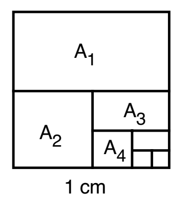
Limites

1

La notion de *limite* est la première notion que nous aurons à approfondir. Ce concept permettra d'aboutir à celui de la *dérivée*. Limite et dérivée constituent le fondement de ce qu'on appelle le *calcul différentiel*. Bien que la notion de limite fasse appel à l'intuition, elle est néanmoins d'une conception particulièrement formelle. Par souci de clarté nous réserverons à un cours plus avancé cette formalisation.

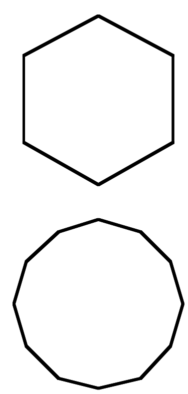
Qu'entendons-nous par le mot «limite» ? Le Petit Robert donne la définition suivante à ce mot: *"grandeur fixe dont une grandeur variable peut approcher indéfiniment sans l'atteindre"* .

Prenons par exemple un carré dont la mesure du côté est de 1 cm. L'aire du carré pourrait être obtenue en utilisant le raisonnement suivant. On divise le carré en deux régions d'aires égales puis, une des deux régions est divisée à nouveau en deux. On continue de la même façon ce découpage indéfiniment.



Il paraît évident que la somme des aires des régions ainsi obtenues s'approche de l'aire du carré. Bien que la somme en question ne sera jamais égale à l'aire du carré, on dira néanmoins que cette somme sera à la limite, l'aire du carré. Ainsi une grandeur fixe (l'aire du carré) est approchée indéfiniment sans jamais être atteinte, à l'aide d'une grandeur variable (la somme des aires des régions tracées).

Signalons qu'Archimède (287-212 avant J.-C.) s'est servi d'une technique semblable pour calculer la circonférence du cercle en fonction de son diamètre.



À l'époque on savait calculer le périmètre des polygones réguliers à n côtés. En augmentant indéfiniment le nombre de côtés d'un polygone régulier, on obtient toujours un polygone qui à la limite devient un cercle. Ainsi lorsque le nombre de côtés d'un polygone régulier augmente le périmètre des polygones s'approche indéfiniment de la circonférence du cercle. On dira que la limite des périmètres des polygones correspond à la circonférence du cercle.

Un des cas les plus importants où s'applique la notion de limite est celui des fonctions.

Rappel historique

Augustin Cauchy (1789-1857)

Le calcul différentiel et intégral fut inventé au dix-septième siècle, mais cent cinquante années s'écoulèrent avant que les mathématiciens en développent les bases modernes fondées sur le concept de limite. Dans trois ouvrages publiés dans les années 1820, le mathématicien français Augustin-Louis Cauchy présenta le résultat de ses recherches qui marquèrent le début d'une nouvelle ère dans l'histoire de l'analyse.

À la fin du dix-huitième siècle, les mathématiciens orientèrent de plus en plus leurs recherches vers un fondement logiquement solide du calcul différentiel et intégral. À cette époque, on considérait ce calcul comme un ensemble d'opérations sur des formules produisant des résultats acceptables ou comme une analyse de la géométrie des courbes intuitivement satisfaisante.

Cauchy s'intéressa au problème du fondement du calcul différentiel et intégral alors qu'il était jeune assistant à l'École polytechnique. Il réalisa qu'il devait s'appuyer sur les concepts de limite et de continuité, qu'il formula clairement pour la première fois. En partant de ces notions, il développa systématiquement une théorie des fonctions dérivables et intégrables d'une variable réelle. En respectant une logique rigoureuse et en basant le calcul différentiel et intégral sur la continuité des nombres réels, il inaugura une nouvelle ère en analyse mathématique. Cauchy fut, à juste titre, consacré premier mathématicien «moderne».

De lui, on compte plus de 700 mémoires. Ses plus grandes contributions à la science mathématique sont généralement incorporées dans trois grands traités: «Cours d'analyse de l'École Polytechnique» (1821); «Le calcul infinitésimal» (1823); «Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie» (1826-1828);

tiré en partie du livre

"Le calcul différentiel et intégral par la résolution de problèmes"

de Neal Reid.

En plus de ses travaux sur le calcul différentiel et intégral, il apporta des contributions fondamentales à la théorie des fonctions d'une variable complexe, à la théorie de l'élasticité et à l'algèbre. Les principes et théorèmes portant le nom de Cauchy sont plus nombreux que ceux de tout autre mathématicien.

∞ pour infiniment grand positif
$-\infty$ pour infiniment grand négatif.

Mentionnons que pour ce chapitre, seules les fonctions réelles de type algébrique seront considérées.

De plus, nous travaillerons sur un ensemble élargi des nombres réels. L'ensemble sera constitué des nombres réels (**R**) ainsi que des symboles $\pm\infty$. Ces deux symboles ne font pas partie de l'ensemble des nombres réels mais, joints à cet ensemble, ils en constituent une extension que l'on note

$\bar{\mathbf{R}}$

$-\infty \longrightarrow \infty$

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\} .$$

1.1 Approche intuitive de la notion de limite

évaluation d'une limite à l'aide d'une calculatrice

Considérons la fonction f définie par l'équation $y = 3x + 5$. Étudions le comportement des images de cette fonction pour des valeurs de x de plus en plus près de 2.

x	y
1,8	10,4
1,9	10,7
1,95	10,85
1,999	10,997
1,9999	10,9997

On constate que plus la variable x prend des valeurs près de 2 (tout en demeurant inférieures à 2), plus les images de la fonction f s'approchent de la valeur 11. Nous dirons que lorsque la valeur de la variable x s'approche de 2 par la gauche, la fonction présente des images de plus en plus près de la valeur 11. D'une façon plus concise, on écrira

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 11$$

x	y
2,2	11,6
2,1	11,3
2,05	11,15
2,001	11,003
2,0001	11,0003

De même, on constate que plus la variable x prend des valeurs près de 2 (tout en demeurant supérieures à 2), plus les images de la fonction f s'approchent de la valeur 11. Nous dirons que lorsque la valeur de la variable x s'approche de 2 par la droite, la fonction présente des images de plus en plus près de la valeur 11. D'une façon plus concise, on écrira

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 11$$

Notons que,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 11 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 11 \end{cases}$$

Lorsque dans les deux cas, la valeur obtenue est la même , on écrit

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 11$$

proposition 1.1.1

symbole utilisé

$\Leftrightarrow$: si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b \end{cases} \quad \text{où a et b dans } \mathbf{R}$$

De plus,

a) si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas ,

b) si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ n'existe pas ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ n'existe pas ou ces deux limites n'existent pas alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas ,

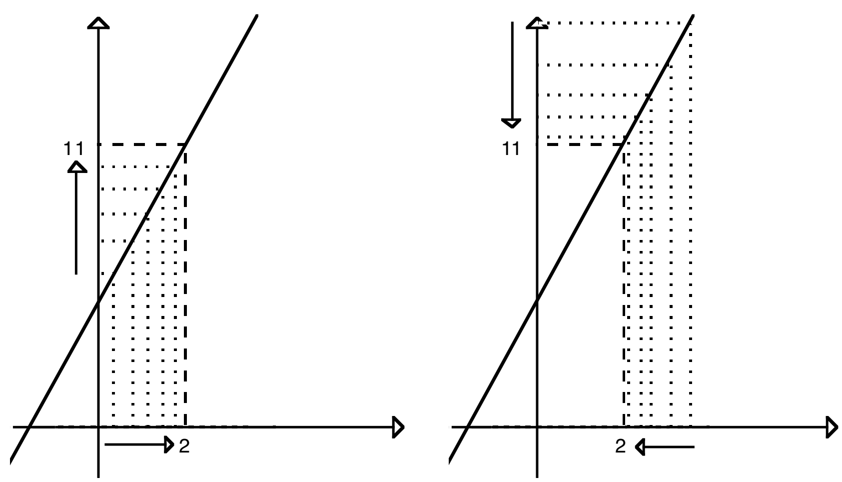
c) la limite d'une fonction en une valeur donnée est unique lorsqu'elle existe.

évaluation d'une limite à l'aide d'un graphique

Évaluer une limite sur une fonction devient un jeu d'enfant lorsqu'on connaît le graphique de cette fonction. La fonction utilisée dans l'exemple précédent est définie par l'équation

$$y = 3x + 5.$$

Son graphique correspond à une droite.



