)$.
Quelle serait la fonction $F(x)$?

Plusieurs réponses sont acceptables.

$$F(x) = x^2 \quad , \quad F(x) = x^2 + 1 \quad , \quad F(x) = x^2 - 5 \quad , \quad \text{etc ...}$$

Chacune des fonctions est appelée une *primitive* de la fonction $f(x) = 2x$.

définition 2.2.1
primitive

Une fonction $F(x)$ est une *primitive* de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[a,b]$ si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [a,b]$$

Il existe une infinité de primitives à une fonction. Une primitive quelconque de la fonction $f(x) = 2x$ aura la forme

$$F(x) = x^2 + C \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle.}$$

proposition 2.2.1

Si $F(x)$ et $G(x)$ sont deux primitives de la fonction $f(x)$ sur $[a,b]$ alors ces primitives diffèrent par une constante.

démonstration

F et G sont deux primitives de la fonction f. Par définition, on a que

$$F'(x) = f(x)$$
$$G'(x) = f(x)$$

pour tout $x \in [a,b]$.

$$\Rightarrow \qquad F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

donc $\qquad \big(F(x) - G(x) \big)' = 0$

Posons $H(x) = F(x) - G(x)$

on aura $\qquad H'(x) = 0 \quad$ pour tout $x \in [a,b]$.

Appliquons le théorème de la moyenne à la fonction $H(x)$ qui est continue et dérivable sur l'intervalle $[a,b]$. En vertu du théorème de la moyenne, pour tout x arbitraire de l'intervalle $[a,b]$, il existe au moins une valeur de c dans l'intervalle $]a,x[$ tel que

$$H'(c) = \frac{H(x) - H(a)}{x - a}$$

puisque $H'(x) = 0$ pour toute valeur x de l'intervalle $[a,b]$

$$0 = \frac{H(x) - H(a)}{x - a}$$

$$\Rightarrow \qquad H(x) - H(a) = 0$$

donc $$H(x) = H(a) \quad \text{pour tout } x \in [a,b].$$

Ainsi, la fonction $H(x)$ est en tout point de l'intervalle $[a,b]$ égale à la valeur $H(a)$ une constante. Désignons par C la valeur de cette constante. On en conclut que

$$H(x) = C$$

puisque $H(x) = F(x) - G(x)$

$$\Rightarrow \qquad F(x) - G(x) = C$$

et, $$F(x) = G(x) + C$$

Les deux primitives diffèrent donc par une constante.

exemple 2.2.1

Montrer que si

$$F(x) = \frac{(2x + 1)^2}{4} \quad \text{et} \quad G(x) = (x + 2)(x - 1)$$

sont deux primitives de la fonction $f(x) = 2x + 1$ et par conséquent, montrer que si elles diffèrent ce n'est que par une constante.

---

définition 2.2.2
intégrale indéfinie

On appelle *intégrale indéfinie* d'une fonction $f(x)$, l'ensemble de toutes les primitives de cette fonction. L'intégrale indéfinie sera représentée par

$$F(x) + C$$

où $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ et C est une constante réelle.

Graphiquement, on peut considérer l'intégrale indéfinie comme une famille de courbes que l'on obtient par translation verticale.

Ainsi, l'intégrale indéfinie de $f(x) = 2x$ correspond à $x^2 + C$. La famille de courbes associées à $x^2 + C$ est représentée à la figure 2.2.1.

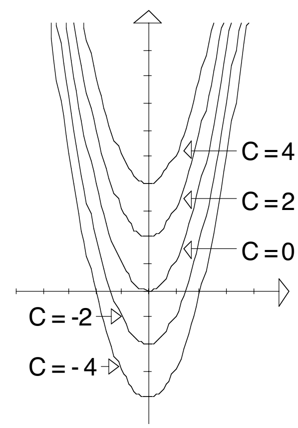


figure 2.2.1

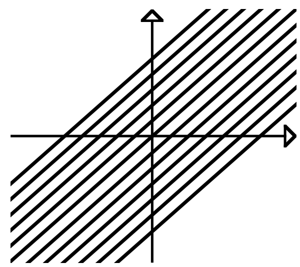
exemple 2.2.2

Trouver l'intégrale indéfinie des fonctions ci-dessous puis, représenter graphiquement chacune des réponses.

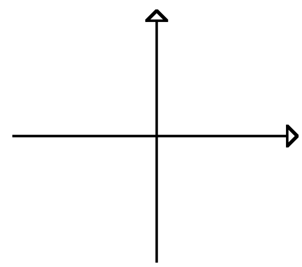
a) $f(x) = 1$,
b) $f(x) = e^x$.

---

a) $F(x) = x + C$



b) $F(x) =$



notation

L'intégrale indéfinie de la fonction $f(x)$ est notée $\int f(x)\,dx$.

a) Le symbole $\int$ ne fait aucunement référence au fait que l'intégration est l'opération inverse de la dérivation. Il fait plutôt référence au fait que l'intégration peut être considérée comme une opération de *sommation*. Le calcul intégral a été développé dans le but précis d'effectuer des sommes. Historiquement le signe d'intégration est simplement un S allongé employé par d'anciens auteurs pour indiquer "somme".

b) On utilise l'expression $f(x)\,dx$ plutôt que $f(x)$ (la fonction à intégrer) pour la simple raison que chercher la famille de fonctions ayant pour dérivée $f(x)$ équivaut à chercher la famille de fonctions ayant pour différentielle $f(x)\,dx$. Nous verrons qu'il existe des avantages à utiliser la différentielle pour ce type de problème. Un de ces avantages est la *propriété d'invariance de la différentielle* qui permet d'obtenir plus facilement l'intégrale indéfinie d'une fonction par un simple changement de variable.

Si $F(x)$ est une *primitive* de $f(x)$ alors

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

où

$\int$	est *le symbole d'intégration* ,
$f(x)$	est la fonction à intégrer ou *l'intégrande* ,
dx	est *l'élément différentiel* (il indique par rapport à quelle variable on intègre,
C	est la *constante d'intégration* ,
$F(x) + C$	est *l'intégrale indéfinie* de $f(x)$.

proposition 2.2.2

Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors il découle de la définition 2.2.2 que

la dérivée d'une primitive quelconque est égale à la fonction à intégrer

1. $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x) + C\right) = f(x)$$

La différentielle d'une intégrale indéfinie est égale à l'expression sous le symbole d'intégration

2. $$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = f(x)\,dx$$

L'intégrale indéfinie de la différentielle d'une fonction est égale à la fonction plus une constante

3. $$\int d\left(F(x)\right) = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Une question se pose naturellement.

Toute fonction $f(x)$ possède-t-elle une primitive
et par conséquent une intégrale indéfinie ?

La réponse est non. On peut par ailleurs affirmer que

condition d'existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive sur cet intervalle.

Même si on est assuré de l'existence d'une primitive, il n'est pas toujours facile de l'obtenir. Dans certains cas, la primitive ne pourra s'exprimer à l'aide d'un nombre fini de *fonctions élémentaires*.

(Une fonction élémentaire c'est une fonction que l'on obtient à l'aide d'une équation du type $y = f(x)$ construite en utilisant des fonctions connues ainsi que les opérations $+, -, \times, \div$ et la composition de fonctions.)

exemple 2.2.3

Effectuer

a) $\int 3\,dx$

b) $\int x\,dx$

c) $\int x^5\,dx$

d) $\int x^{-1}\,dx$

e) $\int e^{2x}\,dx$

f) $\int (\sin x)\,dx$

g) $\int (\cos 3x)\,dx$

h) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Il n'existe pas de méthode générale d'intégration. Certaines règles de dérivation serviront à intégrer. La règle d'intégration d'une puissance d'une variable est l'une des plus simples à appliquer.

a) $$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{pour } n \neq -1$$

démonstration

On peut facilement démontrer le résultat. Il suffit de montrer que la différentielle du membre de droite correspond à la différentielle qui apparaît dans le membre de gauche ou plus simplement, de vérifier que la dérivée du membre de droite correspond à l'intégrande du problème.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{1}{n+1}\,(n+1)\,x^n = x^n \qquad \text{pour } n \neq -1$$

exemple 2.2.4

Effectuer

a) $\int x^7\,dx$

b) $\int \sqrt{x}\,dx$

c) $\int \frac{1}{t^3}\,dt$

d) $\int 1\,dr$

rép: a) $\frac{x^8}{8} + C$; b) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$; c) $-\frac{1}{2t^2} + C$; d) $r + C$

Lorsque $n = -1$ la règle précédente ne s'applique pas. On utilise plutôt celle-ci.

b) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

démonstration

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x| + C\right) = \frac{1}{x}$$

propriétés de l'intégrale indéfinie

1. $\displaystyle\int k\,f(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$ où k est une constante réelle,

2. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$

démonstration

1. On justifie la première propriété en dérivant les deux membres de l'égalité.

la dérivée d'une primitive est égale à la fonction à intégrer

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int k\,f(x)\ dx\right) = k\,f(x)$

propriété de la dérivée et la dérivée d'une primitive est égale à la fonction à intégrer

b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(k\int f(x)\ dx\right) = k\,\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\ dx\right) = k\,f(x)$

Les dérivées des deux membres sont égales; par conséquent, les fonctions à gauche et à droite de l'égalité ne diffèrent que par une constante (proposition 2.2.1). La première propriété de l'intégrale indéfinie doit être comprise dans ce sens.

2. On justifie la seconde propriété de la même façon.

la dérivée d'une primitive est égale à la fonction à intégrer

a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int (f(x) \pm g(x))\ dx\right) = f(x) \pm g(x)$

propriété de la dérivée et la dérivée d'une primitive est égale à la fonction à intégrer

b) $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx\right) = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\ dx\right) \pm \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\ dx\right)$$
$$= f(x) \pm g(x)$$

Les dérivées des deux membres sont égales; par conséquent, les fonctions à gauche et à droite de l'égalité ne diffèrent que par une constante (proposition 2.2.1). La seconde propriété de l'intégrale indéfinie doit être comprise dans ce sens.

Ces propriétés sont les deux seules propriétés de l'intégrale indéfinie. Il n'en existe pas pour intégrer un produit ou un quotient. Cependant, il sera parfois possible de transformer le produit ou le quotient et ensuite utiliser les deux propriétés du haut.

exemple 2.2.5

Effectuer $\displaystyle\int \left(3x^3 + \frac{2}{x}\right)dx$

---

l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales (propriété 2)

$$\int \left(3x^3 + \frac{2}{x}\right)dx = \int 3x^3\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx$$

l'intégrale du produit d'une constante et d'une fonction est égale au produit de la constante et de l'intégrale de la fonction (propriété 1)

$$= 3\int x^3\,dx + 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

règles d'une puissance d'une variable (règle a et règle b)

$$= 3\left(\frac{x^4}{4} + C_1\right) + 2\,(\ln|x| + C_2)$$

$3C_1+2C_2 = C$
il est inutile de tenir compte des constantes puisque de toute façon, ils sont remplacées par une seule constante C à la fin

$$= \frac{3x^4}{4} + 2\ln|x| + 3C_1 + 2C_2$$

$$= \frac{3x^4}{4} + 2\ln|x| + C$$

exemple 2.2.6

Effectuer $\displaystyle\int \left(\frac{1}{u^2} + 5u - 3 + \frac{4}{\sqrt{u}}\right)du$

---

rép: $-\frac{1}{u} + \frac{5u^2}{2} - 3u + 8\sqrt{u} + C$

exemple 2.2.7

Effectuer $\displaystyle\int \frac{(x^5 - x^2 + 8)}{x^3}\,dx$

---

rép: $\frac{x^3}{3} - \ln|x| - \frac{4}{x^2} + C$

Équations différentielles simples

équations différentielles

Toute équation contenant une dérivée est appelée une *équation différentielle*.

exemple 2.2.8

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x} - 1 \quad , \quad P\frac{dP}{dt} - \frac{5}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = a$$

sont trois équations différentielles simples.

solution générale d'une équation différentielle

L'ensemble des fonctions vérifiant une équation différentielle est appelé la *solution générale* de l'équation différentielle.

exemple 2.2.9

Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$\frac{dr}{dt} = 5\sqrt{t}\,(t - 3)$$

Sachant que $\frac{dr}{dt}$ peut être considéré comme un quotient de deux différentielles alors

$$\frac{dr}{dt} = 5\sqrt{t}\,(t - 3)$$

$$\Rightarrow \qquad dr = 5\sqrt{t}\,(t - 3)\ dt$$

donc $$\int dr = \int 5\sqrt{t}\,(t - 3)\ dt$$

par la proposition 2.2.2

et par conséquent, $$r + C_1 = \int 5\sqrt{t}\,(t - 3)\ dt$$

propriété 1 de l'intégrale indéfinie

$$r + C_1 = 5\int \sqrt{t}\,(t - 3)\ dt$$

Aucun changement de variable permet de résoudre l'intégrale; développons plutôt l'intégrande.

il est inutile de considérer la constante d'intégration apparaissant à gauche de l'égalité puisque de toute façon, cette constante sera intégrée à celle du membre de droite

$$r + C_1 = 5\int (t^{3/2} - 3t^{1/2})\ dt$$

$$= 5\int t^{3/2}\ dt \ - \ 15\int t^{1/2}\ dt$$

$$\Rightarrow \qquad r = 2t^{5/2} - 10t^{3/2} + C$$

Si l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

condition initiale et solution particulière d'une équation différentielle

possède une *condition initiale* telle que pour $x = x_0$, $y = y_0$ alors cette donnée permet d'obtenir une *solution particulière* de l'équation différentielle.

exemple 2.2.10

Trouver la solution (particulière) de l'équation différentielle du problème de l'exemple 2.2.9 vérifiant la condition initiale suivante

$$\text{pour } t = 1 \quad , \quad r = -3$$

Puisque $\qquad r = 2t^{5/2} - 10t^{3/2} + C$

et $\quad r = -3$ lorsque $t = 1$

alors $\qquad -3 = 2(1)^{5/2} - 10(1)^{3/2} + C$

$\qquad\qquad -3 = -8 + C$

$\Rightarrow \qquad C = 5$

La solution particulière de l'équation différentielle du problème de l'exemple 2.2.9 est donc

$$r = 2t^{5/2} - 10t^{3/2} + 5$$

exemple 2.2.11

La pente de la droite tangente à la courbe d'une fonction d'équation $y = f(x)$ est en tout point donnée par

$$3x^2 + 1.$$

La courbe de la fonction passe par le point (2,6).

a) Écrire l'équation différentielle décrivant cette situation.
b) Quelle est l'équation de cette courbe?

rép: a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$; b) $f(x) = x^3 + x - 4$

exemple 2.2.12

On prévoit que dans t mois, le taux de croissance de la population d'une ville sera de

$$5 + \sqrt{t} \quad \text{habitants par mois.}$$

Si le nombre d'habitants est actuellement de 10 000, quel sera-t-il dans 9 mois ?

rép: 10 063 habitants

exemple 2.2.13

Jean est présentement à une hauteur de 49 mètres sur le toit de son école. Il lance une balle vers le sol à une vitesse de -14,7 m/sec. En négligeant la résistance de l'air, déterminer,

a) la vitesse v de la balle en tout temps?
b) la position s de la balle par rapport au sol en tout temps?
c) à quel moment la balle heurtera le sol?
d) quelle sera la vitesse de la balle à ce moment?

considérer qu'après avoir quitté la main du lanceur, seule la force d'attraction détermine l'accélération de la balle; ainsi

$a = -9{,}8$ m/sec^2

rép: a) $v = -9{,}8\,t - 14{,}7$; b) $s = -4{,}9\,t^2 - 14{,}7\,t + 49$; c) 2 sec ; d) -34,3 m/sec

Exercices 2.2

1. Effectuer

a) $\int x^5 \, dx$

b) $\int \frac{1}{t^3} \, dt$

c) $\int 7\sqrt[3]{x^4} \, dx$

d) $\int \frac{x}{3} \, dx$

e) $\int 3\pi r^2 \, dr$

k est une constante

f) $\int k \, dt$

g) $\int (2x^3 + 6x - 5) \, dx$

h) $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$

i) $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{5} \, dx$

j) $\int \left(\frac{u}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2u}\right) du$

k) $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} - 1\right) dx$

l) $\int \frac{y^3 + 2y^2 - 1}{y^3} \, dy$

m) $\int \sqrt{x}\,(3x - 1) \, dx$

n) $\int 4t\,(t + 1)\,(t + 2) \, dt$

2. Trouver la solution générale des équations différentielles

a et b sont des constantes

a) $\frac{dv}{dt} = 3t^2 + 6t - 5$ b) $\frac{du}{dr} = a + \frac{b}{\sqrt{r}}$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $\frac{ds}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ si pour $y = 4$ on a $s = 3$,

b) $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2 - t}{t^3}$ si pour $t = 1$ on a $r = 0$ et $\frac{dr}{dt} = 3$.

4. Trouver l'équation de la fonction dont la pente de la tangente est

$$3x^2 - \frac{2}{x^3} + 5$$

pour toute valeur de x si la courbe passe par le point $(1, 5)$.

5. Une ville compte présentement 10 000 habitants. Elle croît au taux de

$$4 + 5\sqrt[3]{t^2} \quad \text{habitants par mois}$$

Quelle sera sa population dans 8 mois?

6. Un jeune pin croît au taux de

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\sqrt[3]{t}}{3} \quad \text{mètres par année}$$

dans lequel T(t) représente la taille de l'arbre en mètres à l'année t. Si sa taille initiale était de 1 m alors calculer sa taille un an plus tard.

7. La valeur d'une automobile déprécie au taux de $300t - 3600$ \$/an. Si l'auto vaut 12 150 \$ trois ans après son achat, quelle était sa valeur d'achat ?