$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 11 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 11$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 2} f(x) = 11$$

exemple 1.1.1

Considérons maintenant la fonction f définie par l'équation

$$y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

À partir des tableaux ci-dessous, évaluer si possible les différentes limites et images.

x	y
0,8	0,52786
0,9	0,51316
0,95	0,50641
0,995	0,50062
0,9995	0,50006

x	y
1,2	0,47723
1,1	0,48809
1,05	0,49390
1,005	0,49938
1,0005	0,49994

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

d) $f(1)$

x	y
-0,05	–
-0,005	–
-0,0005	–
-0,00005	–
-0,000005	–

x	y
0,05	0,81725
0,005	0,93395
0,0005	0,97812
0,00005	0,99298
0,000005	0,99776

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

h) $f(0)$

x	y
8,8	0,25211
8,9	0,25105
8,95	0,25052
8,995	0,25005
8,9995	0,25001

x	y
9,2	0,24795
9,1	0,24897
9,05	0,24948
9,005	0,24995
9,0005	0,24999

i) $\lim\limits_{x \to 9^-} f(x)$

j) $\lim\limits_{x \to 9^+} f(x)$

k) $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$

l) $f(9) =$

convenons que pour désigner plus l'infini on écrira simplement ∞ tandis que pour désigner moins l'infini on écrira -∞

x	y
1 000	0,03065
10 000	0,00990
100 000	0,00315
1 000 000	0,00099
10 000 000	0,00003

m) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$

Lorsqu'on évalue la limite suivante

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

on étudie le comportement des images de la fonction pour des valeurs de x très près de a. *La valeur de a n'est jamais considérée dans notre étude*. Il n'est donc pas nécessaire que cette valeur fasse partie du domaine de la fonction pour que la limite existe.

Ainsi dans l'exemple précédent,

$$f(1) \text{ n'existe pas } (\nexists) \quad \text{mais} \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}\ .$$

On aura souvent l'occasion de constater que lorsque la variable x prend des valeurs près de a, la fonction s'approche de $f(a)$ l'image de a.

Si on se réfère à l'exemple précédent

$$f(9) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 9} f(x) = \frac{1}{4}\ .$$

Il sera toujours tentant lorsque l'image de la fonction existe en a de considérer l'image $f(a)$ comme valeur limite. *Attention ce n'est pas toujours le cas !*

Toujours dans l'exemple qui précéde

$$f(0) = 1 \quad \text{mais} \quad \lim_{x \to 0} f(x) \ \nexists\ ,$$

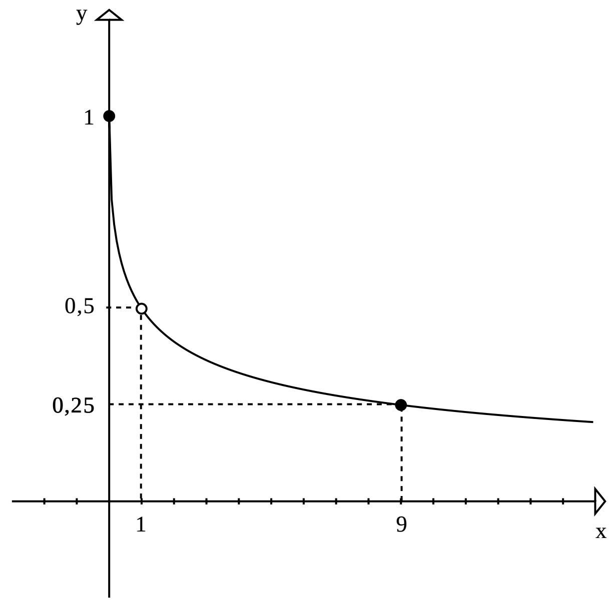
Finalement dans le dernier exemple, on a obtenu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Cette limite est différente des précédentes. On utilise le symbole ∞ pour signifier que la variable x prend des valeurs toujours de plus en plus grandes positivement. Étant donné que ∞ n'est pas un nombre réel, $f(\infty)$ n'a aucun sens pas plus que

$$\lim_{x \to \infty^-} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to \infty^+} f(x)$$

Examinons maintenant le graphique associé à la fonction définie par

$$y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$



En examinant ce graphique, il paraît évident que:

a) $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0{,}5 \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0{,}5 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0{,}5$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \quad \nexists \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) \quad \nexists$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = 0{,}25 \\ \\ \lim\limits_{x \to 9^+} f(x) = 0{,}25 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 9} f(x) = 0{,}25$

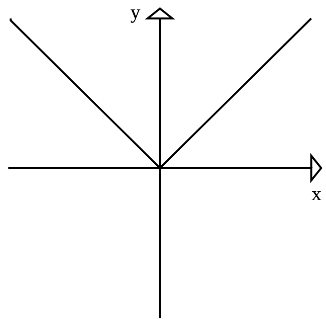
d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

exemple 1.1.2

Déterminer intuitivement chacune des limites.

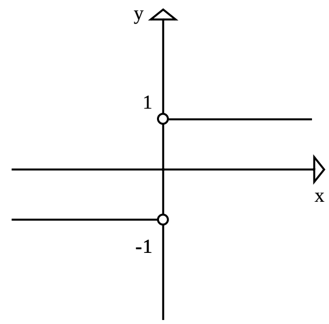
a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$f(x) = \sqrt{x^2}$



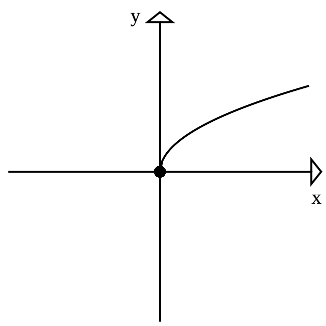
rép: a) 0 ; b) 0 ; c) 0

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$



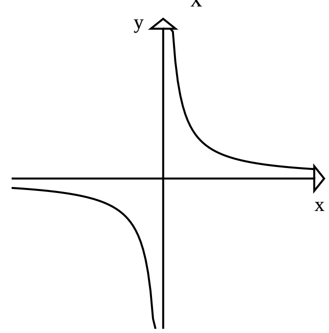
rép: a) 1 ; b) -1 ; c) $\nexists$

$f(x) = \sqrt{x}$



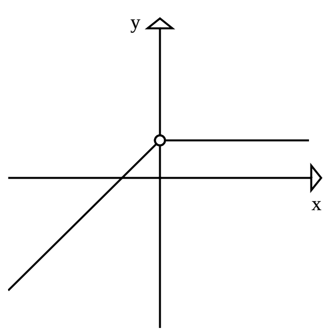
rép: a) 0 ; b) $\nexists$; c) $\nexists$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



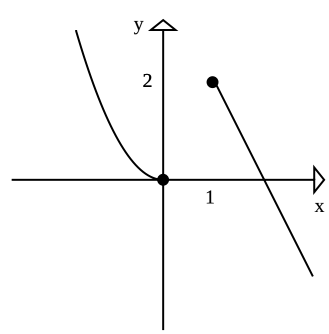
rép: a) ∞ ; b) $-\infty$; c) $\nexists$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



rép: a) 1 ; b) 1 ; c) 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ 4 - 2x & x \ge 1 \end{cases}$$



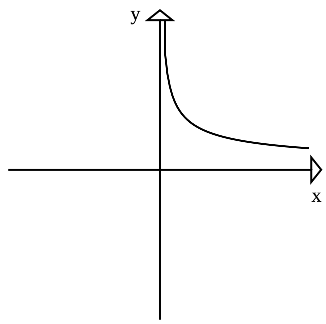
rép: a) $\nexists$; b) 0 ; c) $\nexists$

exemple 1.1.3

Déterminer intuitivement chacune des limites.