8. Le volume V d'eau d'un réservoir percé diminue au taux de

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{t}{50} \quad \text{litres par minute.}$$

Si le volume d'eau initial dans le réservoir est de 400 litres alors calculer l'instant auquel le réservoir sera vide.

9. En tout point $(x, f(x))$ d'une courbe $y = f(x)$ on a $y'' = -2$. La courbe passe par le point (2, 3) et, en ce point, la pente de la tangente est -1. Quelle est l'équation de cette courbe?

10. Un objet partant du repos se déplace à la vitesse $v = 3t^2 + 2t$ m/s. Calculer la distance parcourue par cet objet après 3 secondes.

11. Un automobiliste filant à 108 km/h (30 m/s) applique les freins. Si l'auto décélère à raison de -6 m/s^2, déterminer

    a) la vitesse de l'auto après 2 secondes,
    b) le temps nécessaire pour que l'automobile s'immobilise.

12. Un physicien s'intéresse au mouvement d'une particule. Au début de l'observation, la vitesse de la particule est de 5 cm/sec. Si t secondes plus tard, son accélération est de

$$\frac{3\sqrt{t}}{2} \quad \text{cm/sec}^2$$

    a) Quelle sera la vitesse de la particule après 9 secondes?
    b) Quelle distance aura parcourue la particule entre la première seconde et la quatrième seconde?

13. On lance une balle verticalement vers le bas du sommet d'un bâtiment d'une hauteur de 78,4 m à une vitesse de $-29,4$ m/s. En négligeant la résistance de l'air et en considérant l'accélération gravitationnelle constante de $-9,8$ m/s^2,

    a) calculer la vitesse de la balle en tout temps puis calculer la position de la balle par rapport au sol en tout temps,
    b) calculer l'instant auquel la balle touche le sol,
    c) calculer la vitesse de la balle lorsqu'elle touche le sol.

Réponses 2.2

1. a) $\frac{x^6}{6} + C$
   b) $-\frac{1}{2t^2} + C$
   c) $3\sqrt[3]{x^7} + C$
   d) $\frac{x^2}{6} + C$
   e) $\pi r^3 + C$
   f) $kt + C$
   g) $\frac{x^4}{2} + 3x^2 - 5x + C$
   h) $2\sqrt{x^3} + \frac{1}{x} + C$
   i) $\frac{1}{5}\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right) + C$
   j) $\frac{u^2 + 3u - 6\ln|u|}{4} + C$
   k) $2\sqrt{x} - x + C$
   l) $y + 2\ln|y| + \frac{1}{2y^2} + C$
   m) $\frac{6}{5}\sqrt{x^5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
   n) $t^4 + 4t^3 + 4t^2 + C$

2. a) $v = t^3 + 3t^2 - 5t + C$
   b) $u = ar + 2b\sqrt{r} + C$

3. a) $s = \sqrt{y} + 1$
   b) $r = \frac{1}{t} + \ln|t| + 3t - 4$

4. $y = x^3 + \frac{1}{x^2} + 5x - 2$

5. 10 128 habitants

6. 1,25 m

7. 21 600 $

8. dans 200 minutes

9. $y = -x^2 + 3x + 1$

10. 36 mètres

11. a) 18 m/s (64,8 km/h)
    b) 5 s

12. a) 32 cm/s
    b) 27,4 cm

13. a) vitesse = $-9,8t - 29,4$; distance = $-4,9t^2 - 29,4t + 78,4$
    b) après 2 s
    c) -49 m/s

2.3 Modèles d'intégration et méthode de changement de variable

Les règles d'intégration de la section précédente sont très utiles lorsque l'intégrande peut s'exprimer sous la forme d'une somme ou d'une différence de puissances de la variable indépendante. Pour effectuer

$$\int (x + 1)^8 \, dx$$

cette méthode s'avère inefficace. Il existe heureusement une technique d'intégration basée sur la *propriété d'invariance de la différentielle* qui permet de résoudre le problème. Cette technique porte le nom de *méthode de changement de variable*. C'est un des plus puissants outils dont on dispose pour effectuer une intégrale indéfinie. Cette méthode vise à transformer l'expression à intégrer par l'introduction d'une nouvelle variable.

Soit $u = u(x)$,

Modèle 1

$$\boxed{\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)}$$

démonstration

Par la propriété d'invariance de la différentielle,

$$d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1} + C\right) = u^n \, du$$

exemple 2.3.1

Effectuer $\int (3x - 5)^6 \, 3\,dx$

Posons $u = 3x - 5$

par conséquent, $du = 3\,dx$

$$\text{d'où} \quad \int \boxed{(3x - 5)}^6 \, \boxed{3\,dx} = \int u^6 \, du$$

par le modèle 1

$$= \frac{u^7}{7} + C$$

puisque $u = 3x - 5$

$$= \frac{(3x - 5)^7}{7} + C$$

exemple 2.3.2

Effectuer $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

$$\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int (2x+1)^{-3}\,dx$$

Posons $\quad u = 2x + 1$

par conséquent, $\quad du = 2\,dx$

$$\text{d'où} \quad \int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int \frac{1}{(2x+1)^3}\,\frac{2}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \boxed{(2x+1)}^{-3}\ \boxed{2\,dx}$$

par le modèle 1

$$= \frac{1}{2}\int u^{-3}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C$$

puisque $u = 2x + 1$

$$= -\frac{1}{4u^2} + C$$

$$= -\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$$

exemple 2.3.3

Effectuer $\displaystyle\int \sqrt{3-4x}\,dx$

rép: $-\frac{1}{6}\sqrt{(3-4x)^3} + C$

exemple 2.3.4

Effectuer $\displaystyle\int \frac{7t^2}{\sqrt{1 + 2t^3}}\, dt$

rép: $\frac{7}{3}\sqrt{1+ 2t^3} + C$

exemple 2.3.5

Effectuer $\displaystyle\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x - 5)^2\, dx$

rép: $\frac{1}{9}(x^3 + 3x - 5)^3 + C$

exemple 2.3.6

Effectuer $\displaystyle\int \frac{e^u}{(1 - ae^u)^2}\, du$

rép: $\frac{1}{a(1 - ae^u)} + C$

exemple 2.3.7

Effectuer $\int x(x^3 + 2)^2 \, dx$

---

la méthode de changement de variable ne peut être utilisée dans ce cas, pourquoi ?

rép: $\frac{1}{8} x^8 + \frac{4}{5} x^5 + 2x^2 + C$

Soit $u = u(x)$,

Modèle 2

$$\int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + C$$

démonstration

Par la propriété d'invariance de la différentielle,

$$d(\ln|u| + C) = \frac{1}{u} \, du$$

exemple 2.3.8

Effectuer $\int \frac{1}{2 - 5x} \, dx$

Posons $\quad u = 2 - 5x$

par conséquent, $\quad du = -5 \, dx$

d'où

$$\int \frac{1}{2 - 5x} \, dx = \frac{1}{-5} \int \frac{1}{\boxed{2 - 5x}} \boxed{-5 \, dx}$$

$$= -\frac{1}{5} \int \frac{1}{u} \, du$$

par le modèle 2

$$= -\frac{1}{5} \ln|u| + C$$

puisque $u = 2 - 5x$

$$= -\frac{\ln|2 - 5x|}{5} + C$$

exemple 2.3.9

Effectuer $\displaystyle\int \frac{t}{1 - t^2}\, dt$

rép: $-\frac{1}{2}\ln|1 - t^2| + C$

exemple 2.3.10

Effectuer $\displaystyle\int \frac{2}{v(\ln v)}\, dv$

rép: $2 \ln|\ln v| + C$

exemple 2.3.11

Effectuer $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{3\sin\theta - 1}\, d\theta$

rép: $\frac{1}{3}\ln|3\sin\theta - 1| + C$

exemple 2.3.12

Effectuer $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\, dx$

lorsque l'intégrande est une fonction rationnelle et que le numérateur a un degré supérieur ou égal au degré du dénominateur, on transforme l'intégrande par division

rép: $x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$

Il existe un très grand nombre de modèles d'intégration. Certains recueils fournissent jusqu'à 600 modèles. Ils sont énumérés par classe d'intégrande. Lorsque l'intégrande présente une certaine forme, on fournit l'intégrale indéfinie correspondant à cette forme.

Nous utiliserons seulement 17 modèles d'intégration (les deux premiers modèles ont déjà été présentés).

Soit $u = u(x)$,

Modèle 3

$$\int b^u\, du = \frac{b^u}{\ln b} + C \qquad (b > 0 \text{ et } b \neq 1)$$

Modèle 4

$$\int e^u\, du = e^u + C$$

À titre d'exercice, démontrer chacun de ces modèles.

exemple 2.3.13

Effectuer $\int e^{2x}\, dx$

Posons $u = 2x$

par conséquent, $du = 2\, dx$

d'où

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int e^{\boxed{2x}}\ \boxed{2\, dx}$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{u}\, du$$

par le modèle 4

$$= \frac{1}{2}\, e^{u} + C$$

puisque $u = 2x$

$$= \frac{e^{2x}}{2} + C$$

exemple 2.3.14

Effectuer $\displaystyle\int \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

rép: $\dfrac{2}{\ln 3}\ 3^{\sqrt{x}} + C$

exemple 2.3.15

Effectuer $\int e^{\text{tg } 3x} \sec^2 3x \; dx$

rép: $\frac{1}{3} e^{\text{tg } 3x} + C$

exemple 2.3.16

Effectuer $\displaystyle\int \frac{7^{\arcsin(5x)}}{\sqrt{1 - 25x^2}} \, dx$

rép: $\frac{1}{5 \ln 7} \, 7^{\arcsin 5x} + C$

Lorsque l'intégrande est de forme trigonométrique nous aurons à notre disposition 10 modèles.

Soit $u = u(x)$,

Modèle 5

$$\int \sin u \; du = -\cos u + C$$

Modèle 6

$$\int \cos u \; du = \sin u + C$$

Modèle 7

$$\int \sec^2 u \; du = \text{tg } u + C$$

Modèle 8

$$\int \text{cosec}^2 u \; du = -\text{cotg } u + C$$

Modèle 9 $\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$

Modèle 10 $\int \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

Modèle 11 $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\sec u| + C$

Modèle 12 $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\sin u| + C$

Modèle 13 $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

Modèle 14 $\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

À titre d'exercice, démontrer chacun des modèles.

exemple 2.3.17 Effectuer $\int x \sin x^2 \, dx$

Posons

$$u = x^2$$
$$du = 2x \, dx$$

d'où

$$\int x \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2}\int \sin \boxed{x^2} \; \boxed{2x \; dx}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u \, du$$

par le modèle 5

$$= \frac{1}{2}(-\cos u) + C$$

puisque $u = x^2$

$$= -\frac{\cos x^2}{2} + C$$

exemple 2.3.18

Effectuer $\displaystyle\int \frac{5\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$

rép: $-5\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{x} + C$

exemple 2.3.19

Effectuer $\displaystyle\int 3\,\mathrm{cosec}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$

rép: $-6\,\mathrm{cosec}\,\frac{x}{2} + C$

exemple 2.3.20

Effectuer $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{tg}(1 + x^3)\;dx$

rép: $\frac{1}{3}\ln|\sec(1 + x^3)| + C$

exemple 2.3.21

Effectuer $\displaystyle\int \frac{x}{\cos x^2}\, dx$

rép: $\frac{1}{2} \ln|\sec x^2 + \operatorname{tg} x^2| + C$

exemple 2.3.22

Effectuer $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 5\theta \; d\theta$

lorsque l'intégrande est une fonction trigonométrique qui ne se ramène pas directement à un des modèles proposés, l'utilisation des identités trigonométriques peut être très utile pour transformer la fonction

rép: $\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5\theta - \theta + C$

Voici les trois derniers modèles qui découlent directement des formules de dérivation des fonctions trigonométriques inverses.

Soit $u = u(x)$,

Modèle 15

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\, du = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$$

Modèle 16

$$\int \frac{1}{a^2 + u^2}\, du = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (a \neq 0)$$

Modèle 17

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - a^2}}\, du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (a > 0)$$

À titre d'exercice, démontrer chacun des modèles.

exemple 2.3.23

Effectuer $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}}\,dx$

---

le problème peut aussi s'écrire de la façon suivante: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$

Posons $\quad u = 3x$

par conséquent, $\quad du = 3\,dx$

d'où

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{2^2 - \boxed{3x}^2}}\,\boxed{3\,dx}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{2^2 - u^2}}\,du$$

par le modèle 15

$$= \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

puisque $u = 3x$

$$= \frac{\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)}{3} + C$$

exemple 2.3.24

Effectuer $\displaystyle\int \frac{1}{4 + 25x^2}\,dx$

---

rép: $\dfrac{1}{10}\arctg\dfrac{5x}{2} + C$

exemple 2.3.25

Effectuer $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 25}}$

rép: $\frac{1}{5}\ \text{arcsec}\,\frac{2x}{5} + C$

exemple 2.3.26

Effectuer $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{5 + \sin^2 2x}\,dx$

rép: $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ \text{arctg}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{5}}\right) + C$

exemple 2.3.27

Effectuer $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^4 - 25}}$

rép: $\frac{1}{10}\ \text{arcsec}\,\frac{2x^2}{5} + C$

Exercices 2.3

1. Effectuer

a) $\int 3x^2(x^3 + 2)^4 \, dx$

b) $\int \frac{1}{(1 - 5x)^2} \, dx$

c) $\int x\sqrt{2 + 3x^2} \, dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \, dx$

e) $\int (a - bt)^4 \, dt$

f) $\int (x + 3)(x^2 + 6x)^5 \, dx$

g) $\int \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 dx$

h) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x}} \, dx$

i) $\int \frac{3y}{y^2 - 1} \, dy$

j) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 5} \, dx$

k) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} \, dx$

l) $\int \frac{x^2 + 2x - 5}{x + 1} \, dx$

m) $\int e^u (1 + 2e^u)^3 \, du$

n) $\int e^{2x}\sqrt{1 + e^{2x}} \, dx$

o) $\int e^2 \, dx$

p) $\int \frac{e^r}{e^r - 1} \, dr$

q) $\int \frac{2}{y(\ln y)^2} \, dy$

r) $\int \frac{x(\ln\sqrt{x^2 + 1})}{x^2 + 1} \, dx$

s) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

t) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$

u) $\int \frac{\sin 3x}{\sec^3 3x} \, dx$

v) $\int \frac{\cos^2 \sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

w) $\int \operatorname{tg}^2 4\theta \sec^2 4\theta \; d\theta$

y) $\int \dfrac{2 \sin 2\theta \cos 2\theta}{4 + \sin^2 2\theta} \, d\theta$

x) $\int \dfrac{\operatorname{tg}(\ln x) \sec^2(\ln x)}{2x} \, dx$

z) $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \, dx$

2. Effectuer

a) $\int 3\, e^{- x/2}\, dx$

f) $\int (2^y + y^2 + e^2) \; dy$

b) $\int 5^{4x+3} \; dx$

g) $\int \dfrac{5^x}{\sqrt{1 - 5^x}} \, dx$

c) $\int \dfrac{3^{\ln x}}{x} dx$

h) $\int (e^r + 1)^2 \; dr$

d) $\int e^{2x} (e^{2x} + 1)^3 \; dx$

i) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x \; dx$

e) $\int b^{u \ln u} (1 + \ln u) \; du$

j $\int 3 \sec^2 5x \; e^{2\operatorname{tg} 5x} \; dx$

3. Effectuer

a) $\int x \cos(x^2) \; dx$

e) $\int x^2 \sec^2(x^3) \; dx$

b) $\int \dfrac{\sin(\ln x)}{x} \, dx$

f) $\int \dfrac{\operatorname{cosec}(\ln x)}{x} \, dx$

c) $\int (2\sin 3x + 3\cos 2x) \; dx$

g) $\int x \operatorname{cosec}^2(3x^2 + 1) \; dx$

d) $\int (\sin x) \sin(\cos x) \; dx$

h) $\int e^{3x} \sec(e^{3x}) \; dx$

i) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$

j) $\int \frac{\sin 2x}{3 + \cos 2x}\, dx$

k) $\int e^{3\cos 2x} \sin 2x \; dx$

l) $\int \frac{\sec^2(3x)}{3\mathrm{tg}(3x)}\, dx$

m) $\int (1 + \mathrm{tg}\, x)^2\, dx$

n) $\int (\sin x)(\cos x)\; dx$

4. Effectuer

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 25x^2}}\, dx$

b) $\int \frac{1}{4x^2 + 9}\, dx$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 25}}$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x + 2)^2}}$

e) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}}\, dx$

f) $\int \frac{1}{x\sqrt{9x^2 - 4}}\, dx$

g) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4 - 1}}\, dx$

h) $\int \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}\, dx$

i) $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}}\, dx$

j) $\int \frac{ax}{x^4 + b^4}\, dx$

k) $\int \frac{t}{\sqrt{2 - 5t^2}}\, dt$

l) $\int \frac{\sin x}{4 + \cos^2 x}\, dx$

m) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^x}}\, dx$

n) $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{x}}$

o) $\int \frac{t^3}{\sqrt{a^4 + t^4}}\, dt$

p) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

5. Après t minutes, une baignoire se remplit à une vitesse de

$$\left(3t + \frac{1}{(t+1)^2}\right) \text{ litres par minute.}$$

Combien d'eau y a-t-il dans la baignoire après 2 minutes si elle était vide au départ ?

6. La distance y (en kilomètres) entre deux voitures à l'instant t (en heures) varie au taux de

$$\frac{dy}{dt} = 50\left(\frac{1 - e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\right) \text{ km/h}$$

Trouver la distance entre ces voitures au bout de quatre heures sachant que leur distance initiale était nulle.