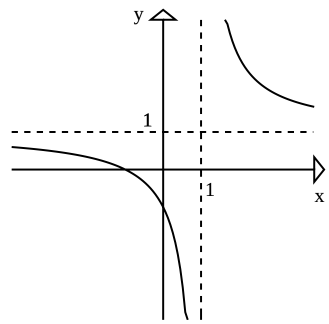
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$



rép: a) $\nexists$; b) 0

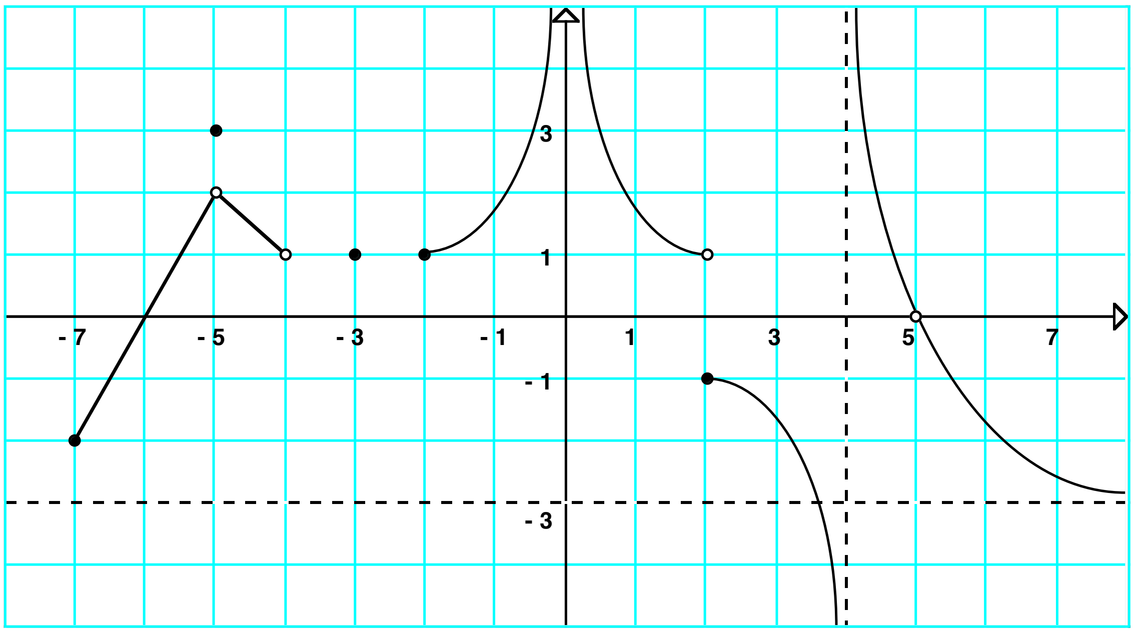
$f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$



rép: a) 1 ; b) 1

Exercices 1.1

1. Soit f une fonction ayant le graphique suivant.



Déterminer intuitivement chacune des limites.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

i) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$

j) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

l) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

m) $\lim\limits_{x \to -6} f(x)$

n) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

o) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

p) $\lim\limits_{x \to -7} f(x)$

q) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

r) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2. Soit $f(x) = x^x$.

a) En utilisant votre calculatrice compléter le tableau.

x	5	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)						

b) À l'aide du tableau précédent, estimer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

3. Soit $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$.

a) En utilisant votre calculatrice compléter les deux tableaux.

x	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
f(x)						

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
f(x)						

b) À l'aide des tableaux précédents, estimer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

4. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + x}$.

a) En utilisant votre calculatrice compléter les deux tableaux.

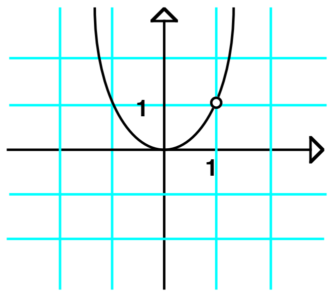
x	1	10	100	1 000	10 000
f(x)					

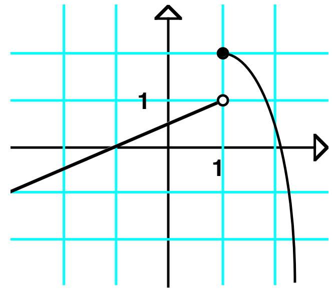
x	-1	-10	-100	-1 000	-10 000
f(x)					

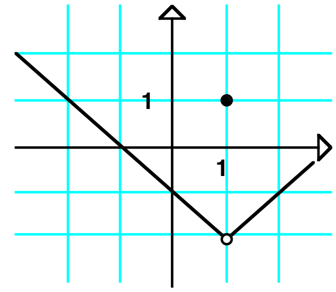
b) À l'aide des tableaux précédents, estimer $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

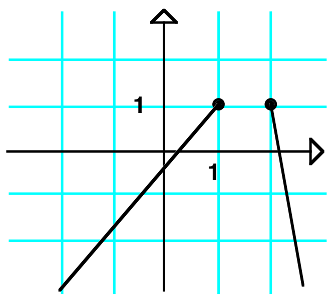
5. Pour chacune des fonctions f définies par les graphiques ci-dessous, déterminer (si possible):

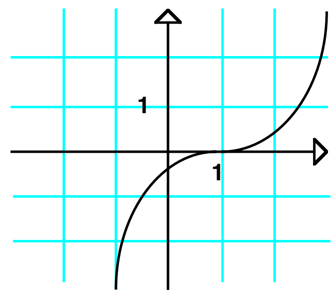
$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{et} \quad f(1)$$

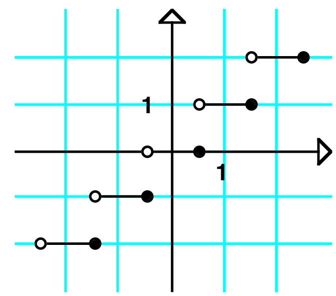
a)


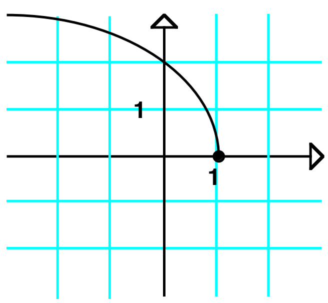
b)


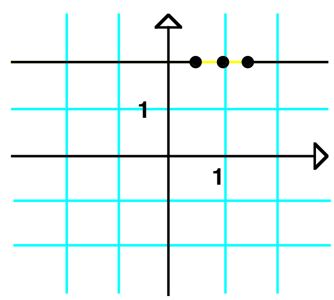
c)


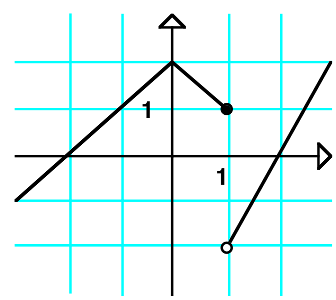
d)


e)


f)


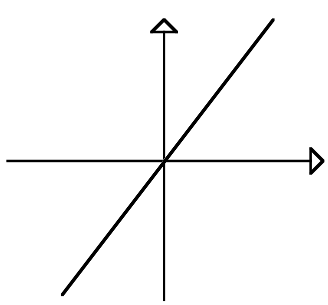
g)


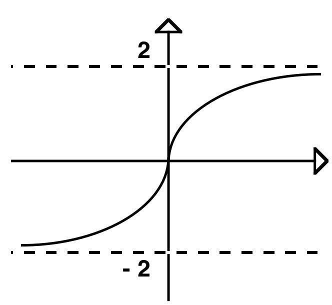
h)


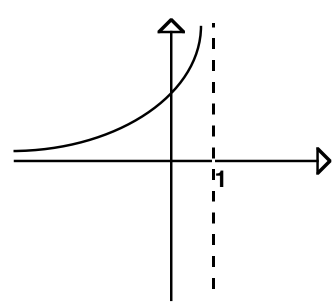
i)


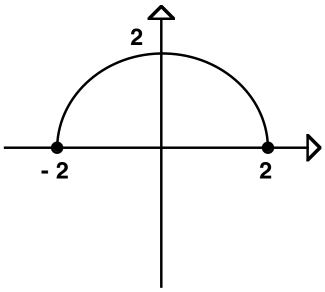
6. Pour chacune des fonctions f définies par les graphiques ci-dessous, déterminer (si possible):

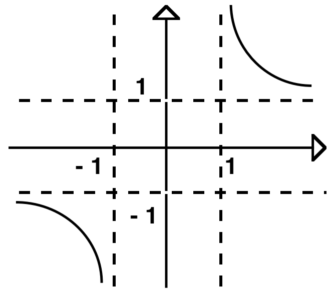
$$\lim_{x\to \infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

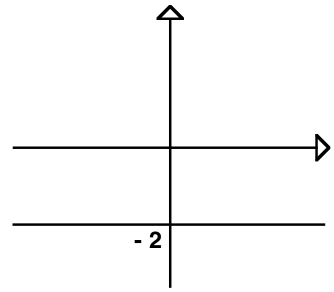
a)


b)


c)


d) 

e) 

f) 

7. Tracer le graphique de chacune des fonctions puis, évaluer les différentes limites en utilisant ce graphique.

   a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x - 2}$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f_1(x)$

   b) $f_2(x) = \dfrac{1}{x + 3} - 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} f_2(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x)$

   c) $f_3(x) = \sqrt{3 - x}$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f_3(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f_3(x)$, $\lim\limits_{x \to 3} f_3(x)$

   d) $f_4(x) = |x - 4| - 3$; $\lim\limits_{x \to 4} f_4(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f_4(x)$

   e) $f_5(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$; $\lim\limits_{x \to -2} f_5(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f_5(x)$

   f) $f_6(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ 1 - x & x > 0 \end{cases}$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f_6(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_6(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f_6(x)$

   g) $f_7(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 - 1 & x \leq 0 \\ \sqrt{x - 2} + 3 & x > 0 \end{cases}$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f_7(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_7(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f_7(x)$

Réponses aux exercices 1.1

1) a) -1
   b) 1
   c) ∄ (à gauche: 1 et à droite: -1)
   d) 1
   e) ∄ (à gauche: ∄ et à droite: 1)
   f) 1
   g) ∄ (à gauche: ∄ et à droite: ∄)
   h) 0
   i) 2
   j) ∞
   k) ∞
   l) ∞
   m) 0
   n) $-\infty$
   o) ∄ (à gauche: $-\infty$ et à droite: ∞)
   p) ∄ (à gauche: ∄ et à droite: -2)
   q) -3
   r) ∄ (pas définie à gauche de -7)

2 a)

x	5	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)	3125	1	0,7943	0,9550	0,9931	0,9991

b) 1

3 a)

x	2	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001
f(x)	7	4,75	3,31	3,0301	3,0030	3,0003

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
f(x)	1	1,75	2,71	2,9701	2,9970	2,9997

b) 3, 3, 3

4) a)

x	1	10	100	1 000	10 000
f(x)	-1,4142	-0,5382	-0,5038	-0,5004	-0,50004

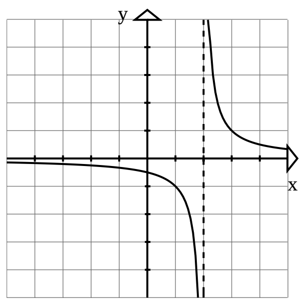
x	-1	-10	-100	-1 000	-10 000
f(x)	0	0,4630	0,4963	0,4996	0,49996

b) -0,5, 0,5

5) a) 1, ∄
   b) ∄ (à g: 1, à d: 2), 2
   c) -2, 1
   d) ∄ (à g: 1, à d: ∄), 1
   e) 0, 0
   f) 1, 1
   g) ∄ (à g: 0, à d: ∄), 0
   h) ∄ (à g: ∄, à d: ∄), 2
   i) ∄ (à g: 1, à d: -2), 1

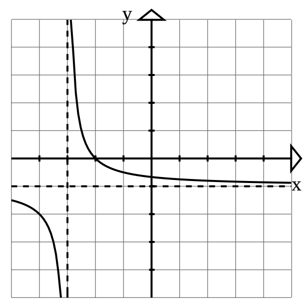
6) a) ∞, - ∞
   b) 2, -2
   c) ∄, 0
   d) ∄, ∄
   e) 1, -1
   f) -2, -2

7a)



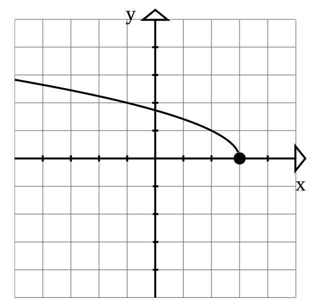
-∞ ; ∞ ; ∄

b)



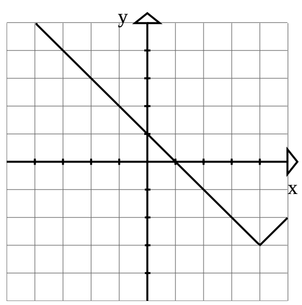
-1 ; -1

c)



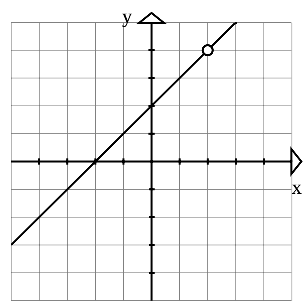
0 ; ∄ ; ∄

d)



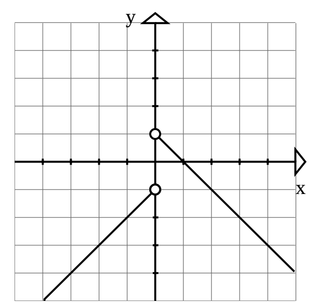
-3 ; 1

e)



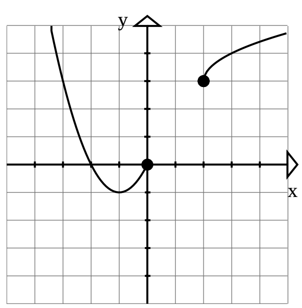
0 ; 4

f)



-1 ; 1 ; ∄

g)



0 ; ∄ ; 3

1.2 Règles sur l'évaluation des limites

Dans cette section, l'étude portera seulement sur des limites finies pour une valeur finie.

Dans la majorité des cas, le graphique de la fonction est trop compliqué à tracer. Il n'est donc pas possible de l'utiliser pour évaluer une limite. Il reste la possibilité d'étudier le comportement de la fonction en trouvant quelques images autour de la valeur considérée. Même à l'aide d'une calculatrice, ce genre de solution s'avère souvent inapplicable. Heureusement, il existe des règles faciles à utiliser qui permettront d'évaluer rapidement ces limites. Mais avant d'aborder ces règles donnons d'abord la définition formelle d'une limite.

définition 1.2.1

limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff$$

Pour tout voisinage de b, il existe un voisinage troué de a contenu dans le domaine de la fonction, tel que pour tout x du voisinage troué de a on a $f(x)$ dans le voisinage de b.

ou d'une façon symbolique

$$\big(\forall\, V(b)\big)\ \big(\exists\, V_o(a)\big)\ \big(x \in V_o(a) \Rightarrow f(x) \in V(b)\big)$$

symboles utilisés:

$\forall$ *: pour tout*

$\exists$ *: il existe*

définition 1.2.2

limite à gauche

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \iff$$

Pour tout voisinage de b, il existe un voisinage à gauche de a contenu dans le domaine de la fonction, tel que pour tout x du voisinage à gauche de a on a $f(x)$ dans le voisinage de b.

ou d'une façon symbolique

$$\big(\forall\, V(b)\big)\ \big(\exists\, V^-(a)\big)\ \big(x \in V^-(a) \Rightarrow f(x) \in V(b)\big)$$

définition 1.2.3

limite à droite

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b \iff$$

Pour tout voisinage de b, il existe un voisinage à droite de a contenu dans le domaine de la fonction, tel que pour tout x du voisinage à droite de a on a $f(x)$ dans le voisinage de b.

ou d'une façon symbolique

$$\big(\forall\, V(b)\big)\ \big(\exists\, V^+(a)\big)\ \big(x \in V^+(a) \Rightarrow f(x) \in V(b)\big)$$

exemple 1.2.1

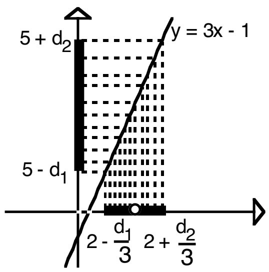
Démontrer à l'aide de la définition de la limite que

$$\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$$

---

d_1 et d_2 sont deux nombres réels positifs

Soit $V(5) =]\, 5 - d_1, 5 + d_2\, [$ un voisinage quelconque de 5.



On a $(3x - 1) \in V(5)$

$$\Leftrightarrow \quad 5 - d_1 < 3x - 1 < 5 + d_2$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 - d_1 < 3x < 6 + d_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6 - d_1}{3} < x < \frac{6 + d_2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - \frac{d_1}{3} < x < 2 + \frac{d_2}{3}$$

d'où si $x \in V_o(2) = \,]\, 2 - \frac{d_1}{3}, 2 + \frac{d_2}{3}\, [$

alors $f(x) \in V(5) = \,]\, 5 - d_1, 5 + d_2\, [$.