7. Le taux de variation d'un courant i (en ampères) par rapport au temps t (en secondes) est donné par l'équation

$$1200\pi\cos(120\pi t) \text{ A/s}$$

Si initialement, l'intensité du courant est de 1 ampère alors déterminer cette intensité 1/120 seconde plus tard.

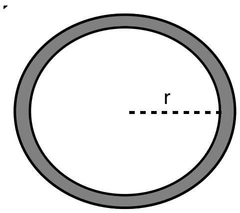


figure 2.3.1

8. L'artériosclérose provoque un accroissement graduel de la paroi des artères sanguines. Supposer que le rayon intérieur r de la section transversale d'une certaine artère est de 1 cm et que ce rayon décroît avec l'âge au taux de

$$\frac{dr}{dt} = -0{,}02\, e^{-0{,}002\,t} \text{ cm/année}$$

Calculer le rayon intérieur de cette artère au bout de 5 ans.

9. Effectuer

a) $\displaystyle\int \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^3}}\right) dx$ d) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\sin^4\sqrt{x}}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{e^{1 + \ln u}}{u}\, du$ e) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 3v}{v}\, dv$

c) $\displaystyle\int \frac{mt}{a + bt^2}\, dt$ f) $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2(\sin 2x) \cos 2x\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{81y^4 - 1}}$

p) $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{y}\,(1 + \sqrt{y})^2}$

h) $\displaystyle\int (\text{tg } 2x + \sec 2x)^2 \; dx$

q) $\displaystyle\int \frac{\text{cotg } x}{\sqrt{9\sin^2 x - 4}} \; dx$

i) $\displaystyle\int \sqrt{t}\,(3 - 5t) \; dt$

r) $\displaystyle\int \frac{u^2 + u + 1}{u - 2} \; du$

j) $\displaystyle\int \text{tg}^2 \theta \sec^2 \theta \; d\theta$

s) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 3x}{\text{tg } 3x} \; dx$

k) $\displaystyle\int \frac{2s - 7}{s^2 + 9} \; ds$

t) $\displaystyle\int \frac{e^x (1 - \cos x)}{e^{\sin x}} \; dx$

l) $\displaystyle\int \text{tg } x \sec^3 x \; dx$

u) $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{\text{cotg } x^2}$

m) $\displaystyle\int 2^{\text{tg } x/2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

v) $\displaystyle\int \frac{1 + \text{tg } x}{\cos x} \; dx$

n) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} + x^2} \; dx$

w) $\displaystyle\int \text{tg } x \cos^3 x \; dx$

o) $\displaystyle\int \frac{\text{tg } \theta}{\ln(\cos \theta)} \; d\theta$

x) $\displaystyle\int \left(e^y - \frac{1}{e^y}\right)^2 dy$

Réponses 2.3

1. a) $\dfrac{(x^3 + 2)^5}{5} + C$
   b) $\dfrac{1}{5(1 - 5x)} + C$
   c) $\dfrac{\sqrt{(2 + 3x^2)^3}}{9} + C$
   d) $-2\sqrt{1 - x} + C$
   e) $-\dfrac{(a - bt)^5}{5b} + C$
   f) $\dfrac{(x^2 + 6x)^6}{12} + C$
   g) $-\dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^4 + C$
   h) $\dfrac{4\sqrt{(\sqrt{x} + 1)^3}}{3} + C$
   i) $\dfrac{3}{2}\ln|y^2 - 1| + C$
   j) $\dfrac{\ln|x^2 + 2x - 5|}{2} + C$
   k) $-2\ln|1 - \sqrt{x}\ | + C$
   l) $\dfrac{x^2}{2} + x - 6\ln|x + 1| + C$
   m) $\dfrac{(1 + 2e^u)^4}{8} + C$
   n) $\dfrac{\sqrt{(1 + e^{2x})^3}}{3} + C$
   o) $e^2x + C$
   p) $\ln|e^r - 1| + C$
   q) $-\dfrac{2}{\ln y} + C$
   r) $\dfrac{\ln^2\sqrt{x^2 + 1}}{2} + C$
   s) $\dfrac{\sin^3 x}{3} + C$
   t) $\dfrac{\sec^2 x}{2} + C$
   u) $-\dfrac{\cos^4 3x}{12} + C$
   v) $-\dfrac{2\cos^3\sqrt{x}}{3} + C$
   w) $\dfrac{tg^3 4\theta}{12} + C$
   x) $\dfrac{tg^2(\ln x)}{4} + C$
   y) $\dfrac{\ln(4 + \sin^2 2\theta)}{2} + C$
   z) $\dfrac{(\text{arctg } x)^2}{2} + C$

2. a) $-6\,e^{-x/2} + C$
   b) $\dfrac{5^{4x+3}}{4(\ln 5)} + C$
   c) $\dfrac{3^{\ln x}}{\ln 3} + C$
   d) $\dfrac{(e^{2x} + 1)^4}{8} + C$

e) $\dfrac{b^{u(\ln u)}}{\ln b} + C$

f) $\dfrac{2^y}{\ln 2} + \dfrac{y^3}{3} + e^2 y + C$

g) $-\dfrac{2\sqrt{1 - 5^x}}{\ln 5} + C$

h) $\dfrac{e^{2r}}{2} + 2e^r + r + C$

i) $\dfrac{e^{\sin 2x}}{2} + C$

j) $\dfrac{3e^{2\mathrm{tg}\, 5x}}{10} + C$

3. a) $\dfrac{\sin x^2}{2} + C$

b) $-\cos(\ln x) + C$

c) $-\dfrac{2\cos 3x}{3} + \dfrac{3\sin 2x}{2} + C$

d) $\cos(\cos x) + C$

e) $\dfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}\, x^3 + C$

f) $\ln|\mathrm{cosec}(\ln x) - \mathrm{cotg}(\ln x)| + C$

g) $-\dfrac{\mathrm{cotg}(3x^2 + 1)}{6} + C$

h) $\dfrac{1}{3}\ln|\sec e^{3x} + \mathrm{tg}\, e^{3x}| + C$

i) $-\mathrm{cotg}\, x + C$

j) $-\dfrac{1}{2}\ln|3 + \cos 2x| + C$

k) $-\dfrac{1}{6}\, e^{3\cos 2x} + C$

l) $\dfrac{1}{9}\ln|\mathrm{tg}\, 3x| + C$

m) $\mathrm{tg}\, x + 2\ln|\sec x| + C$

n) $\dfrac{\sin^2 x}{2} + C$ ou $-\dfrac{\cos^2 x}{2} + C$

ou $-\dfrac{\cos 2x}{4} + C$

4. a) $\dfrac{1}{5}\arcsin\left(\dfrac{5x}{2}\right) + C$

b) $\dfrac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{2x}{3}\right) + C$

c) $\dfrac{1}{5}\,\mathrm{arcsec}\left(\dfrac{x}{5}\right) + C$

d) $\arcsin\left(\dfrac{x + 2}{2}\right) + C$

e) $\dfrac{1}{3}\arcsin x^3 + C$

f) $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arcsec}\left(\dfrac{3x}{2}\right) + C$

g) $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arcsec}\, x^2 + C$

h) $\arcsin(\ln x) + C$

i) $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\, e^{2x} + C$

j) $\dfrac{a}{2b^2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x^2}{b^2}\right) + C$

k) $-\dfrac{\sqrt{2 - 5t^2}}{5} + C$

l) $-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\cos x}{2}\right) + C$

m) $-2\sqrt{1 - e^x} + C$

n) $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C$

o) $\dfrac{\sqrt{a^4 + t^4}}{2} + C$

p) $\mathrm{arctg}(e^x) + C$

5. 6,66 litres

6. 113,5 km

7. 1 A

8. 0,9 cm

9.
a) $x + \dfrac{4}{\sqrt{x}} + C$

b) $e^{1 + \ln u} + C$

c) $\dfrac{m}{2b} \ln|a + bt^2| + C$

d) $-\dfrac{2}{3\sin^3 \sqrt{x}} + C$

e) $\dfrac{\ln^4 3v}{4} + C$

f) $-\dfrac{1}{2} \operatorname{cotg}(\sin 2x) + C$

g) $\dfrac{1}{2} \operatorname{arcsec}(9y^2) + C$

h) $\operatorname{tg} 2x + \sec 2x - x + C$

i) $2t\sqrt{t} - 2t^2\sqrt{t} + C$

j) $\dfrac{\operatorname{tg}^3 \theta}{3} + C$

k) $\ln(s^2 + 9) - \dfrac{7}{3} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{s}{3}\right) + C$

l) $\dfrac{\sec^3 x}{3} + C$

m) $\dfrac{2^{1+\operatorname{tg}(x/2)}}{\ln 2} + C$

n) $\dfrac{1}{2} \ln(e^{2x} + x^2) + C$

o) $-\ln|\ln(\cos \theta)| + C$

p) $-\dfrac{2}{1 + \sqrt{y}} + C$

q) $\dfrac{1}{2} \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{3\sin x}{2}\right) + C$

r) $\dfrac{u^2}{2} + 3u + 7\ln|u - 2| + C$

s) $\dfrac{1}{3} \ln|\operatorname{tg} 3x| + C$

t) $e^{x - \sin x} + C$

u) $\dfrac{1}{2} \ln|\sec x^2| + C$

v) $\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \sec x + C$

w) $-\dfrac{\cos^3 x}{3} + C$

x) $\dfrac{e^{2y}}{2} - 2y - \dfrac{1}{2e^{2y}} + C$

2.4 Équations différentielles

On poursuit maintenant notre étude sur les équations différentielles en se penchant sur deux classes d'équations que l'on rencontre très fréquemment en sciences: *les équations différentielles à variables séparables* et les équations *différentielles linéaires du premier ordre*.

a) Équations différentielles à variables séparables

Pour certaines équations différentielles, on devra au préalable séparer les variables avant d'intégrer les deux membres de l'équation.

définition 2.4.1

équations différentielles à variables séparables

Toute équation différentielle pouvant être écrite sous la forme

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

est dite à variables séparables. En intégrant chacun des membres, on obtient la solution générale de l'équation.

exemple 2.4.1

Trouver $y = f(x)$ si $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$ et $(2,1)$ est un point de la courbe.

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

Les variables qui apparaissent à droite sont de nature différente. Séparons ces variables de façon à regrouper d'un côté les termes en x et de l'autre, les termes en y. On obtient

$$\frac{dy}{y^2} = x\,dx$$

donc

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x\,dx$$

L'intégration de chaque membre conduit au résultat:

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2 + 2C}{2}$$

que l'on peut exprimer ainsi

$$y = \frac{-2}{x^2 + 2C}$$

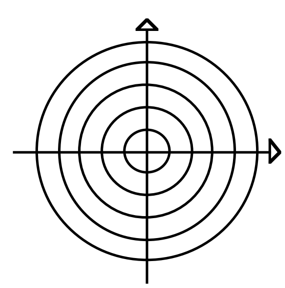
sachant que $(2,1)$ est un point de la courbe définie par $y = f(x)$, on a

$$1 = \frac{-2}{((2)^2 + 2C)} \quad \Rightarrow \quad C = -3$$

L'équation cherchée est $y = \dfrac{-2}{x^2 - 6}$.

exemple 2.4.2

Trouver $y = f(x)$ si $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. Représenter graphiquement la famille de courbes satisfaisant l'équation.



rép: $x^2 + y^2 = C$

Utilisons maintenant les équations différentielles pour résoudre certains phénomènes de croissance.

exemple 2.4.3

croissance d'une population (bactéries, êtres humains, ...)

Le taux de croissance d'une culture de bactéries est en tout temps proportionnel au nombre de bactéries présentes dans la culture. Sachant que ce nombre double tous les 3 jours, combien aura-t-on de bactéries dans 20 jours si présentement on compte 1000 bactéries .

dans des conditions idéales (pas d'épidémie, pas de surpopulation, pas de prédateurs ...) le taux de croissance d'une population (bactéries, êtres humains ...) est, à tout instant, proportionnel à sa taille;

si N désigne la grandeur de la population à l'instant t et k est une constante alors

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Soit N le nombre de bactéries après t jours.

Étant donné que le taux de croissance de la culture de bactéries est en tout temps proportionnel au nombre de bactéries présentes dans cette culture. Il existe donc une constante k telle que

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

En séparant les variables, on obtient

$$\frac{dN}{N} = k\,dt$$

et
$$\int \frac{dN}{N} = \int k\,dt$$

donc
$$\ln|N| = kt + C$$

$$\ln N = kt + C \qquad (\text{car } N > 0)$$

$$N = e^{kt + C}$$

$$N = e^{C} e^{kt} \qquad (*)$$

si $\frac{dy}{dt} = ky$ et $y = y_o$ lorsque $t = 0$ alors la solution de l'équation différentielle pour la condition initiale donnée est $y = y_o e^{kt}$

Par hypothèse $N(0) = 1000$. On obtient de l'équation (*) que

$$1000 = e^{C}$$

donc
$$N = 1000\, e^{kt} \qquad (**)$$

Puisque $N(3) = 2000$, l'équation (**) conduit au résultat suivant

$$2000 = 1000\, e^{3k}$$

$$2 = e^{3k}$$

$$3k = \ln 2$$

$$k = \frac{\ln 2}{3}$$

Par conséquent
$$N = 1000\, e^{(1/3)(\ln 2)\, t}$$

Le nombre de bactéries dans 20 jours sera donc

$$N = 1000\, e^{(1/3)(\ln 2)\, 20}$$
$$= 101\ 594 \text{ bactéries}$$

exemple 2.4.4

croissance d'un capital

Un montant de 10 000 $ est placé à un taux d'intérêt annuel de 10 %, <u>capitalisé continuellement</u>. Quel sera le capital accumulé au bout de 5 ans?

---

un placement dont les intérêts sont capitalisés continuellement croît en tout temps proportionnellement à sa valeur;

si V désigne la valeur du capital après t années et si le taux d'intérêt est de i % alors

$$\frac{dV}{dt} = \frac{i}{100}\,V$$

Soit V la valeur du capital accumulé après t années.

Le taux d'intérêt étant de 10 %, on a

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}1V$$

rép: 16 487,21 $

exemple 2.4.5

désintégration d'une substance radioactive

le taux de désintégration d'une substance radioactive est en tout temps proportionnel à la quantité de cette substance;

si Q désigne la quantité d'une substance radioactive après t périodes de temps et que cette substance se désintègre au taux de v % par période alors

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{v}{100}\,Q$$

*la **demi-vie** d'une substance radioactive est le temps nécessaire pour que la moitié de la masse de cette substance soit désintégrée*

Le carbone 14 se désintègre à un taux de 0,01238 % par an. Dans combien d'années la moitié de sa masse aura-t-elle disparu ?

(On cherche la demi-vie du carbone 14)

Soit Q la quantité de carbone 14 après t années.

La désintégration étant continue on a:

$$\frac{dQ}{dt} = -0{,}0001238\,Q$$

(le taux de variation est négatif puisque la quantité diminue)

rép: 5599 années

Exercices 2.4 a)

1. Résoudre chacune des équations différentielles données au point indiqué.

   a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y^2}$; $(-4, 3)$

   b) $\dfrac{dy}{dx} = y\sqrt{x}$; $(9, 1)$

   c) $\dfrac{dy}{dt} = t^3y^2$; $(0, 1)$

   d) $\dfrac{du}{dv} = u - 2uv$; $(1, 1)$, $u > 0$

2. Trouver l'équation de la courbe dont la pente en tout point est
$$m = \frac{x^2 - 1}{x^2y}$$
si la courbe passe par le point $(1, 2)$.

3. Représenter graphiquement la famille de courbes satisfaisant l'équation différentielle
$$2y\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

4. Résoudre chacune des équations différentielles au point indiqué.

   a) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2 - 2x - 2xy^2$; $(0, 0)$

   b) $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 9}{xy} - \dfrac{6}{x}$; $(1, 2)$

5. Dans une culture de bactéries, le nombre de bactéries s'accroît à un taux proportionnel au nombre de bactéries présentes à tout moment. Si au début de l'expérience nous comptons 3000 bactéries et, deux jours après, 7000 bactéries, déterminer la quantité de bactéries après cinq jours.

6. Dans une réaction chimique, une substance A est changée en une substance B à un taux directement proportionnel à la quantité non encore transformée de la substance A. On commence avec 42 grammes de A et après 3 heures, il ne reste plus que 31 grammes de cette substance. Combien en restera-t-il après 5 heures?

7. Une compagnie d'investissement a adopté comme politique d'investir à un rythme qui est proportionnel au montant investi en tout temps. Si au début de ses opérations, elle investit 1000 \$ et que deux ans plus tard ses investissements se chiffrent à 3000 \$, à combien se chiffreront ses investissements après dix ans ?

un placement dont les intérêts sont capitalisés continuellement croît en tout temps proportionnellement à sa valeur

8. Quelle sera la valeur dans 10 ans d'un capital de 1000 $ placé à un taux d'intérêt continue de 8 % par année?

9. Une somme d'argent est placée au taux de 10 % par année composée continuellement. Cette somme devient après 5 ans, 7419,25 $, quelle était le capital initial investi?

10. Une somme d'argent est déposée dans un compte à un taux d'intérêt annuel de 7,5 % composé à chaque instant. Dans combien de temps la somme aura-t-elle quadruplé?

le taux de désintégration d'une substance radioactive est en tout temps proportionnel à la quantité de cette substance

11. Une substance radioactive se désintègre à un taux de 0,00128% par an. Quelle est sa demi-vie ?

attention! si 1/3 de la quantité radioactive se désintègre, il reste alors 2/3 de cette quantité

12. Si la demi-vie d'une substance radioactive est de 1 600 ans, en combien d'années le tiers de la quantité initiale de cette substance se désintègre-t-il?

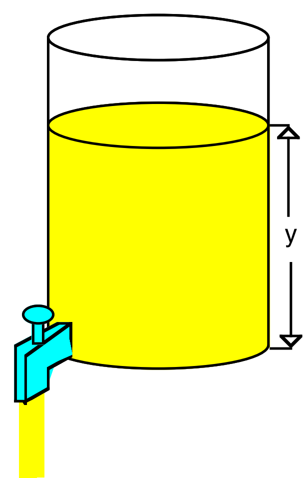
13. Le prix de revente d'une automobile baisse continuellement à un certain taux proportionnel à sa valeur en tout temps. Une voiture neuve achetée au prix de 20 000 $ est revendue 10 000 $ après 3 ans. Dans ces conditions,
    a) quel est le taux annuel de dévaluation ?
    b) quelle sera la valeur de l'auto dans 5 ans ?

si V désigne la valeur de la pièce de monnaie après t années et k est une constante alors

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{V}$$

14. La valeur d'une pièce de monnaie de collection croît à un taux proportionnel à la racine carrée de sa valeur en tout temps. Si cette pièce a été achetée 100 $ et 6 ans plus tard elle valait 900 $, combien vaudra-t-elle 12 ans après son achat ?

15. Si on ouvre le robinet au bas d'un réservoir cylindrique rempli d'eau, l'eau s'écoule rapidement au début puis, le débit diminue lorsque le niveau de l'eau baisse. Le taux de variation du niveau de l'eau est proportionnel à la racine carrée de la profondeur du liquide dans le réservoir. Supposons que le niveau d'eau initial est de 16 cm et que 4 minutes après avoir ouvert le robinet, le niveau d'eau passe à 9 cm, déterminer
    a) le niveau d'eau après 10 min,
    b) le temps que prendra le réservoir pour se vider.



16. L'intensité L(x) de la lumière x mètres sous la surface de l'océan satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dL}{dx} = kL$$

Un plongeur d'expérience sait que dans la mer des Caraïbes, la lumière du jour diminue de moitié à une profondeur de 18 mètres. Lorsque l'intensité de la lumière sous l'eau est moins de 10 % de celle à la surface de l'eau, un éclairage artificiel est nécessaire. Jusqu'à quelle profondeur un plongeur peut-il travailler sans avoir à utiliser un éclairage d'appoint ?

si V désigne le volume du cube après t minutes, x désigne la longueur d'une arête du cube après t minutes et k représente une constante alors

$$\frac{dV}{dt} = k(6x^2)$$

17. Un cube de glace de 27 cm^3 fond à un rythme proportionnel à la surface extérieure du cube. Si après 5 minutes le volume du cube est de 8 cm^3 trouver
   a) le volume du cube de glace après 7 minutes,
   b) le temps que prend le cube pour fondre.

attention! à la première dose, la concentration du médicament dans le système sanguin du patient est nulle mais à la seconde dose, la concentration du médicament dans le système sanguin du patient est de 3 μg cm^3

18. La concentration d'un médicament anti-inflammatoire non stéroïdal (comme l'aspirine) dans le système sanguin d'un individu décroît proportionnellement avec la concentration du médicament en tout temps. Un patient reçoit une dose de 8 μg cm^3 de ce médicament et une heure plus tard, une prise de sang indique que la concentration du médicament est passée à 5,80 μg cm^3.
   a) Quelle est la demi-vie de ce médicament dans le sang ?
   b) Si la concentration minimale du médicament dans le sang du patient est de 3 μg cm^3, dans combien de temps devra-t-on lui donner une deuxième dose de 8 μg cm^3 ? une troisième dose ?

d'après la loi du refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement d'un corps placé dans l'air est proportionnelle à la différence entre la température T du corps et la température T_0 de l'air ambiant.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

19. Dans une pièce où la température est constante et de 20°C, on note à un moment donné que la température d'un liquide est de 70°C. Cinq minutes plus tard, la température s'est abaissée à 60°C. En utilisant la loi de refroidissement de Newton, quelle sera la température du liquide une heure après la première observation ?

20. Un jus, dont la température est de 4°C, est retiré d'un réfrigérateur pour être laissé dans une pièce où l'air ambiant est à 21°C. Si au bout de 15 minutes le jus a atteint la température de 9°C, calculer la température du jus 30 minutes après sa sortie.

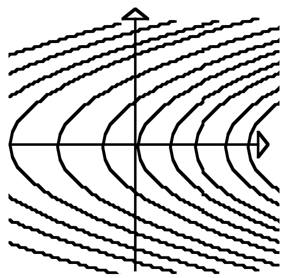
21. Lors d'une expérience sur l'apprentissage, on détermine que le taux de variation du nombre de symboles connus par un individu est proportionnel à la différence entre le nombre de symboles connus et le nombre de symboles à apprendre. On donne à un individu 1000 symboles à apprendre. Après 1 h, il en a mémorisé 30. Si au départ, l'individu connaissait déjà 10 symboles
   a) combien de symboles l'individu connaîtra-t-il en 5 h ?
   b) combien de temps lui faudra-t-il pour en apprendre 100 ?

Réponses 2.4 a)

1. a) $\dfrac{y^3}{3} = \dfrac{x^2}{2} + 1$ c) $y = \dfrac{4}{4 - t^4}$

   b) $\ln|y| = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - 18$ d) $u = e^{v - v^2}$

2. $y^2 = \dfrac{2(x^2 + 1)}{x}$

3. 

   $y = \pm\sqrt{x + C}$

4. a) $y = \text{tg}(x - x^2)$ b) $y = 3 - \dfrac{1}{\ln|x| + 1}$

5. 24 950 bactéries

6. 25,32 grammes

7. 243 000 \$

8. 2225,54 \$

9. 4500 \$

10. 18,5 années

11. 54 152 années

12. 936 ans

13. a) 23,1 % b) 6300 \$

14. 2500 \$

15. a) 2,25 cm b) 16 minutes

16. 59,8 m

17. a) 4,1 cm^3 b) 15 minutes

18. a) 2,16 heures b) 3,05 heures ; 4,04 heures

19. 23.4°C

20. 12,5°C

21. a) 106 symboles b) 4,67 h

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre

Nous avons vu comment résoudre certaines équations différentielles simples. Poursuivons maintenant notre étude en considérant un autre type d'équations différentielles.

Pour résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

il n'est pas possible de séparer les variables comme on l'a fait précédemment. On remarque par ailleurs, que si on multiplie chaque membre de l'équation par e^x, celle-ci devient

$$\underbrace{\frac{dy}{dx}\,e^x + y\,e^x}_{\frac{d}{dx}(e^x y)} = \underbrace{e^{-x}\,e^x}_{1}$$

De cette simple opération, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^x y) &= 1 \\ \Rightarrow \qquad d(e^x y) &= 1\,dx \\ \int d(e^x y) &= \int 1\,dx \\ e^x y &= x + C \\ y &= xe^{-x} + Ce^{-x} \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que $y = xe^{-x} + Ce^{-x}$ est bien solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ puisque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(xe^{-x} + Ce^{-x}) + (xe^{-x} + Ce^{-x}) &= e^{-x} - xe^{-x} - Ce^{-x} + xe^{-x} + Ce^{-x} \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

Appliquons maintenant cette technique de solution à une classe importante d'équations différentielles, *les équations différentielles linéaires du premier ordre*.

définition 2.4.2

équation différentielle linéaire du premier ordre

Toute équation différentielle pouvant être écrite sous la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

où P et Q sont des fonctions continues est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

2.4 .2 *Équations différentielles linéaires du premier ordre*

On rencontre assez fréquemment ce type d'équations différentielles en sciences. Généralement pour les résoudre on multiplie chaque membre de l'égalité par une fonction I(x) appelée *facteur intégrant*, de façon à ce que le membre de gauche ainsi transformé prenne la forme (I(x)y)'. Pour résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

il nous faut chercher une fonction I(x) telle que

$$\underbrace{\left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) I(x)}_{\frac{d}{dx}(I(x)y)} = Q(x)\, I(x) \qquad (*)$$

donc $\quad \frac{d}{dx}(I(x)y) = Q(x)\, I(x) \quad \Rightarrow \quad I(x)y = \int Q(x)\, I(x)\, dx$

et par conséquent, $\quad y = \frac{1}{I(x)} \int Q(x)\, I(x)\, dx$

Mais comment trouve-t-on le facteur intégrant I(x) ? Pour répondre à la question, reprenons le membre de gauche de l'équation (*) qui devra être égal à (I(x)y)'.

$$\frac{d}{dx}(I(x)y) = \left(\frac{dy}{dx} + P(x)y\right) I(x)$$

$$\Rightarrow \qquad y\,\frac{d}{dx} I(x) + \cancel{I(x)\frac{dy}{dx}} = \cancel{I(x)\frac{dy}{dx}} + I(x)\,P(x)\,y$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dx} I(x) = I(x)P(x)$$

Cette équation en est une à variables séparables.

$$\frac{1}{I(x)}\, dI(x) = P(x)\, dx$$

donc $\quad \int \frac{1}{I(x)}\, dI(x) = \int P(x)\, dx$

$$\ln|I(x)| = \int P(x)\, dx$$

facteur intégrant

Puisque nous cherchons un facteur intégrant en particulier (pas nécessairement le plus général) posons I(x) > 0; on obtient

$$\ln(I(x)) = \int P(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad I(x) = e^{\int P(x)\, dx}$$

> Pour résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre
>
> $$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$$
>
> on multiplie chaque membre de l'équation par le facteur intégrant
>
> $$I(x) = e^{\int P(x)\, dx}$$

exemple 2.4.6

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$$

Vérifier ensuite votre solution.

L'équation a la forme $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$

avec $P(x) = 3x^2$

et $Q(x) = 6x^2$.

Un facteur intégrant de l'équation aura donc la forme

$$\begin{aligned} I(x) &= e^{\int P(x)\,dx} \\ &= e^{\int 3x^2\,dx} \\ &= e^{x^3} \end{aligned}$$

En multipliant chaque membre de l'équation différentielle par le facteur intégrant I(x) on obtient

$$\underbrace{e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2 e^{x^3} y}_{\frac{d}{dx}(e^{x^3}y)} = 6x^2 e^{x^3}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^{x^3}y) &= 6x^2 e^{x^3} \\ d(e^{x^3}y) &= 6x^2 e^{x^3}\,dx \\ e^{x^3}y &= \int 6x^2 e^{x^3}\,dx \\ e^{x^3}y &= 2e^{x^3} + C \end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $y = 2 + Ce^{x^3}$

vérification de la solution obtenue.

$y = 2 + Ce^{x^3}$ est bien solution de $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$ puisque,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 3x^2y &= \frac{d}{dx}(2 + Ce^{-x^3}) + 3x^2(2 + Ce^{-x^3}) \\ &= Ce^{-x^3}(-3x^2) + 6x^2 + 3x^2Ce^{-x^3} \\ &= 6x^2 \end{aligned}$$

exemple 2.4.7

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + 6xy = 8x$$

Vérifier ensuite votre solution.

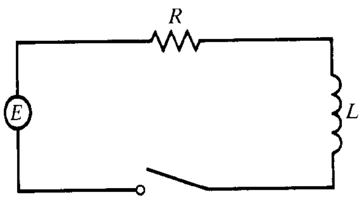
rép: $y = \frac{4}{3} + Ce^{-3x^2}$

exemple 2.4.8

Résoudre l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$ si $y(1) = 2$.

rép: $y = \frac{\ln|x| + 2}{x}$

application aux circuits électriques



Selon une loi de Kirchhoff pour un circuit électrique simple comme celui de la figure de gauche, on a

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

où E(t) représente une force électromotrice en volts (V) (normalement produite par une batterie ou un générateur), I est un courant en ampères (A) au temps t, R est une résistance en ohms (Ω) et L est une inductance en henry (H). La solution de l'équation différentielle donne le courant I au temps t.

exemple 2.4.8

Supposons que dans le circuit de la figure de gauche, la résistance R est de 12 Ω et l'inductance L est de 4 H. Si une batterie produit un voltage E(t) constant de 60 V et que le commutateur est fermé lorsque t = 0 s de façon que I(0) = 0. Trouver

a) I(t)
b) le courant après 1 s,
c) la valeur limite du courant.

---

rép: a) $I(t) = 5(1 - e^{-3t})$; b) 4,75 A ; c) 5 A

Exercices 2.4 b)

1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

   a) $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-x}$

   b) $\frac{dy}{dx} - y = (3x^2 + 4x - 3)\,e^x$

   c) $y' - 2xy = x$

   d) $(\cos x)y + y' - \cos x = 0$

   e) $x\frac{dy}{dx} + 2y = e^{x^2}$

   f) $y' \cos x = y \sin x + \sin 2x$

   g) $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{2x - 3} = \frac{x}{\sqrt{2x - 3}}$

   h) $\frac{dy}{dx} + (\text{ctg } 2x)\, y + 2\sqrt{\sin 2x} = 0$

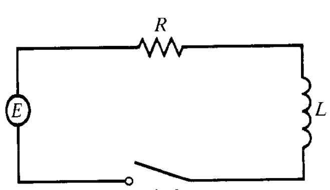
2. Résoudre les équations différentielles vérifiant les conditions données.

   a) $\frac{dy}{dx} - 2xy = 2x\, e^{x^2}$, ; $y(0) = 3$

   b) $x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2$; $y(1) = 0$

   c) $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 3\sqrt{x}$; $y(0) = 2$

   d) $x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x$; $y(\pi) = 0$



3. Supposons que dans le circuit de la figure de gauche la résistance R est de 10 Ω et l'inductance L est de 1 H. Si une batterie produit un voltage E(t) constant de 40 V et que le commutateur est fermé lorsque t = 0 s de façon que I(0) = 0. Sachant que

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

   a) trouver I(t),
   b) déterminer la valeur du courant après 0,1 s,
   c) trouver la valeur limite du courant.

la constante k dépend de la résistance de l'air

4. La vitesse d'un objet en chute libre dépend non seulement de la force gravitationnelle mais aussi de la résistance de l'air. Sachant que la vitesse de l'objet au temps t satisfait l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + kv = 10$$

   où $k > 0$ et $v(0) = 0$. Montrer que la vitesse de l'objet ne peut dépasser $10/k$.

Réponses 2.4 b)

1. a) $y = Ce^{-3x} + \frac{e^{-x}}{2}$

   b) $y = e^{x}(x^3 + 2x^2 - 3x + C)$

   c) $y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$

   d) $y = 1 + Ce^{-\sin x}$

   e) $y = \dfrac{e^{x^2} + C}{2x^2}$

   f) $y = \dfrac{\sin^2 x + C}{\cos x}$

   g) $y = \dfrac{4x^3 - 9x^2 + C}{6\sqrt{(2x-3)^3}}$

   h) $y = \dfrac{\cos 2x + C}{\sqrt{\sin 2x}}$

2. a) $y = (x^2 + 3)\, e^{x^2}$

   b) $y = x^3 - x^2$

   c) $y = \dfrac{2(x\sqrt{x} + 1)}{1 + x^2}$

   d) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

3. a) $I(t) = 4 - 4e^{-10t}$

   b) 2,53 A

   c) 4 A

4.

2.5 Méthode de complétion du carré

Dans certains cas, on devra utiliser la *méthode de complétion du carré* pour ramener un problème à celui du modèle 15 ou à celui du modèle 16.

Le binôme $x^2 + bx$ devient un carré parfait si on lui ajoute $\frac{b^2}{4}$
En effet

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

exemple 2.5.1 Compléter le carré dans les expressions suivantes:

a) $x^2 + 10x$
b) $x^2 - 4x + 5$
c) $2 + x - x^2$
d) $-3x^2 + 4x - 1$

---

a) Ici, $b = 10$ donc $\frac{b^2}{4} = \frac{100}{4} = 25.$

On a donc $x^2 + 10x = x^2 + 10x + \mathbf{25} - \mathbf{25}$
$= (x + 5)^2 - 25$

d) $-3x^2 + 4x - 1 = -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right)$

En considérant les deux premiers termes du binôme dans la parenthèse, on a $b = -\frac{4}{3}$ donc $\frac{b^2}{4} = \frac{4}{9}$.
On aura

$$\begin{aligned}
-3x^2 + 4x - 1 &= -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}\right)\\
&= -3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \mathbf{\frac{4}{9}} - \mathbf{\frac{4}{9}} + \frac{1}{3}\right)\\
&= -3\left(\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - \frac{1}{9}\right)\\
&= -3\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right)\\
&= -3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

rép: b) $(x - 2)^2 + 1$; c) $9/4 - (x - 1/2)^2$

exemple 2.5.2

Effectuer $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$

Complétons d'abord le carré de $x^2 + 4x + 13$.

On a $\quad b = 4 \quad$ donc $\dfrac{b^2}{4} = \dfrac{16}{4} = 4.$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 13 &= x^2 + 4x + \mathbf{4} - \mathbf{4} + 13 \\ &= (x^2 + 4x + 4) + 9 \\ &= (x + 2)^2 + 9 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 3^2}$$

Posons maintenant $\quad u = x + 2 \quad \Rightarrow \quad du = dx$

d'où
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 3^2} &= \int \frac{du}{u^2 + 3^2} \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{u}{3} + C \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{3} + C \end{aligned}$$

exemple 2.5.3

Effectuer $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 8x - 4x^2}}$

rép: $\frac{1}{2}$ arcsin$\left(\frac{2(x - 1)}{\sqrt{7}}\right)$ + C

exemple 2.5.4

Effectuer $\int \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 8}\, dx$

À cause du facteur $(x + 1)$ qui apparaît au numérateur, la complétion du carré de $(x^2 - 4x + 8)$ ne permettra pas de ramener le problème à celui du modèle: $\int \frac{du}{a^2 + u^2}$.