Puisque le voisinage de 5 est quelconque, on peut donc affirmer que pour tout voisinage de 5, il existe toujours un voisinage troué de 2 pour lequel, lorsque x se trouve dans le voisinage troué de 2, y se trouve dans le voisinage de 5. On vient donc de montrer que

$$\big(\forall\, V(5)\big)\ \big(\exists\, V_o(2)\big)\ \big(x \in V_o(2) \Rightarrow (3x - 1) \in V(5)\big)$$

par conséquent $\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$.

exemple 1.2.2

Démontrer à l'aide de la définition de la limite.

$$\lim_{x \to 1} (1 - 3x) = -2$$

En utilisant la définition de la limite, on peut démontrer le résultat suivant.

proposition 1.2.1

limite sur les fonctions linéaires

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b \qquad \text{où} \quad a, m \text{ et } b \text{ dans } \mathbf{R}$$

exemple 1.2.3

Évaluer $\lim_{x \to 1} (3x + 4)$

prop. 1.2.1

$$\lim_{x \to 1} (3x + 4) = 3(1) + 4$$
$$= 7$$

exemple 1.2.4

Évaluer

a) $\lim_{x \to -4} (1 - 2x)$

b) $\lim_{x \to 2} 3x$

la limite d'une constante est égale à la constante

c) $\lim_{x \to 0} 5$

d) $\lim_{x \to -1^+} (2x + 3)$

rép: a) 9 ; b) 6 ; c) 5 ; d) 1

proposition 1.2.2

propriétés des limites

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ $\quad$ (a, b et c $\in$ **R**)

alors a) $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = k \left(\lim\limits_{x \to a} f(x) \right) = k\,b$ $\quad$ (k $\in$ **R**)

b) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x) \big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \pm c$

c) $\lim\limits_{x \to a} f(x)\, g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x) = b\,c$

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}$ $\quad$ ($c \neq 0$)*

exemple 1.2.5

Évaluer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 1}{3 - x}$

rép: 3

La proposition précédente s'applique aussi lorsque la somme, la différence ou le produit contient plus de deux fonctions.

exemple 1.2.6

Évaluer $\lim\limits_{x \to -3} 3(5 + 2x)^3$

rép: -3

* On verra à la section 3, que si $c = 0$ et $b \neq 0$ alors la limite n'existe pas dans **R** puis, à la section 4, que si $c = 0$ et $b = 0$ alors la limite peut exister dans **R**.

exemple 1.2.7

Évaluer $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 4x - 3)$

---

prop. 1.2.2 b)

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 + 4x - 3) = \lim_{x \to 1} 2x^2 + \lim_{x \to 1} 4x - 3$$

$$= \lim_{x \to 1} (2x)(x) + \lim_{x \to 1} (4x - 3)$$

prop. 1.2.2 c)

$$= \lim_{x \to 1} 2x \,.\, \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} (4x - 3)$$

prop. 1.2.1

$$= 2 \,.\, 1 + 1 = 3$$

Les fonctions polynomiales sont de la forme

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_1 x + c_0 \;, \; (n \in \mathbf{N})$$

Ce type de fonction est donc constitué de sommes et de produits de formes linéaires. L'évaluation d'une limite sur ce type de fonction pourra donc se faire par substitution directe en utilisant les deux dernières propositions.

proposition 1.2.3

limite sur les fonctions polynomiales

Si P est une fonction polynomiale alors

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

exemple 1.2.8

Évaluer $\lim\limits_{x \to 2} (2x^3 + 3x^2 - 5x - 7)$

---

prop. 1.2.3

$$\lim_{x \to 2} (2x^3 + 3x^2 - 5x - 7) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - (5)(2) - 7$$

$$= 11$$

exemple 1.2.9

Évaluer $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^4 + 1}$

rép: -2

proposition 1.2.4

limite sur les fonctions puissances

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ alors

a) $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x)\big)^n = \Big(\lim\limits_{x \to a} f(x)\Big)^n = b^n$

b) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$ sauf si n est pair et $b \leq 0$.

(a, b sont dans **R** et n est un entier positif)

exemple 1.2.10

Évaluer $\lim\limits_{x \to -2} (4 + 3x)^4$

---

prop. 1.2.4

$$\lim_{x \to -2} (4 + 3x)^4 = \Big(\lim_{x \to -2} (4 + 3x)\Big)^4$$

prop. 1.2.3

$$= (-2)^4$$

$$= 16$$

exemple 1.2.11

Évaluer $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{3x + 2}$

---

prop. 1.2.4

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{3x + 2} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 2} (3x + 2)}$$

prop. 1.2.3

$$= \sqrt[3]{8}$$

$$= 2$$

exemple 1.2.12

Évaluer $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2x^2 - 1}$

rép: 1

exemple 1.2.13

Évaluer $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3 - \sqrt[4]{1 + 3x}}{(x^2 - 4x + 1)^2}$

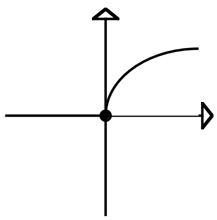
rép: 1/36

1**er* ***cas d'exception

la forme $\sqrt[\text{pair}]{\mathbf{0}}$

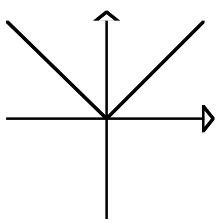
provenant d'une limite

$$\sqrt[\text{pair}]{0} = \begin{cases} \sqrt[\text{pair}]{0^+} = 0 \\ \sqrt[\text{pair}]{0^-} \quad \nexists \end{cases}$$



$f(x) = \sqrt{x}$

figure 1.2.1



$f(x) = \sqrt{x^2}$

figure 1.2.2

Pour bien saisir cette règle, évaluons les deux limites suivantes à l'aide des graphiques puis ensuite à l'aide de la proposition 1.2.4.b)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2}$

Intuitivement à l'aide du graphique, il semble évident (voir les figures 1.2.1 et 1.2.2) que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} \quad \nexists \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \sqrt{x^2} = 0$$

Si on utilisait la proposition 1.2.4b), on aurait,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to 0} x} = \sqrt{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2} = \sqrt{\lim_{x \to 0} x^2} = \sqrt{0}$$

En comparant avec les réponses obtenues graphiquement, il est clair que la première réponse n'existe pas tandis que la seconde correspond à 0. Compte tenu que dans les deux cas on a obtenu le même résultat en appliquant la proposition 1.2.4 b), comment déterminer chacune des réponses?

En fait lorsqu'on obtient $\sqrt{0}$ comme réponse, on doit aller voir ce que devient la limite à gauche et à droite de 0. Ainsi

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x} = \sqrt{0^-} \quad \nexists \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0^+} = 0 \end{cases}$$

Par conséquent $\quad \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \quad \nexists$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x^2} = \sqrt{(0^-)^2} = \sqrt{0^+} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x^2} = \sqrt{(0^+)^2} = \sqrt{0^+} = 0 \end{cases}$$

Donc $\quad \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2} = 0$

exemple 1.2.14

Évaluer $\lim\limits_{x \to 3} \left(2x - 1 + \sqrt{3 - x}\right)$

En utilisant les propositions 1.2.2 b), 1.2.3 et 1.2.4 b) on obtient

$$\lim_{x \to 3} \left(2x - 1 + \sqrt{3 - x}\right) = 6 - 1 + \sqrt{3 - 3} = 5 + \sqrt{0}$$

$\sqrt{0}$ peut aussi bien valoir 0 que ne pas exister dans les réels. On doit donc procéder par la gauche et par la droite.

$$\lim_{x \to 3^-} \left(2x - 1 + \sqrt{3 - x}\right) = 6 - 1 + \sqrt{3 - 3^-} = 5 + \sqrt{0^+} = 5$$

$$\lim_{x \to 3^+} \left(2x - 1 + \sqrt{3 - x}\right) = 6 - 1 + \sqrt{3 - 3^+} = 5 + \sqrt{0^-} \quad \nexists$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3} \left(2x - 1 + \sqrt{3 - x}\right) \quad \nexists$$

exemple 1.2.15

Évaluer $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt[4]{(x- 5)^2} + 3$

---

rép: 3

exemple 1.2.16

Évaluer $\lim\limits_{x \to -1^-} \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}}$

$$\lim_{x \to -1^-} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{2x - 3}} = \sqrt{\frac{1^+ - 1}{-2 - 3}}$$

$$= \sqrt{\frac{0^+}{-5}}$$

$$= \sqrt{0^-} \quad \nexists$$

exemple 1.2.17

Évaluer $\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{4 - x^2}$

---

rép: $\nexists$

Évaluation d'une limite sur une fonction en branches.

exemple 1.2.18

Soit $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x < 2 \\ x & x > 2 \end{cases}$$

Évaluer les limites suivantes (si elles existent dans **R**).

a) $\lim_{x \to 1} f(x)$ c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

b) $\lim_{x \to -2} f(x)$ d) $\lim_{x \to 2} f(x)$

---

a) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (1 - x) = 1 - 1 = 0$

b) $\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x^2 + 1) = 4 + 1 = 5$

c) $$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

d) $$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} (1 - x) = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \to 2^+} x = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) \; \nexists$

Exercices 1.2

1. Démontrer à l'aide de la définition de la limite.

   a) $\lim_{x \to -2} (4x + 9) = 1$

   b) $\lim_{x \to 3} (5 - 3x) = -4$

2. Évaluer les limites suivantes (si elles existent dans **R**) en justifiant chacune des étapes à l'aide des propriétés et de la règle ci-dessous.