Mais, puisque $u = x^2 - 4x + 8 \quad \Rightarrow \quad du = (2x - 4)\, dx$,

tentons plutôt de le ramener à celui du modèle: $\int \frac{du}{u}$.

On obtient par transformation algébrique:

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2-4x+8} &= \frac{\mathbf{2}x+\mathbf{2}}{\mathbf{2}(x^2-4x+8)} \\
&= \frac{2x-\mathbf{4}+\mathbf{4}+2}{2(x^2-4x+8)} \\
&= \frac{(2x-4)+6}{2(x^2-4x+8)} \\
&= \frac{2x-4}{2(x^2-4x+8)} + \frac{6}{2(x^2-4x+8)} \\
&= \frac{2x-4}{2(x^2-4x+8)} + \frac{3}{x^2-4x+8}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\,dx &= \int \left(\frac{2x-4}{2(x^2-4x+8)} + \frac{3}{x^2-4x+8}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx
\end{aligned}$$

Posons pour la 1re intégrale, $\quad u = x^2 - 4x + 8$
$\quad du = (2x-4)\,dx,$

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + 3\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

Complétons ensuite le carré de $x^2 - 4x + 8$ dans la 2e intégrale.

$$\begin{aligned}
x^2-4x+8 &= x^2-4x+\mathbf{4}-\mathbf{4}+8 \\
&= (x^2-4x+4)+4 \\
&= (x-2)^2+4
\end{aligned}$$

et

puisque

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\ \mathrm{arctg}\,\frac{u}{a} + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\,dx &= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + 3\int \frac{1}{(x-2)^2+2^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

exemple 2.5.5

Effectuer $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{1 + 4x - 2x^2}}\, dx$

---

rép: $-\frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x - 2x^2} + \sqrt{2}\ \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}(x - 1)}{3}\right) + C$

Exercices 2.5

Effectuer

1. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

3. $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 10}$

4. $\int \frac{3\,dx}{(x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$

5. $\int \frac{2x}{\sqrt{-x^2 + 8x - 7}}\,dx$

6. $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 6x + 13}\,dx$

7. $\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 5}\,dx$

8. $\int \frac{5 - 4x}{\sqrt{12x - 4x^2 - 8}}\,dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4 - x)}}$

10. $\int \frac{x - 1}{3x^2 - 4x + 3}\,dx$

11. $\int \frac{x^4 + 1}{x^2 + x + 1}\,dx$

12. $\int \frac{2x + 3}{9x^2 - 12x + 8}\,dx$

13. $\int \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 4}\,dx$

14. $\int \frac{2x^2 - 9x^5}{\sqrt{8 + 6x^3 - 9x^6}}\,dx$

Réponses 2.5

1. $\frac{1}{5}\ \text{arctg}\left(\frac{x+2}{5}\right) + C$
2. $\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$
3. $\frac{1}{6}\ \text{arctg}\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$
4. $3\ \text{arcsec}(x+2) + C$
5. $-2\sqrt{-x^2+8x-7} + 8\arcsin\left(\frac{x-4}{3}\right) + C$
6. $\ln|x^2+6x+13| - \frac{9}{2}\ \text{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C$
7. $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \text{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$
8. $\sqrt{12x-4x^2-8} - \frac{1}{2}\arcsin(2x-3) + C$
9. $\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$ ou $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + C$
10. $\frac{1}{6}\ln|3x^2-4x+3| - \frac{1}{3\sqrt{5}}\ \text{arctg}\left(\frac{3x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$
11. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$
12. $\frac{1}{9}\ln|9x^2-12x+8| + \frac{13}{18}\ \text{arctg}\left(\frac{3x-2}{2}\right) + C$
13. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \text{arctg}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}}\right) + C$
14. $\frac{1}{3}\sqrt{8+6x^3-9x^6} - \frac{1}{9}\arcsin\left(\frac{3x^3-1}{3}\right) + C$

2.6 Intégration par parties.

La méthode *d'intégration par parties* est l'une des méthodes les plus utilisées après celle du changement de variable. Elle permet entre autres de résoudre des problèmes tels:

$\int \ln x \ dx$, $\int \arctg x \ dx$, $\int x^2 \sin 3x \ dx$, $\int xe^x \ dx$, $\int \sec^3 x$ ...

... Cette technique est basée sur une propriété de la différentielle.

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

par conséquent,
$$\int d(uv) = \int (u\,dv + v\,du)$$

et
$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

donc
$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

exemple 2.6.1

Effectuer $\int x\,e^x\,dx$

Le problème ne se ramène à aucun modèle de base.

Sachant que
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \ .$$

Posons $\quad u = x \quad ; \quad dv = e^x\,dx,$

on aura $\quad du = dx \quad ; \quad v = \int e^x\,dx = e^x$

$$\Rightarrow \quad \int x\,e^x\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= x\,e^x - \int e^x\,dx$$

$$= x\,e^x - e^x + C$$

Remarque 1 Il est inutile d'ajouter la constante d'intégration lorsque pour trouver la fonction v, on effectue $\int$ dv. Voyons ce que devient l'exemple 2.6.1 lorsque l'on tient compte de cette constante d'intégration.

Pour $\quad u = x \quad ; \quad dv = e^x\, dx,$

on aura $\quad du = dx \quad ; \quad v = \int e^x\, dx = e^x + \mathbf{C}$

$$\Rightarrow \quad \int x\, e^x\, dx = uv - \int v\, du$$

$$= x\,(e^x + \mathbf{C}) - \int (e^x + \mathbf{C})\, d\,x$$

$$= x\, e^x + x\,\mathbf{C} - \int e^x\, dx - \int \mathbf{C}\, dx$$

$$= x\, e^x + x\,\mathbf{C} - \int e^x\, dx - x\,\mathbf{C}$$

$$= x\, e^x - \int e^x\, dx$$

Avec ou sans la constante, on obtient le même résultat.

Remarque 2 Il existe d'autres façons de transformer le problème de l'exemple 2.6.1. Une autre façon serait de poser

$$u = e^x \quad ; \quad dv = x\, dx,$$

$$\Rightarrow \quad du = e^x\, dx \quad ; \quad v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$$

on aurait $\quad \int x\, e^x\, dx = uv - \int v\, du$

$$= e^x\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right) e^x\, dx$$

$\int \left(\frac{x^2}{2}\right) e^x\, dx$ n'est pas plus facile à résoudre que $\int x\, e^x\, dx$

Cette transformation est donc inefficace.

Pour que la technique d'intégration par parties soit efficace,

$\int dv$ et $\int v\,du$ devront être plus faciles à résoudre que $\int u\,dv$

exemple 2.6.2

Effectuer $\int \text{arctg } x \; dx$

rép: $x \text{ arctg } x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

exemple 2.6.3

Effectuer $\int \ln(x^2+2)\; dx$

rép: $x \ln(x^2+2) - 2x + \frac{4}{\sqrt{2}} \text{ arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

L'intégration par parties peut être répétitive.

exemple 2.6.4

Effectuer $\int x^2 e^{3x}\ dx$

rép: $\frac{1}{3} x^2e^{3x} - \frac{2}{9} xe^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C$

L'intégration par parties peut être cyclique.

exemple 2.6.5

Effectuer $\int e^x \sin x\ dx$

rép : $-\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C$

exemple 2.6.6

Effectuer $\int (\sin 2x)(\cos 3x)\ dx$

rép : $\frac{3}{5}(\sin 2x)(\sin 3x) + \frac{2}{5}(\cos 2x)(\cos 3x) + C$

exemple 2.6.7

Effectuer $\int \sec^3 x \; dx$

rép : $\frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$

Exercices 2.6

Effectuer

1. $\int x^4 \ln x \; dx$
2. $\int \arccos 2x \; dx$
3. $\int x^3 e^{x^2} \; dx$
4. $\int x\sqrt{x+1} \; dx$
5. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} \; dx$
6. $\int x \operatorname{arctg} x \; dx$
7. $\int x^2 \cos x \; dx$
8. $\int \ln^2 x \; dx$
9. $\int \sin(\ln x) \; dx$
10. $\int \sin x \sin 3x \; dx$
11. $\int x \arcsin x^2 \; dx$
12. $\int x(3x+7)^6 \; dx$
13. $\int e^{2x} \cos 3x \; dx$
14. $\int \dfrac{\ln(\ln x)}{x} \; dx$
15. $\int e^{2x} \cos(e^x) \; dx$
16. $\int \dfrac{x \cos x}{\sin^2 x} \; dx$
17. $\int x^3 e^{2x} \; dx$
18. $\int \dfrac{xe^x}{(1+x)^2} \; dx$
19. $\int \sec x \operatorname{tg}^2 x \; dx$
20. $\int e^{ax} \cos bx \; dx$

21. Le taux de croissance d'une population P dans t mois est donné par l'équation différentielle
$$\frac{dP}{dt} = t\, e^{t/15}$$
Si présentement la population est de 20 000 habitants,
a) que sera la population dans 2 ans ?
b) de combien d'habitants la population augmentera-t-elle entre la 3^e et la 5^e année ?

Résoudre les équations différentielles suivantes

22. $y \operatorname{cotg} x \dfrac{dy}{dx} - \sec y = 0$

23. $\dfrac{\ln y}{\ln x} \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{x^4}{y^2} = 0$

24. $\dfrac{dy}{dx} + 4y = x$

25. $\dfrac{dy}{dx} - x = e^x - y \quad ; \quad y(0) = 0$

Réponses 2.6

1. $\dfrac{x^5 \ln x}{5} - \dfrac{x^5}{25} + C$

2. $x \arccos 2x - \dfrac{\sqrt{1 - 4x^2}}{2} + C$

3. $\dfrac{x^2 e^{x^2}}{2} - \dfrac{e^{x^2}}{2} + C$

4. $\dfrac{2x\sqrt{(x + 1)^3}}{3} - \dfrac{4\sqrt{(x + 1)^5}}{15} + C$

5. $x^2\sqrt{1 + x^2} - \dfrac{2\sqrt{(1 + x^2)^3}}{3} + C$ ou $\dfrac{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}{3} - \sqrt{x^2 + 1}$

6. $\dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} + \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2} - \dfrac{x}{2} + C$

7. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$

8. $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$

9. $\dfrac{x \sin(\ln x)}{2} - \dfrac{x \cos(\ln x)}{2} + C$

10. $\dfrac{\sin 3x \cos x}{8} - \dfrac{3 \sin x \cos 3x}{8} + C$ ou $\dfrac{\sin 2x}{4} - \dfrac{\sin 4x}{8} + C$

11. $\dfrac{x^2 \arcsin(x^2)}{2} + \dfrac{\sqrt{1 - x^4}}{2} + C$

12. $\dfrac{x(3x + 7)^7}{21} - \dfrac{(3x + 7)^8}{504} + C$

13. $\dfrac{3 e^{2x} \sin 3x}{13} + \dfrac{2 e^{2x} \cos 3x}{13} + C$

14. $(\ln x) \ln(\ln x) - \ln x + C$

15. $e^x \sin(e^x) + \cos(e^x) + C$

16. $-x \text{ cosec } x + \ln|\text{cosec } x - \text{cotg } x| + C$

17. $\dfrac{x^3 e^{2x}}{2} - \dfrac{3x^2 e^{2x}}{4} + \dfrac{3x e^{2x}}{4} - \dfrac{3 e^{2x}}{8} + C$

18. $e^x - \dfrac{x e^x}{1 + x} + C$

19. $\dfrac{\sec x \text{ tg } x}{2} - \dfrac{\ln|\sec x + \text{tg } x|}{2} + C$

20. $\dfrac{b e^{ax} \sin bx + a e^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2} + C$

21. a) 20 893 habitants b) 33 381 habitants

22. $y \sin y + \cos y + \ln|\cos x| = C$

23. $\dfrac{1}{3} y^3 \ln y - \dfrac{1}{9} y^3 - \dfrac{1}{5} x^5 \ln x + \dfrac{1}{25} x^5 = C$

24. $y = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{16} + Ce^{-4x}$

25. $y = x - 1 + \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{1}{2e^x}$

2.7 Intégration de certaines classes de fonctions trigonométriques.

Nous allons maintenant considérer l'intégrale de quelques classes de fonctions trigonométriques qui se présentent fréquemment.

1er cas

a) $\int (\sin^{IMPAIR} u)(\cos^{N} u)\ du$ *b)* $\int (\sin^{N} u)(\cos^{IMPAIR} u)\ du$

L'exposant N représente un réel quelconque et l'exposant IMPAIR représente un entier positif impair.

a) On transforme d'abord $\sin^{\text{IMPAIR}} u$ en $(\sin^{\text{PAIR}} u)(\sin u)$.

En utilisant l'identité $\mathbf{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$, on exprime ensuite $\sin^{\text{PAIR}} u$ en fonction de cos u .

(la démarche est semblable pour le second cas)

exemple 2.7.1

Effectuer $\int \sin^3 x \cos^2 x\ dx$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\ dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x\ dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x\ dx$$

$$= \int (\cos^2 x \sin x - \cos^4 x \sin x)\ dx$$

$$= \int \cos^2 x \sin x\ dx - \int \cos^4 x \sin x\ dx$$

Si $u = \cos x$ alors $du = -\sin x\ dx$.

$$= -\int u^2\ du + \int u^4\ du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$

$$= -\frac{\cos^3 u}{3} + \frac{\cos^5 u}{5} + C$$

exemple 2.7.2

Effectuer $\int \cos^5 x \; dx$

rép: $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

exemple 2.7.3

Effectuer $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx$

rép: $-\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$

$\boxed{\textbf{2}^{\textbf{e}}\textbf{ cas}}$

$$\int (\sin^{PAIR}u)(\cos^{PAIR}u)\ du \quad ; \quad \int \sin^{PAIR}u\ du \quad ; \quad \int \cos^{PAIR}u\ du$$

L'exposant PAIR représente un entier positif pair.

Par des transformations successives, on diminue les exposants pairs jusqu'à ce que le problème devienne facilement intégrable. Pour cela on utilise les identités suivantes:

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad ; \quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad ; \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

exemple 2.7.4

Effectuer $\int \sin^2x \cos^2x\ dx$

$$\int \sin^2x\cos^2x\ dx = \int (\sin x \cos x)^2\ dx$$

$\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$

$$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\ dx$$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\Rightarrow \quad \sin^2 2x = \dfrac{1 - \cos 4x}{2}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1 - \cos 4x}{2}\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1\ dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\ dx$$

Si $u = 4x$ alors $du = 4\ dx$.

$$= \frac{1}{8}\int 1\ dx - \frac{1}{32}\int \cos u\ du$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

exemple 2.7.5

Effectuer $\int \cos^4 3x \; dx$

rép: $\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$

exemple 2.7.6

Effectuer $\int \sin^4 x \cos^2 x \; dx$

rép: $\frac{1}{16}\,x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$

3e cas

a) $\displaystyle\int (tg^N u)(sec^{PAIR} u)\ du$ **b)** $\displaystyle\int (cotg^N u)(cosec^{PAIR} u)\ du$

L'exposant N représente un réel quelconque et l'exposant PAIR représente un entier positif pair.

a) On transforme d'abord $sec^{PAIR}u$ en $(sec^{PAIR-2}u)(sec^2 u)$.

En utilisant l'identité $\mathbf{tg^2\theta + 1 = sec^2\theta}$, on exprime ensuite $sec^{PAIR-2}u$ en fonction de tg u .

(La démarche est semblable pour le second cas.
L'identité $\mathbf{cotg^2\theta + 1 = cosec^2\theta}$ sera alors utilisée.)

exemple 2.7.7 Effectuer $\displaystyle\int tg^{3/2} x\ sec^4 x\ dx$

$$\int tg^{3/2} x\ sec^4 x\ dx = \int tg^{3/2} x\ sec^2 x\ sec^2 x\ dx$$

$$= \int tg^{3/2} x\ (1 + tg^2 x)\ sec^2 x\ dx$$

$$= \int (tg^{3/2} x\ sec^2 x + tg^{7/2} x\ sec^2 x)\ dx$$

$$= \int tg^{3/2} x\ sec^2 x\ dx + \int tg^{7/2} x\ sec^2 x\ dx$$

Si $u = tg\ x$ alors $du = sec^2 dx$.

$$= \int u^{3/2}\ du + \int u^{7/2}\ du$$

$$= \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{9/2}}{\frac{9}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}\ tg^{5/2}x + \frac{2}{9}\ tg^{9/2}x + C$$

exemple 2.7.8

Effectuer $\displaystyle\int \frac{\sec^4 x}{\text{tg}^6 x}\,dx$

rép: $-\dfrac{1}{5\text{tg}^5 x} - \dfrac{1}{3\text{tg}^3 x} + C$

exemple 2.7.9

Effectuer $\displaystyle\int \text{tg}^6 x\,dx$

on résout:

a) $\displaystyle\int \text{tg}^N u\,du$

et

b) $\displaystyle\int \text{cotg}^N u\,du$

en utilisant la méthode du 3^e cas

rép: $\dfrac{\text{tg}^5 x}{5} - \dfrac{\text{tg}^3 x}{3} + \text{tg}\,x - x + C$

4^e cas

a) $\displaystyle\int (tg^{IMPAIR}u)(sec^{N}u)\ du$

b) $\displaystyle\int (cotg^{IMPAIR}u)(cosec^{N}u)\ du$

L'exposant IMPAIR représente un entier positif impair et l'exposant N représente un réel quelconque.

a) On transforme d'abord $(tg^{IMPAIR}u)(sec^{N}u)$ en

$$(tg^{IMPAIR-1}u)(\ sec^{N-1}u)(sec\ u\ tg\ u)$$

En utilisant l'identité $\mathbf{tg^2\theta + 1 = sec^2\theta}$, on exprime ensuite $tg^{IMPAIR-1}u$ en fonction de sec u .

(La démarche est semblable pour le second cas.
L'identité $\mathbf{cotg^2\theta + 1 = cosec^2\theta}$ sera alors utilisée.)

exemple 2.7.10

Effectuer $\displaystyle\int tg^3 x\ sec^3 x\ dx$

$$\int tg^3 x\ sec^3 x\ dx = \int tg^2 x\ sec^2 x\ sec\ x\ tg\ x\ dx$$

$$= \int (sec^2 x - 1)\ sec^2 x\ sec\ x\ tg\ x\ dx$$

$$= \int (sec^4 x\ sec\ x\ tg\ x - sec^2 x\ sec\ x\ tg\ x)\ dx$$

Si $u = sec\ x$ alors $du = sec\ x\ tg\ x\ dx$.

$$= \int u^4\ du - \int u^2\ du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{sec^5 x}{5} - \frac{sec^3 x}{3} + C$$

exemple 2.7.11

Effectuer $\int \cot g^5 x \, \mathrm{cosec}^3 x \; dx$

rép: $- \dfrac{\mathrm{cosec}^7 x}{7} + \dfrac{2\mathrm{cosec}^5 x}{5} - \dfrac{\mathrm{cosec}^3 x}{3} + C$

5^e^ cas

a) $\int (tg^{PAIR}u)(sec^{IMPAIR}u) \; du$

b) $\int (cotg^{PAIR}u)(cosec^{IMPAIR}u) \; du$

L'exposant PAIR représente un entier positif pair ou nul et l'exposant IMPAIR représente un entier positif impair.

On intègre par parties dans les deux cas.

exemple 2.7.12

Effectuer $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx$

---

rép: $\dfrac{\sec x \operatorname{tg} x}{2} - \dfrac{\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|}{2} + C$

autres cas

Aucune méthode particulière.

exemple 2.7.13

Effectuer $\int \dfrac{\sec^5 x}{\operatorname{cosec} x} dx$

---

*Lorsque l'expression n'est pas en SIN ou en COS il peut être utile de tout transformer en SIN et en COS puis selon le cas, utiliser le **1er cas** ou le **2e cas**.*

rép: $\dfrac{\sec^4 x}{4} + C$

exemple 2.7.14

Effectuer $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cos 3x}\, dx$

en multipliant et en divisant par le conjugué du terme au dénominateur, on pourra résoudre le problème

rép: $\displaystyle -\frac{\text{cotg } 3x}{3} + \frac{1}{3\sin 3x} + C$

Exercices 2.7

1. $\int \cos^3 x \, dx$
2. $\int \sin^5 x \, dx$
3. $\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$
4. $\int \cos^2 x \, dx$
5. $\int \sin^4 x \, dx$
6. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$
7. $\int \text{tg}^4 3x \sec^4 3x \, dx$
8. $\int \text{cosec}^6 x \, dx$
9. $\int \text{tg}^3 3x \sec 3x \, dx$
10. $\int \sec^7 3x \, \text{tg}\, 3x \, dx$
11. $\int \text{tg}^3 x \, dx$
12. $\int \text{cotg}^5 x \, dx$
13. $\int \dfrac{\text{cotg}^3 x}{\text{cosec}\, x} \, dx$
14. $\int \dfrac{\cos^2 x}{1 + \text{cotg}^2 x} \, dx$
15. $\int \dfrac{\sec x}{\text{tg}^2 x} \, dx$
16. $\int \dfrac{\cos^3 x}{1 - \sin x} \, dx$
17. $\int \text{tg}^4 x \, dx$
18. $\int \text{cotg}^3 2x \, \text{cosec}^3 2x \, dx$
19. $\int \dfrac{\text{cosec}\, 5x}{\sec^2 5x} \, dx$
20. $\int \dfrac{\cos^4 x}{\sin^6 x} \, dx$
21. $\int \dfrac{1}{\cos^4 x} \, dx$
22. $\int \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} \, dx$
23. $\int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, dx$
24. $\int \sin 2x \sec^6 x \, dx$

25. $\int \sin^2 2x \sin^2 4x \, dx$

26. $\int \frac{\sec x}{1 + \sec x} \, dx$

27. $\int \sec^8 x \, dx$

28. $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$

29. $\int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \, dx$

30. $\int (1 + \operatorname{tg} x)^2 \sec x \, dx$

31. $\int \sec x \operatorname{cosec} x \, dx$

32. $\int \cos^6 x \, dx$

33. $\int \frac{dx}{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$

34. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin x} \, dx$

Réponses 2.7

1. $\sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + C$

2. $-\cos x + \dfrac{2\cos^3 x}{3} - \dfrac{\cos^5 x}{5} + C$

3. $-\dfrac{\cos^5 x}{5} + \dfrac{\cos^7 x}{7} + C$

4. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$

5. $\dfrac{3x}{8} - \dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{\sin 4x}{32} + C$

6. $\dfrac{x}{16} - \dfrac{\sin 4x}{64} + \dfrac{\sin^3 2x}{48} + C$

7. $\dfrac{\text{tg}^7\, 3x}{21} + \dfrac{\text{tg}^5\, 3x}{15} + C$

8. $-\text{cotg}\, x - \dfrac{2\text{cotg}^3\, x}{3} - \dfrac{\text{cotg}^5\, x}{5} + C$

9. $\dfrac{\sec^3 3x}{9} - \dfrac{\sec 3x}{3} + C$

10. $\dfrac{\sec^7 3x}{21} + C$

11. $\dfrac{\text{tg}^2\, x}{2} - \ln|\sec x| + C$ ou $\dfrac{\sec^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C$

12. $-\dfrac{\text{cotg}^4\, x}{4} + \dfrac{\text{cotg}^2\, x}{2} + \ln|\sin x| + C$ ou $-\dfrac{\text{cosec}^4\, x}{4} + \text{cosec}^2\, x + \ln|\sin x| + C$

13. $-\text{cosec}\, x - \sin x + C$

14. $\dfrac{x}{8} - \dfrac{\sin 4x}{32} + C$

15. $-\text{cosec}\, x + C$

16. $\dfrac{(1 + \sin x)^2}{2} + C$ ou $\sin x + \dfrac{\sin^2 x}{2} + C$ ou $\sin x - \dfrac{\cos^2 x}{2} + C$

17. $\dfrac{tg^3 x}{3} - tg\, x + x + C$

18. $-\dfrac{cosec^5 2x}{10} + \dfrac{cosec^3 2x}{6} + C$

19. $\dfrac{1}{5} \ln|cosec\, 5x - cotg\, 5x| + \dfrac{1}{5} \cos 5x + C$

20. $-\dfrac{cotg^5 x}{5} + C$

21. $tg\, x + \dfrac{tg^3 x}{3} + C$

22. $\dfrac{3\cos^{5/3} x}{5} + 3\cos^{-1/3} x + C$

23. $\dfrac{tg^3 x}{3} + C$

24. $\dfrac{\sec^4 x}{2} + C$ ou $tg^2 x + \dfrac{tg^4 x}{2} + C$ ou $\dfrac{2}{(1 + \cos 2x)^2} + C$

25. $\dfrac{1}{4}\left(x - \dfrac{\sin 8x}{8} - \dfrac{\sin^3 4x}{6} \right) + C$

26. $- cotg\, x + cosec\, x + C$

27. $\dfrac{tg^7 x}{7} + \dfrac{3tg^5 x}{5} + tg^3 x + tg\, x + C$

28. $\dfrac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \dfrac{\sin 8x}{8} \right) + C$

29. $- 2cotg\, x - 2cosec\, x - x + C$

30. $\dfrac{\sec x\, tg\, x}{2} + \dfrac{\ln|\sec x + tg\, x|}{2} + 2\sec x + C$

31. $\ln|cosec\, 2x - cotg\, 2x| + C$ ou $\ln|\sec x| + \ln|\sin x| + C$

32. $\dfrac{1}{16}\left(5x + 4\sin 2x - \dfrac{\sin^3 2x}{3} + \dfrac{3\sin 4x}{4} \right) + C$

33. $\dfrac{\ln|1 - \cos 2x|}{2} + C$ ou $\ln|\sin x| + C$

34. $\ln|cosec\, x - cotg\, x| + \sec x + C$

2.8 Intégration des fonctions rationnelles par fractions partielles.

Ce ne sont pas toutes les *fonctions élémentaires* qui s'intègrent à l'aide de fonctions élémentaires. Les fonctions rationnelles forment une des classes de fonctions ayant pour propriété de pouvoir s'intégrer à l'aide de fonctions élémentaires. La technique d'intégration par *fractions partielles* permet d'intégrer <u>toute fonction rationnelle</u>.

Qu'entend on par fractions partielles?

on peut facilement vérifier l'égalité en exprimant le membre de droite à l'aide d'un dénominateur commun

Sachant que pour tout $x \neq \pm 1$

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

on dira que la fraction rationnelle

$$\frac{2}{x^2 - 1}$$

peut être décomposée en une somme de deux fractions partielles:

$$\frac{1}{x - 1} \quad \text{et} \quad \frac{-1}{x + 1} \quad .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{x^2 - 1}\, dx &= \int \frac{1}{x - 1}\, dx + \int \frac{-1}{x + 1}\, dx \\ &= \ln|x - 1| - \ln|x + 1| \end{aligned}$$

Comment obtient-on une décomposition en fractions partielles ?

Il existe une démarche purement algébrique (que l'on ne démontrera pas) qui repose sur un résultat d'algèbre et qui permet d'obtenir une décomposition en fractions partielles. La décomposition obtenue par cette méthode sera unique.

Avant de donner la technique de décomposition, définissons d'abord la notion de *fraction rationnelle propre*.

fraction rationnelle propre

Une *fraction rationnelle propre* est une expression rationnelle dont le degré du polynône au numérateur est inférieur au degré du polynôme au dénominateur. Dans le cas contraire l'expression est qualifiée *d'impropre*.

algorithme permettant d'obtenir une décomposition de la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fractions partielles?

1. Si la fraction rationnelle est impropre, on doit au préalable diviser P(x) par Q(x) puis ensuite appliquer la technique de décomposition sur l'expression correspondant au reste de cette division.

2. On décompose le dénominateur sous la forme d'un produit de facteurs linéaires (ax + b) à coefficients réels et/ou quadratiques irréductibles $(ax^2 + bx + c)$ à coefficients réels.

   (Un facteur quadratique est irréductible lorsque $b^2 - 4ac < 0$.)

3. Le nombre et la forme des fractions partielles dépend uniquement de la factorisation obtenue au dénominateur.

   a) à chaque *facteur linéaire* (ax + b) apparaissant n fois au dénominateur correspond une somme de n fractions partielles de la forme

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

   b) à chaque *facteur quadratique irréductible* $(ax^2 + bx + c)$ apparaissant n fois au dénominateur correspond une somme de n fractions partielles de la forme

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

4. On détermine la valeur des constantes $A_1, B_1, A_2, B_2 \; \dots \; A_n, B_n$.

fraction rationnelle impropre

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{2}{x^2 - 1}$$

fraction rationnelle propre

on obtient le membre de droite en divisant $x^3 - x + 1$ par $x^2 - 1$

exemple 2.8.1

Voici quelques exemples de fractions rationnelles propres transformées en fractions partielles en utilisant l'algorithme précédent..

on utilise les lettres A, B, C, ... plutôt que les lettres $A_1, A_2, A_3, \dots \; B_1, B_2, B_3 \dots$ pour simplifier la notation

on verra comment calculer la valeur des constantes A, B, C, ... à l'exemple 2.8.2

a) $$\frac{x+1}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}$$

b) $$\frac{x^2}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

c) $$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

d) $$\frac{x^3+2x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$$

e) $$\frac{x^4-1}{x^3(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+2}$$

d) $$\frac{2x-1}{(x-3)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

exemple 2.8.2

Effectuer $\displaystyle\int \frac{2}{x^2 - 1}\,dx$

$\frac{2}{x^2 - 1}$ est une fraction rationnelle propre

On a $\dfrac{2}{x^2 - 1} = \dfrac{2}{(x - 1)(x + 1)}$.

Par conséquent,

on recompose le membre de droite de l'équation précédente

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

$$= \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

On conclut que pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\boxed{\mathbf{2 = A(x + 1) + B(x - 1)}} \quad \mathbf{(1)}$$

En regroupant les puissances de x on obtient

$$\boxed{\mathbf{0x + 2 = (A + B)x + (A - B)}} \quad \mathbf{(2)}\ .$$

On détermine ensuite la valeur des constantes en utilisant une des méthodes suivantes.

a) méthode générale

deux polynômes entiers en x sont égaux si les coefficients des mêmes puissances de x sont égaux

On égale les coefficients des mêmes puissances de x dans l'équation (2) .

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 2 \end{cases}$$

Puis on résout le système d'équations. On obtient $A = 1$ et $B = -1$

On peut aussi obtenir la valeur des constantes en utilisant l'équation (1).

b) méthode simplifiée

cette méthode est efficace lorsque les facteurs apparaissant dans la factorisation complète sont des <u>facteurs linéaires distincts</u>; on donne alors à x les valeurs qui annulent les facteurs linéaires

Sachant que $2 = A(x + 1) + B(x - 1)$ pour tout x.

Si $x = 1$, on a
$$\begin{aligned} 2 &= A(1 + 1) + B(1 - 1) \\ 2 &= 2A \\ A &= 1. \end{aligned}$$

Si $x = -1$, on a
$$\begin{aligned} 2 &= A(-1 + 1) + B(-1 - 1) \\ 2 &= -2B \\ B &= -1. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2}{x^2 - 1}\,dx = \int \frac{1}{x - 1}\,dx + \int \frac{-1}{x + 1}\,dx$$

$$= \ln|x - 1| - \ln|x + 1| + C = \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C$$

exemple 2.8.3

Effectuer $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - x - 6}\, dx$

rép: $x + \ln\left|(x - 3)^2(x + 2)\right| + C$

exemple 2.8.4 Effectuer $\displaystyle\int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx$

rép: $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| - \frac{4}{x - 1} + C$

exemple 2.8.5

Effectuer $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 4x - 1}{x^4 + 3x^2 + 2}\, dx$

rép: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ arctg $\frac{x}{\sqrt{2}}$ + $\ln(x^2 + 1)$ - arctg x + C

exemple 2.8.6

Effectuer $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 2}{x(x - 2)(x^2 + 1)}\,dx$

$\dfrac{2x^3 - 6x^2 - 2}{x(x - 2)(x^2 + 1)}$ est une fraction rationnelle propre

L'intégrande se décompose en trois fractions partielles.

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - 2}{x(x - 2)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$$

on recompose le membre de droite de l'équation précédente

$$= \frac{A(x - 2)(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + (Cx + D)x(x - 2)}{x(x - 2)(x^2 + 1)}$$

On conclut que pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\boxed{\mathbf{2x^3 - 6x^2 - 2 = A(x - 2)(x^2 + 1) + Bx(x^2 + 1) + (Cx + D)x(x - 2)}} \quad \mathbf{(1)}$$

En regroupant les puissances de x on a

$$\boxed{\mathbf{2x^3 - 6x^2 - 2 = (A + B + C)x^3 + (-2A - 2C + D)x^2 + (A + B - 2D)x - 2A}} \quad \mathbf{(2)}$$

<u>méthode générale</u>

deux polynômes entiers en x sont égaux si les coefficients des mêmes puissances de x sont égaux

On égale les coefficients des mêmes puissances de x dans l`équation (2).

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ -2A - 2C + D = -6 \\ A + B - 2D = 0 \\ -2A = -2 \end{cases}$$

À partir de la dernière équation du système on conclut que $\boxed{A = 1}$.
Puis en substituant $A = 1$ dans chacune des trois premières équations on obtient le système d'équations équivalent.

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ -2C + D = -4 \\ B - 2D = -1 \end{cases}$$

<u>méthode simplifiée</u>

(il est possible de combiner les méthodes générale et simplifiée pour déterminer la valeur des constantes)

En remplaçant x par 2 dans l'équation (1), on obtient $\boxed{B = -1}$.
Finalement en substituant la valeur de B dans la première et dernière équation du système précédent on a $\boxed{C = 2}$ et $\boxed{D = 0}$.

Par conséquent

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 2}{x(x - 2)(x^2 + 1)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x - 2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1}\,dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x - 2| + \ln|x^2 + 1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x(x^2 + 1)}{x - 2}\right| + C$$

exemple 2.8.7

Effectuer $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx$

rép: $\text{arctg } x + \frac{1}{x^2+1} + C$

exemple 2.8.8

Effectuer $\displaystyle\int \frac{4x^2 + 12x + 11}{x^3 + 6x^2 + 13x + 10}\,dx$

---

rép: $\ln\left|(x + 2)^3\sqrt{x^2 + 4x + 5}\right| - 4\,\mathrm{arctg}(x + 2) + C$

remarque Les fractions rationnelles:

$$\frac{2}{(x+3)^3} \quad , \quad \frac{5x}{(x^2+1)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{2x+3}{x^2+x+1}$$

ne sont pas décomposables en fractions partielles. Toute expression de la forme

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

avec $ax^2 + bx + c$ irréductible est indécomposable en fractions partielles. En effet, puisque la décomposition en fractions partielles est unique et que

$$\frac{A}{(ax+b)^n} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

alors les constantes A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_{n-1} sont nécessairement nulles tandis que la valeur de A_n doit être égale à A.