> Propriété 1: La limite d'une constante multipliée par une fonction est égale à la constante multipliée par la limite de la fonction si cette dernière limite existe.
> Propriété 2 : La limite d'une somme est égale à la somme des limites si ces dernières limites existent.
> Propriété 3: La limite d'une différence est égale à la différence des limites si ces dernières limites existent.
> Propriété 4: La limite d'un produit est égale au produit des limites si ces dernières limites existent.
> Propriété 5: La limite d'un quotient est égale au quotient des limites si ces dernières limites existent et si la limite au dénominateur est différente de zéro.
>
> Règle 1: La limite d'une fonction polynomiale est égale à l'image.

a) $\lim_{x \to 2} (3x + 1)$

e) $\lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^2 - 8x + 3)$

i) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{3x^2}{1 + x^3}$

b) $\lim_{x \to -5} 2x$

f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2}{3 - x}$

j) $\lim_{x \to 0^-} (x + 4)^{-2}$

c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{2}$

g) $\lim_{x \to 3} \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 1)(x + 2)}$

k) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3}{x(x - 2)} + 5$

d) $\lim_{x \to -1^-} (2x + 3)$

h) $\lim_{x \to 0} (x^2 - 4x + 3)^3$

l) $\lim_{x \to -4^+} \dfrac{x + 4}{x^2}$

3. Évaluer les limites suivantes (si elles existent dans **R**)

a) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2 + 2x + 4}$

b) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{2 - 5x}$

c) $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{3 - x}$

f) $\lim\limits_{x \to -1^+} \sqrt{1 - x^2}$

g) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\sqrt{x - 3}\right)^2$

h) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{(x - 3)^2}$

i) $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x - 2}}$

j) $\lim\limits_{x \to 4^-} \left(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x - 4}\right)$

k) $\lim\limits_{x \to -3} 4\sqrt[3]{1 + 3x} - x\sqrt{x^2 - 5}$

l) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[4]{\dfrac{4x^3}{3x - 4}}$

m) $\lim\limits_{x \to -4} \sqrt[5]{(x + 3)^3}$

n) $\lim\limits_{x \to -1^-} \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

o) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{3x - 1} + \sqrt{x - 3}}{x + 1}$

4. Soit $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ 2 - x^2 & x > 1 \end{cases}$

Évaluer les limites suivantes (si elles existent dans **R**).

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

5. Soit $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 2} & x < 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} & x > 2 \end{cases}$

Évaluer les limites suivantes (si elles existent dans **R**).

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

6. Soit $f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{(x + 4)^2} & x \leq 0 \\ x^2 + x - 5 & 0 < x < 2 \\ \sqrt{3 - x} & x > 2 \end{cases}$

Évaluer les limites suivantes (si elles existent dans **R**).

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Réponses aux exercices 1.2

1.

2. a) 7 (R1)
   b) -10 (R1)
   c) $\frac{1}{2}$ (R1)
   d) 1 (R1)
   e) 10 (R1)
   f) 10 (P5, R1)
   g) 0 (P5, P4, R1)
   h) 27 (P4, R1)
   i) $\frac{3}{2}$ (P5, R1)
   j) $\frac{1}{16}$ (P5, P4, R1)
   k) 4 (P2, P5, P4, R1)
   l) 0 (P5, R1)

3. a) 2
   b) -2
   c) $\nexists$
   d) 0
   e) $\nexists$ (à gauche: 0 et à droite: $\nexists$)
   f) 0
   g) $\nexists$ (à gauche: $\nexists$ et à droite: 0)
   h) 0
   i) $\nexists$
   j) $\nexists$
   k) -2
   l) 2
   m) -1
   n) 0
   o) $\nexists$ (à gauche: $\nexists$ et à droite: $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

4. a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

5. a) 2
   b) $\nexists$ (à gauche: 2 et à droite: 0)
   c) 0
   d) $\nexists$

6. a) $\nexists$ (à gauche: 0 et à droite: $\nexists$)
   b) 0
   c) $\nexists$ (à gauche: 2 et à droite: -5)
   d) 1

1.3 Limite infinie et limite à l'infini

À la section précédente, l'étude des limites a été faite sur l'ensemble des nombres réels. Il s'agissait de limites finies en une valeur finie. On poursuit maintenant notre étude sur les limites en considérant deux nouveaux types.

a) limite à l'infini $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$,

b) limite infinie: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Pour résoudre ces limites, on utilisera l'ensemble élargi

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

Notons d'abord que les propositions de la section précédente sont également valables sur $\mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Mais attention la notion d'existence d'une limite n'est pas la même que sur **R** . Nous avons vu que sur **R** une limite existe lorsque celle-ci correspond à un nombre réel.

conditions d'existence d'une limite sur $\overline{\mathbf{R}}$

Sur $\overline{\mathbf{R}}$ nous dirons qu'une limite existe si cette limite correspond à *un nombre réel*, à $-\infty$ ou à ∞.

Ainsi,

$\lim_{x \to \infty} x = \infty$ (cette limite existe sur $\overline{\mathbf{R}}$ mais n'existe pas sur **R**)

$$\lim_{x \to -\infty} (3x + 7) = 3(-\infty) + 7 = ?$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 - x} = \frac{\infty}{1 - \infty} = ?$$

Même s'il est possible d'utiliser les propositions de la section précédente, un problème de taille se présente. Que devient

$$3(-\infty) + 7 \quad \text{ou encore} \quad \frac{\infty}{1 - \infty} \quad ?$$

Le problème découle du fait que ∞ et $-\infty$ ne sont pas des nombres réels. Lorsqu'on effectue une somme, une différence, un produit, un quotient, une puissance ou une racine avec ces symboles, on ne peut pas utiliser les mêmes règles que sur les réels. On utilise plutôt les règles suivantes.

opérations sur $\overline{\mathbb{R}}$

"c" est une constante réelle positive

"n" est un entier positif

addition et soustraction	multiplication	division	racine et puissance
$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{\pm c}{\infty} = 0$	$\sqrt[n]{\infty} = \infty$
$-\infty - \infty = -\infty$	$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$	$\frac{\pm c}{-\infty} = 0$	$\sqrt[\text{pair}]{-\infty}$ $\nexists$
$\infty + c = \infty$	$(-\infty) \cdot (\infty) = -\infty$	$\frac{\infty}{c} = \infty$	$\sqrt[\text{impair}]{-\infty} = -\infty$
$-\infty + c = -\infty$	$c \cdot \infty = \infty$	$\frac{-\infty}{c} = -\infty$	$\infty^n = \infty$
$\infty - c = \infty$	$c \cdot (-\infty) = -\infty$	$\frac{\infty}{(-c)} = -\infty$	$(-\infty)^{\text{pair}} = \infty$
$-\infty - c = -\infty$	$(-c) \cdot \infty = -\infty$	$\frac{-\infty}{(-c)} = \infty$	$(-\infty)^{\text{impair}} = -\infty$
	$(-c) \cdot (-\infty) = \infty$		

formes indéterminées

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad ; \quad \infty - \infty \quad ; \quad -\infty + \infty \quad ; \quad (\pm\infty) \cdot 0$$

Le dernier tableau contient plusieurs expressions qualifiées de *formes indéterminées*. Disons seulement que si, après avoir évalué une limite, on obtient une de ces expressions alors un problème plus sérieux se posera. Ces expressions ne donnent pas toujours la même réponse, d'où l'appellation de forme indéterminée. Dans ces cas, on devra utiliser des méthodes différentes de solution. Pour l'instant, lorsqu'on rencontrera de telles expressions, on se contentera d'écrire simplement IND. (pour indétermination). L'étude des formes indéterminées fera l'objet de la prochaine section.

exemple 1.3.1

Évaluer $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^2 - x + 5)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} (3x^2 - x + 5) &= 3(-\infty)^2 - (-\infty) + 5 \quad \text{(prop. 1.2.3)} \\ &= 3(\infty) + \infty + 5 \\ &= \infty + \infty + 5 \\ &= \infty + 5 \\ &= \infty\end{aligned}$$

exemple 1.3.2

Évaluer $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - x}{2x}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - x}{2x} = \frac{1 - \infty}{2(\infty)}$$

$$= \frac{-\infty}{\infty} \quad \text{(IND.)}$$

exemple 1.3.3

Évaluer $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 + 3x - 4)$

---

rép: $-\infty$

exemple 1.3.4

Évaluer $\lim\limits_{x \to -\infty} x(x^5 - 1)$

---

rép: ∞

exemple 1.3.5

Évaluer $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - x}$

---

rép: ∞

exemple 1.3.6

Évaluer $\lim\limits_{x \to \infty} (10 - 5x + x^3)$

---

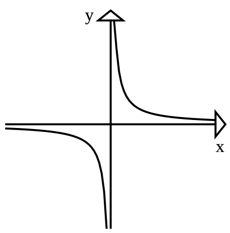
rép: $-\infty + \infty$ IND.