On démontre de la même façon que que la fraction rationnelle

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

est aussi indécomposable en fractions partielles.

Exercices 2.8

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 7x + 6}$

2. $\displaystyle\int \frac{8(x - 1)}{x^3 - 4x}\, dx$

3. $\displaystyle\int \frac{3x + 2}{x^2(x - 2)}\, dx$

4. $\displaystyle\int \frac{2x^2 + 4x + 4}{2x^2 + x - 3}\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x}{(1 - x)^3}\, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{5}{(1 - x)^3}\, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + x}$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^4 + 4x^2 + 3}\, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x^2 + 3x - 1}{x^4 + x^2}\, dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2 + 9x + 2}$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 2}$

13. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2 + 2)^3}\, dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3}\, dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x + 9}{x^3 - x - 6}\, dx$

16. $\displaystyle\int \frac{7x + 1}{x^4 - x^3 - x^2 - x - 2}\, dx$

17. Une maladie contagieuse se propage dans une ville à un rythme qui est à la fois proportionnel au pourcentage P des personnes atteintes de la maladie et au pourcentage 1 - P des personnes non atteintes de la maladie. C'est-à-dire

$$\frac{dP}{dt} = kP(1 - P)$$

Supposons que 10 % de la population est atteinte de la maladie au début de l'épidémie et qu'après 10 jours, ce pourcentage passe à 20 %, déterminer

a) le pourcentage des gens malades dans 20 jours,
b) le temps qu'il faudra à la maladie pour frapper la moitié de la population de la ville.

Résoudre l'équation différentielle suivante.

18. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1 + y^3}{xy^2(1 + x^2)} = 0$

Résoudre l'équation différentielle au point indiqué.

19. $x\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x + 1} = x \quad ; \quad y(1) = 0$

Réponses 2.8

1. $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x + 1}{x + 6} \right| + C$

2. $\ln \left| \frac{x^2(x - 2)}{(x + 2)^3} \right| + C$

3. $2 \ln \left| \frac{x - 2}{x} \right| + \frac{1}{x} + C$

4. $x + \ln \frac{(x - 1)^2}{\sqrt{|2x + 3|}} + C$

5. $- \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{2(1 - x)^2} + C$

6. $\frac{5}{2(1 - x)^2} + C$

7. $\ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| + C$

8. $\text{arctg } x + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3| + C$

9. $x + \ln \left| \frac{x^3}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} \right| + \frac{1}{x} + 2\text{arctg } x + C$

10. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 3\text{arctg } x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C$

11. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{3x + 1}{3x + 2} \right| + C$

12. $\frac{1}{3} \text{arctg}(3x + 1) + C$

13. $- \frac{1}{4(x^2 + 2)^2} + C$

14. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{(x2 + 2)^2} + C$

15. $\ln\left|\dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\right| - \sqrt{2}\ \text{arctg}\left(\dfrac{x + 1}{\sqrt{2}}\right) + C$

16. $\ln\left|\dfrac{(x + 1)(x - 2)}{x^2 + 1}\right| - \text{arctg}\ x + C$

17. a) 36 % b) un peu plus de 27 jours (27,1)

18. $2 \ln|1 + y^3| = 3 \ln(1 + x^2) - 6 \ln|x| + C$

19. $y = \dfrac{x(x + \ln|x| - 1)}{x + 1}$

2.9 Intégration par substitutions trigonométriques

exemple 2.9.1

Effectuer $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\, dx$

---

le changement de variable $x = g(u)$ est permis à la condition que g soit une fonction dérivable et que g admette une fonction inverse dérivable $u = g^{-1}(x)$

on a restreint u entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ pour que la fonction utilisée possède une fonction inverse

Il est possible de faire disparaître le radical dans l'expression à intégrer. Il suffit de poser

$$x = \sin u \quad \text{où} \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$$
$$dx = \cos u \; du$$

Par conséquent

$$\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\, dx = \int \frac{\sqrt{1 - \sin^2 u}}{\sin^2 u} \cos u \; du$$

puisque $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$

$$= \int \frac{\sqrt{\cos^2 u}}{\sin^2 u} \cos u \; du$$

Si $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$ alors $\cos u > 0$ et $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.

$$= \int \frac{\cos u}{\sin^2 u} \cos u \; du$$

$$= \int \text{cotg}^2 u \; du$$

puisque $1 + \text{cotg}^2 u = \text{cosec}^2 u$

$$= \int (\text{cosec}^2 u - 1)\; du$$

$$= -\text{cotg}\, u - u + C$$

Il nous faut maintenant retourner à la variable x. Puisque $x = \sin u$, le triangle de la figure 2.9.1 établit la relation entre les variables x et u.

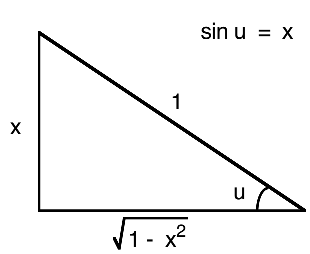


figure 2.9.1

Par conséquent

$$\text{cotg}\, u = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \quad \text{et} \quad u = \arcsin x$$

Donc $$\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} - \arcsin x + C$$

Lorsque l'intégrande contient une racine de l'une des formes suivantes:

$$\sqrt{a^2 - v^2} \quad , \quad \sqrt{a^2 + v^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{v^2 - a^2} \;;$$

il est possible d'éliminer cette racine de l'expression à intégrer en utilisant une substitution trigonométrique adéquate.

a) La fonction à intégrer contient une expression de la forme $\sqrt{a^2 - v^2}$ $(a > 0)$

Dans ce cas, pour faire disparaître la racine carrée, il suffit de poser

$$v = a \sin u \quad \text{où} \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{u = arcsin\left(\frac{v}{a}\right)}}$$

Par ce changement de variable

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - v^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} \\ &= \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 u)} && \textit{sin}^2 u + \textit{cos}^2 u = 1 \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 u} \\ &= \boxed{\mathbf{a \cos u}} && \textit{puisque } a>0 \textit{ et } \cos u > 0 \textit{ si } -\pi/2 \leq u \leq \pi/2 \end{aligned}$$

b) La fonction à intégrer contient une expression de la forme $\sqrt{a^2 + v^2}$ $(a > 0)$

Dans ce cas, pour faire disparaître la racine carrée, il suffit de poser

$$v = a \operatorname{tg} u \quad \text{où} \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{u = arctg\left(\frac{v}{a}\right)}}$$

Par ce changement de variable

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + v^2} &= \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 u} \\ &= \sqrt{a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 u)} && 1 + \textit{tg}^2 u = \textit{sec}^2 u \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2 u} \\ &= \boxed{\mathbf{a \sec u}} && \textit{puisque } a>0 \textit{ et } \sec u > 0 \textit{ si } -\pi/2 < u < \pi/2 \end{aligned}$$

c) La fonction à intégrer contient une expression de la forme $\sqrt{v^2 - a^2}$ $(a > 0)$

Dans ce cas, pour faire disparaître la racine carrée, il suffit de poser

$$v = a \sec u \quad \text{où} \quad \begin{cases} 0 \leq u < \frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq u < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{u = arcsec\left(\frac{v}{a}\right)}}$$

Par ce changement de variable

$$\begin{aligned} \sqrt{v^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 - a^2} \\ &= \sqrt{a^2 (\sec^2 u - 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 u} && \textit{puisque } a>0 \\ &= \boxed{\mathbf{a \operatorname{tg} u}} && \textit{et } \operatorname{tg} u > 0 \textit{ si } \begin{cases} 0 \leq u < \frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq u < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

exemple 2.9.2

Effectuer $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 - 9x^2}}$

Avant d'entreprendre le problème par substitutions trigonométriques, assurons-nous d'abord qu'il ne peut être résolu plus simplement par une autre méthode. S'il n'y a pas d'autres solutions plus rapides alors posons

cas où la fonction à intégrer contient une racine de la forme $\sqrt{a^2 - v^2}$ *avec* $a = 4$ *et* $v = 3x$ *l'intégrande est transformée en posant* $u = \arcsin\left(\frac{v}{a}\right)$

$$u = \arcsin\left(\frac{3x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \sin u = \frac{3x}{4} \qquad \text{donc} \qquad x = \frac{4}{3}\sin u$$

$$\text{et} \qquad dx = \frac{4}{3}\cos u \; du$$

Par conséquent

$\sqrt{a^2 - v^2}$ *devient* $a\cos u$ *par la transformation*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 - 9x^2}} = \int \frac{\frac{4}{3}\cos u\,du}{\left(\frac{16}{9}\sin^2 u\right)(4\cos u)}$$

$$= \frac{3}{16}\int \operatorname{cosec}^2 u \;\; du$$

$$= -\frac{3}{16}\operatorname{cotg} u + C$$

Retournons maintenant à la variable x.

Puisque

$$\sin u = \frac{3x}{4}$$

le triangle de la figure 2.9.2 établit la relation entre les variables x et u.

$\sin u = \frac{3x}{4}$

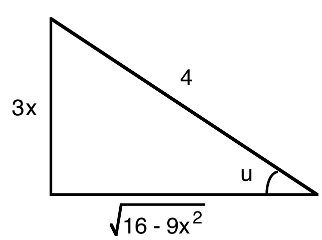


figure 2.9.2

Par conséquent

$$\operatorname{cotg} u = \frac{\sqrt{16 - 9x^2}}{3x}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16 - 9x^2}} = -\frac{3}{16}\,\frac{\sqrt{16 - 9x^2}}{3x} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{16 - 9x^2}}{16x} + C$$

exemple 2.9.3 Effectuer $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$

rép: $-4\sqrt{4 - x^2} + \dfrac{\sqrt{(4 - x^2)^3}}{3} + C$

exemple 2.9.4

Effectuer $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$

---

cas où la fonction à intégrer contient une racine de la forme

$\sqrt{a^2+v^2}$

avec $a = 3$ et $v = 2x$

l'intégrande est transformée en posant $u = \text{arctg}\left(\frac{v}{a}\right)$

$\sqrt{a^2+v^2}$ devient $a \sec u$ par la transformation

Posons

$$u = \text{arctg}\left(\frac{2x}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \text{tg } u = \frac{2x}{3} \qquad \text{donc} \qquad x = \frac{3}{2}\,\text{tg } u$$

$$\text{et} \qquad dx = \frac{3}{2}\sec^2 u \; du$$

Par conséquent

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2 u \; du}{\left(\frac{3}{2}\,\text{tg } u\right)(3\sec u)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sec u}{\text{tg } u}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int \text{cosec } u \; du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\text{cosec } u - \text{cotg } u| + C$$

Puisque

$$\text{tg } u = \frac{2x}{3}$$

le triangle de la figure 2.9.3 établit la relation entre les variables x et u.

Par conséquent

$$\text{cosec } u = \frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x} \qquad \text{et} \qquad \text{cotg } u = \frac{3}{2x}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x} - \frac{3}{2x}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2} - 3}{2x}\right| + C$$

$\text{tg } u = \frac{2x}{3}$

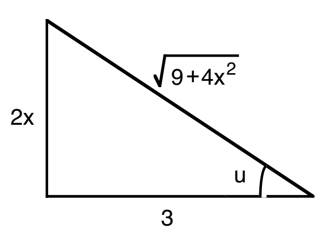


figure 2.9.3

exemple 2.9.5

Effectuer $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^3}\, dx$

Posons

cas où la fonction à intégrer contient une racine de la forme $\sqrt{v^2 - a^2}$

avec $a = 5$ *et* $v = x$

l'intégrande est transformée en posant $u = \operatorname{arcsec}\left(\frac{v}{a}\right)$

$$u = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \sec u = \frac{x}{5} \qquad \text{donc} \qquad x = 5 \sec u$$

$$\text{et} \qquad dx = 5 \sec u \operatorname{tg} u \; du$$

Par conséquent

$\sqrt{v^2 - a^2}$ *devient* $a \operatorname{tg} u$ *par la transformation*

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^3}\, dx = \int \frac{(5 \operatorname{tg} u)(5 \sec u \operatorname{tg} u\, du)}{125 \sec^3 u}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\operatorname{tg}^2 u}{\sec^2 u}\, du$$

$$= \frac{1}{5}\int \sin^2 u \; du$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1 - \cos 2u}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{10}\int 1 \; du - \frac{1}{10}\int \cos 2u \; du$$

Pour pouvoir retourner à la variable x, on doit au préalable transformer sin 2u en 2 sin u cos u .

$$= \frac{1}{10}\, u - \frac{1}{20} \sin 2u + C$$

$$= \frac{1}{10}\, u - \frac{1}{20} (2 \sin u \cos u) + C$$

$$= \frac{1}{10}\, u - \frac{1}{10} \sin u \cos u + C$$

$\sec u = \frac{x}{5}$

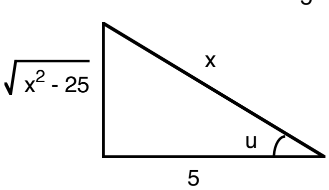


figure 2.9.4

Le triangle de la figure 2.9.4 établit la relation entre les variables x et u.

Par conséquent

$$\sin u = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} \qquad \text{et} \qquad \cos u = \frac{5}{x}$$

Donc

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^3}\, dx = \frac{1}{10}\, \text{arcsec}\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{1}{10}\frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}\left(\frac{5}{x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{10}\, \text{arcsec}\left(\frac{x}{5}\right) - \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{2x^2} + C$$

exemple 2.9.6 Effectuer $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)^3}}$

____

rép: $\displaystyle\frac{x - 2}{\sqrt{(x^2 - 4x + 5)}} + C$

exemple 2.9.7

Effectuer $\displaystyle\int \frac{dx}{(9 + x^2)^2}$

Lorsque l'intégrande contient une expression de la forme

$a^2 + v^2 \quad (a > 0)$

on peut utiliser la méthode d'intégration par substitutions trigonométriques car pour toute valeur de v dans les réels on a

$$a^2 + v^2 = \left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^2$$

mais attention!

lorsque l'intégrande contient une expression de la forme

$a^2 - v^2 \quad (a > 0)$

ou de la forme

$v^2 - a^2 \quad (a > 0)$

la transformation du haut n'est plus valable pour toute valeur de v dans les réels;

on évitera donc dans ces deux derniers cas d'utiliser une telle transformation.

rép: $\dfrac{1}{54}\ \text{arctg}\left(\dfrac{x}{3}\right) + \dfrac{x}{18(9 + x^2)} + C$

Exercices 2.9

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{16-25x^2}}$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}}$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{25x^2-4}}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

10. $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)^5}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{(9+4x^2)^3}}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}}$

15. $\displaystyle\int x^3\sqrt{7+x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(16-9x^2)^3}}{x^6}\,dx$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

20. $\displaystyle\int x\sqrt{4x^2-8x-5}\,dx$

Réponses 2.9

1. $-\dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{9x} + C$

2. $\dfrac{1}{4} \ln \left|\dfrac{4 - \sqrt{16 - 25x^2}}{5x}\right| + C$

3. $-\dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C$

4. $-\dfrac{\sqrt{(1 + x^2)^3}}{3x^3} + \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + C$

5. $\dfrac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}{3a^2x^3} + C$

6. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} - \dfrac{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}{3x^3} + C$

7. $\ln \left|\dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 13} + (x - 2)}{3}\right| + C$

8. $\dfrac{25}{16} \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{5x}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{25x^2 - 4}}{8x^2} + C$

9. $\dfrac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C$

10. $\ln\sqrt{x^2 + 1} - \dfrac{x^2}{2(x^2 + 1)} + C$ ou $\ln\sqrt{x^2 + 1} + \dfrac{1}{2(x^2 + 1)} + C$

11. $5 \ln \left|\dfrac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{25 - x^2} + C$

12. $\dfrac{x^3}{12 \sqrt{(4 - x^2)^3}} + C$

13. $\dfrac{1}{8} \ln \left|\dfrac{\sqrt{9 + 4x^2} + 2x}{3}\right| - \dfrac{x}{4 \sqrt{9 + 4x^2}} + C$

14. $\dfrac{x - 2}{4\sqrt{4x - x^2}} + C$

15. $\dfrac{\sqrt{(7 + x^2)^5}}{5} - \dfrac{7\sqrt{(7 + x^2)^3}}{3} + C$

16. $-\dfrac{\sqrt{(16 - 9x^2)^5}}{80x^5} + C$

17. $\dfrac{x\sqrt{x^2 - 16}}{2} + 8 \ln\left|\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 16}}{4}\right| + C$

18. $\sqrt{x^2 + a^2} + a \ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{x}\right| + C$

19. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) + C$

20. $\dfrac{\sqrt{(4x^2 - 8x - 5)^3}}{12} + \dfrac{(x - 1)\sqrt{4x^2 - 8x - 5}}{2} - \dfrac{9}{4} \ln\left|\dfrac{2(x - 1) + \sqrt{4x^2 - 8x - 5}}{3}\right| + C$

2.10 Intégration par substitutions diverses

intégration par substitution algébrique

Lorsque l'intégrande contient

a) un radical de la forme $\sqrt[n]{ax + b}$,

posons $\quad u = \sqrt[n]{ax + b} \quad \Rightarrow \quad u^n = ax + b$

donc $\quad nu^{n-1}\,du = a\,dx$

b) des radicaux de la forme $\sqrt[n_1]{ax + b}$, $\sqrt[n_2]{ax + b}$, $\sqrt[n_3]{ax + b}$, ...
et k est le plus petit commun multiple de $n_1, n_2, n_3, ...$

posons $\quad u = \sqrt[k]{ax + b} \quad \Rightarrow \quad u^k = ax + b$

donc $\quad ku^{k-1}\,du = a\,dx$

Ces transformations ont pour effet de faire disparaître les radicaux. L'expression à intégrer n'étant plus irrationnelle, elle sera en général plus facile à intégrer.

exemple 2.10.1

Effectuer $\int x^2 \sqrt{1 - x}\,dx$

Pour faire disparaître le radical dans l'expression à intégrer. Il suffit de poser

$$u = \sqrt{1 - x}$$

$$\Rightarrow \quad u^2 = 1 - x \qquad (x = 1 - u^2)$$

$$2u\,du = -\,dx$$

Par conséquent,

$$\int x^2 \sqrt{1 - x}\,dx = \int (1 - u^2)^2\, u\,(-2u\,du)$$

$$= -2 \int (u^2 - 2u^4 + u^6)\,du$$

$$= -\frac{2}{3}u^3 + \frac{4}{5}u^5 - \frac{2}{7}u^7 + C$$

puisque $u = \sqrt{1 - x}$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{1 - x})^3 + \frac{4}{5}(\sqrt{1 - x})^5 - \frac{2}{7}(\sqrt{1 - x})^7 + C$$

exemple 2.10.2 Effectuer $\displaystyle\int \frac{\sqrt[12]{x} + 1}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx$

rép: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + C$

La substitution algébrique peut être utilisée dans d'autres types de problèmes.

exemple 2.10.3

Effectuer $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

Même si la substitution trigonométrique $u = \arcsin x$ permet de résoudre le problème, on pourra obtenir une solution plus rapidement en utilisant la substitution suivante

il ne sera pas toujours possible de transformer de cette façon une intégrande contenant l'expression $\sqrt{a^2 - u^2}$

la présence du facteur x^3 rend ici cette transformation possible

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1-x^2} \\ \Rightarrow \quad u^2 &= 1 - x^2 \qquad (\ x^2 = 1 - u^2) \\ 2u\,du &= -2x\,dx \\ u\,du &= -x\,dx \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int x^2\sqrt{1-x^2}\;x\,dx \\ &= \int (1-u^2)\,u\,(-u\,du) \\ &= -\int (u^2 - u^4)\,du \\ &= -\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5 + C \end{aligned}$$

puisque $u = \sqrt{1-x^2}$

exemple 2.10.4

Effectuer $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\ dx$

rép: $\frac{4}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^5 - \frac{4}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^3 + C$

Parfois une substitution non algébrique sera efficace.

exemple 2.10.5

Effectuer $\int \sqrt{e^x - 1}\ dx$

rép: $2\sqrt{e^x - 1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C$

Souvent un problème nécessitera l'utilisation de plus d'une technique d'intégration.

exemple 2.10.6

Effectuer $\int \sin\sqrt{x}\ dx$

D'abord nous pouvons faire disparaître le radical à l'aide d'un *changement de variable*. Il suffit de poser

$$u = \sqrt{x}$$
$$\Rightarrow \quad u^2 = x$$
$$2u\,du = dx$$

Par conséquent,

$$\int \sin\sqrt{x}\ dx = \int \sin u\,(2u\,du)$$

$$= 2\int u \sin u\ du$$

la variable u est déjà utilisée, nous utiliserons pour intégrer par parties les variables t et v

Utilisons maintenant la méthode d'*intégration par parties*.

Sachant que $\int t\ dv = t\,v - \int v\,dt$.

Posons $t = u \quad ; \quad dv = \sin u\,du$

$dt = du \quad ; \quad v = \int \sin u\ du = -\cos u$

$$\Rightarrow \quad 2\int u \sin u\ du = 2\left(t\,v - \int v\,dt\right)$$

$$= -2\left(u\cos u - \int(-\cos u\ du)\right)$$

$$= -2u\cos u + 2\sin u + C$$

puisque $u = \sqrt{x}$

$$= -2\sqrt{x}\ \cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$$

exemple 2.10.7

Effectuer $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x - 3}\, dx$

rép: $\displaystyle\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 3} \right| + C$

rappelons la définition d'une fonction élémentaire;

une fonction élémentaire c'est une fonction que l'on obtient à l'aide d'une équation du type $y = f(x)$ construite en utilisant des fonctions connues ainsi que les opérations $+, -, \times, \div$ et la composition de fonctions.

Nous sommes maintenant en mesure d'intégrer un grand nombre de fonctions à l'aide des quelques modèles et techniques présentés. Cependant certaines fonctions, quoique simples, ne possèdent pas de primitives élémentaires. Telles sont les primitives exprimées à l'aide des intégrales suivantes:

$$\int e^{-x^2}\, dx \quad ; \quad \int \frac{\sin x}{x}\, dx \quad ; \quad \int \frac{\cos x}{x}\, dx \quad ;$$

$$\int \sin x^2\, dx \quad ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{\ln x} \quad ;$$

$$\int x \operatorname{tg} x\, dx \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x + 1}\, dx \quad ; \quad \int \sqrt{1 - 2\sin^2 x}\, dx \quad \text{etc.}$$

Lorsqu'un problème est associé à l'une de ces intégrales, il existe heureusement des alternatives. Une de ces alternatives est *l'intégration par développement en séries de puissances* (chapitre 4).

Exercices 2.10

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

3. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+6)\sqrt{x+2}}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-1}}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}+1}\,dx$

9. $\displaystyle\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3-4}}{x}\,dx$

11. $\displaystyle\int x^5\sqrt{3-x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{(x+1)^3}}\,dx$

13. $\displaystyle\int x^2\sqrt[5]{(1-2x)^3}\,dx$

14. $\displaystyle\int (2x+1)^{15}x^2\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(\ln x+1)}\,dx$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

19. $\int x \ln(x^2 - 2x + 2)\ dx$

23. $\int \frac{dx}{2 + \text{tg } x}$

20. $\int e^{\sqrt{x}}\ dx$

24. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^x}$

21. $\int e^{\arcsin x}\ dx$

25. $\int \frac{\sqrt{1 - x^3}}{x^4}\ dx$

22. $\int \frac{\cos x}{\sin x \sqrt{\sin x + 1}}\ dx$

26 . $\int \ln(1 - \sqrt{x})\ dx$

Réponses 2.10

1. $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

2. $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$

3. $\frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + C$

4. $\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right) + C$

5. $2\sqrt{x+2} - 6\ln(3+\sqrt{x+2}) + C$

6. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{x-1} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x-1} + 1\right| + C$

7. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + C$

8. $\frac{2}{3}\sqrt[4]{(2x+1)^3} - \frac{2}{3}\ln\left(\sqrt[4]{(2x+1)^3} + 1\right) + C$

9. $-\frac{2}{9}\sqrt{(1-x^3)^3} + \frac{2}{15}\sqrt{(1-x^3)^5} + C$

10. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3-4} - \frac{4}{3}\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^3-4}}{2}\right) + C$

11. $-3\sqrt{(3-x^2)^3} + \frac{6}{5}\sqrt{(3-x^2)^5} - \frac{1}{7}\sqrt{(3-x^2)^7} + C$

12. $2\sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} + C$

13. $-\frac{5}{64}\sqrt[5]{(1-2x)^8} + \frac{5}{52}\sqrt[5]{(1-2x)^{13}} - \frac{5}{144}\sqrt[5]{(1-2x)^{18}} + C$

14. $\frac{(2x+1)^{18}}{144} - \frac{(2x+1)^{17}}{68} + \frac{(2x+1)^{16}}{128} + C$

15. $\ln x - \ln|\ln x + 1| + C$

16. $2 \operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C$ ou $2 \operatorname{arcsec}\sqrt{e^x} + C$

17. $- e^x + 2 \ln(e^x + 1) + C$

18. $\ln\left|\dfrac{1 - \sqrt{1 - x}}{1 + \sqrt{1 - x}}\right| + C$

19. $\dfrac{x^2}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) - \dfrac{x^2}{2} - x + 2\operatorname{arctg}(x - 1) + C$

20. $2 e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C$

21. $\dfrac{1}{2} e^{\arcsin x}\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) + C$

22. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{\sin x + 1} - 1}{\sqrt{\sin x + 1} + 1}\right| + C$

23. $\dfrac{1}{5} \ln|2 + \operatorname{tg} x| - \dfrac{1}{10} \ln|\sec^2 x| + \dfrac{2}{5} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C$

24. $\dfrac{1}{3e^x} + \dfrac{1}{9} \ln|e^x - 3| - \dfrac{x}{9} + C$

25. $\dfrac{1}{6} \ln\left|\dfrac{\sqrt{1 - x^3} + 1}{\sqrt{1 - x^3} - 1}\right| - \dfrac{\sqrt{1 - x^3}}{3x^3} + C$

26. $(x - 1)\ln(1 - \sqrt{x}) - \dfrac{x}{2} - \sqrt{x} + C$

Problèmes de révision (première série)

pour résoudre les problèmes 1 à 14, utiliser au besoin:

les modèles d'intégration (1 à 17), un changement de variable, la méthode de complétion du carré, l'intégration par parties ou les méthodes d'intégration de certaines classes de fonctions trigonométriques

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\sqrt{2x - x^2}}\, dx$

3. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\mathrm{tg}^3 x}\, dx$

4. $\displaystyle\int \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^2 dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{cotg}^3 x}{\mathrm{cosec}\, x}\, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{4x^2(3x - 1)}{4x^2 + 1}\, dx$

8. $\displaystyle\int \sin^3 3x \cos^5 3x\, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}^4 x}{\sec^2 x}\, dx$

10. $\displaystyle\int \frac{6x + 1}{3x^2 + 8x + 7}\, dx$

11. $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x\, dx$

12. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\, dx$

13. $\displaystyle\int \frac{3 - \mathrm{cotg}^2 x}{\mathrm{cosec}^2 x}\, dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\, dx$

Réponses aux problèmes de révision (première série)

1. $x \operatorname{tg} x - \ln|\sec x| + C$

2. $-\sqrt{2x - x^2} + 4 \arcsin(x - 1) + C$

3. $-\dfrac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + C \quad$ ou $\quad -\dfrac{1}{2 \sin^2 x} + C$

4. $\dfrac{2}{3} x^3 + x + \dfrac{2}{3}\sqrt{(1 + x^2)^3} + C$

5. $-\sqrt{1 - x^2} \arcsin x + x + C$

6. $-\operatorname{cosec} x - \sin x + C$

7. $\dfrac{3}{2} x^2 - x + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x - \dfrac{3}{8} \ln|4x^2 + 1| + C$

8. $\dfrac{1}{12} \sin^4 3x - \dfrac{1}{9} \sin^6 3x + \dfrac{1}{24} \sin^8 3x + C$

   ou $\quad -\dfrac{1}{18} \cos^6 3x + \dfrac{1}{24} \cos^8 3x + C$

9. $\operatorname{tg} x - \dfrac{3}{2} x + \dfrac{1}{4} \sin 2x + C$

10. $\ln|3x^2 + 8x + 7| - \dfrac{7\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3x + 4}{\sqrt{5}}\right) + C$

11. $-\dfrac{2}{5} \sin 3x \sin 2x - \dfrac{3}{5} \cos 3x \cos 2x + C$

12. $\ln|\sin x| + \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + \cos x + C$

13. $x - \sin 2x + C$

14. $-\dfrac{\ln^2 x}{x} - \dfrac{2 \ln x}{x} - \dfrac{2}{x} + C$

Problèmes de révision (deuxième série)

pour résoudre les problèmes 1 à 35 utiliser au besoin ce qui a été vu depuis le début du chapitre

1. $\displaystyle\int \sec^2 4x \, \mathrm{tg}^5 4x \; dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$

3. $\displaystyle\int x^2 \sqrt[3]{(3x + 2)^4} \; dx$

4. $\displaystyle\int \arcsin 2x \; dx$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x - x^2}}$

6. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^5 x \; dx$

7. $\displaystyle\int \ln(2x + x^2) \; dx$

8. $\displaystyle\int \sqrt{3 - 2x - x^2} \; dx$

9. $\displaystyle\int \frac{(1 + 3\cos 2x)^2}{\sin 2x} \; dx$

10. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 5x}{(x^2 - 1)(x + 1)} \; dx$

11. $\displaystyle\int (e^{x/3} - e^{-x/3})^2 \; dx$

12. $\displaystyle\int \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 5} \; dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + e^{-2x}}}{e^{2x}} \; dx$

14. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{(x + 1)^3}} \; dx$

15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} \; dx$

16. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \; dx$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 2)\sqrt{1 + 4x + x^2}}$

18. $\displaystyle\int \frac{\sec^5 x}{\mathrm{cosec}\, x} \; dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9x^2 + 4}} \; dx$

20. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin^2 x - 4} \; dx$

21. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}}\,dx$

22. $\displaystyle\int x^8 \sin x^3\,dx$

23. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \sqrt{\sec x}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{3x^2+7}{x^3+x^2-2}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{\sin^5 y}{\sqrt{\cos y}}\,dy$

27. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{1-6x+9x^2}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+8)^3}}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{y^4+8}{y^3+2y^2}\,dy$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^4}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x-1}{x^4+2x^2+1}\,dx$

35. D'après un politicologue, le taux de variation du pourcentage P de popularité d'un candidat à une élection est donné par l'équation

$$\frac{dP}{dt} = kP(1-P)$$

Si au début de la campagne électorale, 20 % des électeurs sont en faveur de ce candidat et qu'un mois après cette proportion passe à 30 %,

a) après combien de mois le pourcentage de popularité du candidat sera-t-il de 40 % ?

b) Si les élections avaient lieu trois mois après le début de la campagne électorale, le candidat pourrait-il espérer remporter l'élection ?

Réponses aux problèmes de révision (deuxième série)

1. $\dfrac{\operatorname{tg}^6 4x}{24} + C$

2. $\dfrac{1}{12} \ln \left| \dfrac{2x - 3}{2x + 3} \right| + C$

3. $\dfrac{1}{117} \sqrt[3]{(3x + 2)^{13}} - \dfrac{2}{45} \sqrt[3]{(3x + 2)^{10}} + \dfrac{4}{63} \sqrt[3]{(3x + 2)^{7}} + C$

   ou $\dfrac{1}{7} x^2 \sqrt[3]{(3x + 2)^{7}} - \dfrac{1}{35} x^3 \sqrt[3]{(3x + 2)^{10}} + \dfrac{1}{455} \sqrt[3]{(3x + 2)^{13}} + C$

4. $x \arcsin 2x + \dfrac{\sqrt{1 - 4x^2}}{2} + C$

5. $\arcsin(2x + 1) + C$

6. $\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\sec x| + C$

   ou $\dfrac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \ln|\sec x| + C$

7. $x \ln(2x + x^2) - 2x + 2\ln|x + 2| + C$

8. $2 \arcsin\left(\dfrac{x + 1}{2}\right) + \left(\dfrac{x + 1}{2}\right)\sqrt{3 - 2x - x^2} + C$

9. $5 \ln|\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} 2x| + 3\ln|\sin 2x| + \dfrac{9}{2} \cos 2x + C$

10. $\ln|(x - 1)^2(x + 1)| - \dfrac{1}{x + 1} + C$

11. $\dfrac{3}{2}\left(e^{2x/3} - e^{-2x/3} \right) - 2x + C$

12. $\ln|x^2 + 2x + 5| + \dfrac{3}{2} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x + 1}{2}\right) + C$

13. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1 + e^{-2x})^3} + C$

14. $\dfrac{2}{3}(\sqrt{x + 1})^3 - 4\sqrt{x + 1} - \dfrac{4}{\sqrt{x + 1}} + C$

15. $\dfrac{1}{2} \ln^2 x + 2\sqrt{x} + C$

16. $\frac{x}{4}\sqrt{x^2-4} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

17. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ \text{arcsec}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) + C$

18. $\frac{\sec^4 x}{4} + C$ ou $\frac{\text{tg}^2 x}{2} + \frac{\text{tg}^4 x}{4} + C$

19. $\frac{\sqrt{(9x^2+4)^3}}{243} - \frac{4\sqrt{9x^2+4}}{81} + C$

20. $\sin x + \ln|\sin x - 2| - \ln|\sin x + 2| + C$

21. $4\left(\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{x}}\right)^5}{5} - \left(\sqrt{2+\sqrt{x}}\right)^3 + 2\sqrt{2+\sqrt{x}}\right) + C$

22. $\frac{1}{3}\left(2\cos x^3 + 2x^3\sin x^3 - x^6\cos x^3\right) + C$

23. $2\sqrt{\sec x} + C$

24. $\frac{2}{3}\ \text{tg}\ 3x + \frac{2}{3}\sec 3x - x + C$

25. $\ln\left|(x-1)^2\sqrt{x^2+2x+2}\right| - 4\ \text{arctg}(x+1) + C$

26. $-2\sqrt{\cos y} + \frac{4}{5}\sqrt{(\cos y)^5} - \frac{2}{9}\sqrt{(\cos y)^9} + C$

27. $\frac{1}{3}\ln|1-3x| - \frac{1}{3(1-3x)} + C$

28. $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+8}+x}{2\sqrt{2}}\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} + C$

29. $(\text{arctg}\sqrt{x})^2 + C$

30 $-\frac{\text{arctg}\ x}{x} + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$

31. $\sqrt{x^2-4}\ \ln x - \sqrt{x^2-4} + 2\ \text{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

ou $\sqrt{x^2-4}\ \ln x - \sqrt{x^2-4} + 2\ \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + C$

32. $\frac{y^2}{2} - 2y - \frac{4}{y} + 2\ln\left|\frac{(y+2)^3}{y}\right| + C$

33. $-\frac{\sqrt{(16+x^2)^3}}{48x^3} + C$

34. $\ln(x^2+1) - \frac{3}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C$

35. a) 1,82 mois
b) oui car le pourcentage de sa popularité sera alors de 55,74 %