2ᵉ cas d'exception

la forme $\frac{1}{0}$

provenant d'une limite

$$\frac{1}{0} = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{quantité très petite positive}} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \\ \dfrac{1}{\text{quantité très petite négative}} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



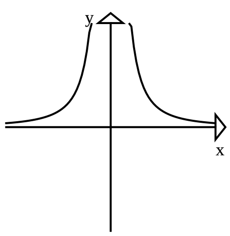
$f(\mathrm{x}) = \dfrac{1}{\mathrm{x}}$

figure 1.3.1

On se souvient que sur les réels l'expression 1/0 n'existe pas. Il peut en être autrement lorsque l'expression provient d'une limite. Dans ce cas le dénominateur s'approche de la valeur 0. C'est en fait une valeur limite qui ne sera jamais atteinte. Il est donc légitime de considérer cette quantité comme étant infiniment petite et pouvant aussi bien être positive que négative.

Comme pour le 1ᵉʳ cas d'exception, évaluons les deux limites qui suivent d'abord intuitivement à l'aide de graphiques puis, en utilisant les propositions.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$



$f(\mathrm{x}) = \dfrac{1}{\mathrm{x}^2}$

figure 1.3.2

À l'aide du graphique, il paraît évident (voir les figures 1.3.1 et 1.3.2) que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

En utilisant les propositions, on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0}$$

Si on compare les réponses obtenues à l'aide des graphiques, il est clair que le premier résultat 1/0 n'existe pas tandis que le second résultat 1/0 correspond à l'infini. Comme pour le premier cas d'exception lorsqu'on obtient 1/0 on doit évaluer les limites à gauche et à droite de 0 pour déterminer la réponse. Ainsi

$\dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\dfrac{1}{0^+} = \infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \nexists$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(0^-)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{(0^+)^2} = \dfrac{1}{0^+} = \infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

exemple 1.3.7

Évaluer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(1 - x)^2}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - 1)^2} = \frac{1}{0}$$

On doit donc évaluer les limites à gauche et à droite.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - 1^-)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - 1^+)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{1}{(1 - x)^2} = \infty$$

exemple 1.3.8

Évaluer $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3}{(x - 5)^3}$

rép: $\nexists$ (à droite: ∞ et à gauche: $-\infty$)

exemple 1.3.9

Évaluer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1 - x}{(x - 3)^4}$

rép: $-\infty$

exemple 1.3.10

Évaluer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x}{\sqrt{2 - x}}$

rép: $\nexists$ (à droite: $\nexists$ et à gauche: ∞)

exemple 1.3.11

Évaluer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 5}{x^2(x^3 + 7)}$

rép: $-\infty$

Exercices 1.3

1. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 + 5x - 10)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + x + 4)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 5x + 6)$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2(x - 4)$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2(4 - x)$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3(x^2 - 1)$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3(x + 1)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \sqrt{4 - x}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x + 4)$

j) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{2}{x - 4}$

k) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{2}{x - 4}$

l) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2}{x - 4}$

m) $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{-2}{\sqrt{x - 4}}$

n) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{-2}{\sqrt{x - 4}}$

o) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2}{\sqrt{(x - 4)^2}}$

p) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{-2}{\sqrt{4 - x}}$

q) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3 - 2x}{(x - 3)^2}$

r) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x - 3}{2x - 3}$

s) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x - 4}$

t) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x - 4}$

u) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2}{\sqrt{x - 4}}$

v) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2}{\sqrt{4 - x}}$

w) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x - 4}$

x) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x}{1 - x^2}$

y) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{6 - x^3}$

z) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x}$

Réponses aux exercices 1.3

1. a) ∞
   b) $-\infty$
   c) $\infty - \infty$ IND.
   d) ∞
   e) $-\infty$
   f) $-\infty$
   g) ∞
   h) $-\infty$
   i) $-\infty + \infty$ IND.
   j) ∞
   k) $-\infty$
   l) $\nexists$ (à gauche: $-\infty$ et à droite: ∞)
   m) $\nexists$
   n) $-\infty$
   o) ∞
   p) $\nexists$
   q) $-\infty$
   r) 0
   s) 0
   t) 0
   u) 0
   v) $\nexists$
   w) $-\infty$
   x) $\dfrac{\infty}{-\infty}$ IND.
   y) 0
   z) $-\infty$

1.4 Formes indéterminées

On complète le chapitre sur les limites avec l'étude des formes indéterminées. Les expressions qui ont été qualifiées de formes indéterminées sont:

nous limiterons notre étude à quatre formes indéterminées bien qu'il en existe d'autres

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \quad ; \quad (\infty - \infty) \text{ ou } (-\infty + \infty) \quad ; \quad 0\,(\pm\infty)\,.$$

Lorsqu'on obtient l'une ou l'autre de ces expressions à la suite de l'évaluation d'une limite, le résultat ne correspond pas à une valeur particulière d'où l'appellation de forme indéterminée. Pour obtenir la valeur associée à une forme indéterminée, c'est-à-dire pour <u>lever l'indétermination</u>, il suffit en général de transformer la fonction sur laquelle porte la limite.

indétermination $\boxed{\frac{0}{0}}$

Afin de mieux saisir ce concept, évaluons la limite suivante.

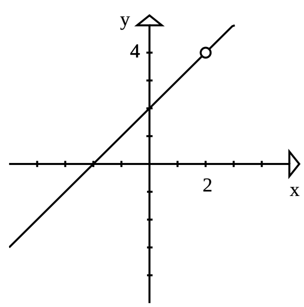
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

À l'aide des règles sur les limites, on obtient

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$$

Ce résultat n'a aucun sens ni dans $\mathbf{R}$, ni dans $\overline{\mathbf{R}}$. Abordons le problème autrement en faisant appel d'abord au graphique de la fonction puis, à la calculatrice.

2 ne fait pas partie du domaine de la fonction (cette valeur annule le dénominateur)



x	1,9	1,99	1,999
f(x)	3,9	3,99	3,999

x	2,1	2,01	2,001
f(x)	4,1	4,01	4,001

Il semble évident en examinant le graphique de gauche et les tableaux de droite que pour des valeurs de plus en plus près de $x = 2$ la fonction présente des images de plus en plus près de $y = 4$. On admet donc que

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Comment pourrait-on obtenir cette réponse algébriquement sans graphique ou calculatrice ?

La réponse est simple.

Puisque $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{x - 2}}$

$= (x + 2)$ si $x \neq 2$

$\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = (x + 2)$ *pour tout x dans un voisinage troué de 2*

Alors $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2)$

$= 4$

exemple 1.4.1

Évaluer $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{3x^2 - 5x - 12}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{3x^2 - 5x - 12} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 2)}{\cancel{(x - 3)}(3x + 4)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x + 2}{3x + 4}$$

$$= \frac{5}{13}$$

exemple 1.4.2

Évaluer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{x - 2}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ IND.}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{x - 2} \cdot \frac{1 + \sqrt{x^2 - 3}}{1 + \sqrt{x^2 - 3}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1 - (x^2 - 3)}{(x - 2)(1 + \sqrt{x^2 - 3})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{(x - 2)(1 + \sqrt{x^2 - 3})}$$

$4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$
$= -(x - 2)(x + 2)$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}(1 + \sqrt{x^2 - 3})}$$

$$= -2$$

exemple 1.4.3

Évaluer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{2 - x} - x}$

rép: $-\dfrac{4}{3}$

exemple 1.4.4

Évaluer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{1 - \sqrt{x}}$

rép: 1

exemple 1.4.5

Évaluer $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1 + \dfrac{4}{3x + 2}}{x^3 + 8}$

rép: $-\dfrac{1}{16}$

méthode générale pour lever une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dfrac{0}{0}$ IND.

On simplifie le ou les facteurs contribuant à l'annulation du numérateur et du dénominateur.

Ces facteurs ont toujours la forme $(x - a)$ ou $(a - x)$.

Il peut être nécessaire d'exprimer le numérateur ou le dénomi-nateur à l'aide d'un dénominateur commun ou de multiplier le numérateur et le dénominateur de la fonction par un conjugué de façon à obtenir un quotient.

indétermination $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$

Penchons-nous maintenant sur le problème suivant:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{5 + x} .$$

les formes $\dfrac{-\infty}{\infty}$, $\dfrac{\infty}{-\infty}$ *ou* $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ *font partie de la même catégorie d'indétermination*

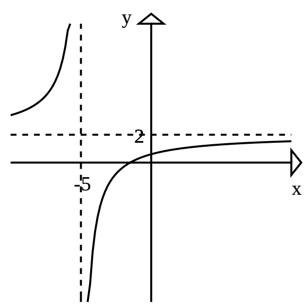
À l'aide des règles sur les limites, on obtient

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{5 + x} = \frac{2(\infty) + 3}{5 + \infty} = \frac{\infty}{\infty} .$$

Ce résultat est un nouveau cas de forme indéterminée. Faisons de nouveau appel au graphique et à la calculatrice pour avoir une idée de la réponse du problème.

pour tout $x \neq -5$

$$\frac{2x + 3}{5 + x} = 2 - \frac{7}{x + 5}$$



x	10	100	1000
$f(x)$	1,53	1,93	1,993

Lorsque la valeur de x augmente la fonction prend des valeurs de plus en plus près de $y = 2$. Il semble que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{5 + x} = 2$$

Algébriquement il est possible de retrouver cette quantité. Il suffit de transformer la fonction de façon à ce que les quantités qui apparaissent au numérateur et au dénominateur n'augmentent pas indéfiniment lorsque x augmente. Une façon d'y arriver est de diviser les termes du numérateur et les termes du dénominateur par la variable affectée de la puissance la plus élevée qui apparaît au dénominateur.

Puisque $$\frac{2x + 3}{5 + x} = \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{5}{x} + \frac{x}{x}} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{5}{x} + 1} \qquad x \neq 0$$

Alors $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3}{5 + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{5}{x} + 1}$$

$$= \frac{2 + \frac{3}{\infty}}{\frac{5}{\infty} + 1} = 2$$

exemple 1.4.6

Évaluer $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 + 1}$

---

on divise les termes du numérateur et les termes du dénominateur par la variable affectée de la puissance la plus élevée qui apparaît au dénominateur

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND.}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{3 + \frac{1}{\infty}}$$

$$= \frac{2 + 0 + 0}{3 + 0}$$

$$= \frac{2}{3}$$

exemple 1.4.7

Évaluer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3}{5 + 4x + 7x^3}$

rép: 0

exemple 1.4.8

Évaluer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x + 1}{2x - \sqrt{x^2 - 5}}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 1}{2x - \sqrt{x^2 - 5}} = \frac{-\infty}{-\infty} \quad \text{IND.}$$

la puissance de la variable la plus élevée du dénominateur est 1 puisque $x^2 - 5$ est sous un radical

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{5}{x^2}\right)}}{x}}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{|x|\sqrt{1 - \frac{5}{x^2}}}{x}}$$

$|x| = -x$ *lorsque* $x < 0$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{(-x)\sqrt{1 - \frac{5}{x^2}}}{x}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 + \sqrt{1 - \frac{5}{x^2}}}$$

$$= \frac{3 + \frac{1}{-\infty}}{2 + \sqrt{1 - \frac{5}{\infty}}}$$

$$= \frac{3 + 0}{2 + 1}$$

$$= 1$$

exemple 1.4.9

Évaluer $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x + 5}{x + \sqrt{x^2 - 7}}$

rép: 3

exemple 1.4.10

Évaluer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - 2x}{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{9x^2 - 1}}$

rep; $\dfrac{2}{5}$

exemple 1.4.11

Évaluer $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{(1+4x)^2 + 5}{(3x-1)(3x+4)}}$

rép: $\frac{4}{3}$

exemple 1.4.12

Évaluer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x}{x + \sqrt{x^2+1}}$

la méthode de solution est la même pour des indéterminations de la forme

$\frac{\infty - \infty}{\pm\infty}$; $\frac{\pm\infty}{\infty - \infty}$; $\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty}$ ...

rép: ∞

méthode générale pour lever une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$

Si $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ IND. $\quad (a \in \overline{\mathbf{R}})$

on divise les termes du numérateur et les termes du dénominateur de la fonction par la variable affectée de la puissance la plus élevée qui apparaît au dénominateur. On utilise la même méthode dans le cas d'une indétermination de la forme:

$$\frac{\infty - \infty}{\pm\infty} \quad ; \quad \frac{\pm\infty}{\infty - \infty} \quad ; \quad \frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \quad \ldots$$

indétermination

$\infty - \infty$

la forme

$-\infty + \infty$

fait partie de la même catégorie d'indétermination

Considérons la limite suivante,

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x + 2) .$$

En utilisant les règles sur les limites, on obtient

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x + 2) = (\infty)^2 - \infty + 2 = \infty - \infty .$$

Il est inutile de faire appel au graphique ou à la calculatrice dans ce cas-ci. Puisque le premier terme est au carré, il augmente beaucoup plus rapidement que le deuxième terme. Il paraît évident que la différence entre le premier et le deuxième terme ira constamment en augmentant (le dernier terme demeure constant). Il semble que

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x + 2) = \infty$$

Il est possible d'obtenir ce résultat algébriquement de la façon suivante.

$$x^2 - x + 2 = x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \qquad x \neq 0$$

Donc
$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty} (x^2 - x + 2) &= \lim_{x \to \infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \\ &= (\infty)^2\left(1 - \frac{1}{\infty} + \frac{2}{(\infty)^2}\right) \\ &= \infty\,(1 - 0 + 0) \\ &= \infty\end{aligned}$$

La réponse dépend uniquement du terme dont la puissance est la plus élevée. Les autres termes agissent très peu dans le résultat. Le raisonnement est le même pour toute fonction polynomiale et d'une façon générale, on retient la règle suivante.

proposition 1.4.1

limite à l'infini d'une fonction polynomiale

$$\lim_{x \to \pm\infty} (c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0) = \lim_{x \to \pm\infty} c_n x^n$$

exemple 1.4.13

Évaluer $\lim_{x \to -\infty} (3x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 7)$

---

prop. 4.1.1

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -\infty} (3x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 7) &= \lim_{x \to -\infty} 3x^5 \\ &= 3(-\infty)^5 \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Lorsque la fonction n'est pas une fonction polynomiale et que le problème s'y prête, il peut être utile de convertir cette fonction en quotient à l'aide du conjugué d'un des termes. En faisant ce genre de transformation l'indétermination peut changer de forme et devenir $\pm\infty/\pm\infty$. On poursuivra en divisant chaque terme du numérateur et du dénominateur par la puissance de la variable la plus élevée au dénominateur.

exemple 1.4.14

Évaluer $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \sqrt{(\infty^2)+\infty} - \infty$$

$$= \infty - \infty \quad \text{IND.}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x \;.\; \frac{\sqrt{x^2+x} + x}{\sqrt{x^2+x} + x} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{IND.}$$

$\sqrt{x^2+x} =$

$\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$

$|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} + \frac{x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

$|x| = x$ lorsque $x > 0$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

exemple 1.4.15

Évaluer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{3x^2 + x - 2} \right)$

rép: $-\infty$

exemple 1.4.16

Évaluer $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$

rép: $-\infty$

méthode générale pour lever une indétermination du type $\infty - \infty$

on tente de transformer la fonction en un produit ou en un quotient

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = (\infty - \infty)$ ou $(-\infty + \infty)$ IND. $(a \in \overline{\mathbf{R}})$

et si le problème s'y prête,

a) on utilise la proposition 4.1.1 (limite à l'infini d'une fonction polynomiale),
b) on multiplie le numérateur et le dénominateur de la fonction par un conjugué puis dans certains cas on devra diviser les termes du numérateur et les termes du dénominateur de la fonction par la variable affectée de la puissance la plus élevée qui apparaît au dénominateur,
c) on exprime la fonction à l'aide d'un dénominateur commun.

indétermination

$\boxed{\mathbf{0\ (\infty)}}$

la forme

$0\ (-\infty)$

fait partie de la même catégorie d'indétermination

Ce dernier type d'indétermination peut être levé en transformant la fonction (souvent à l'aide d'un dénominateur commun) afin d'obtenir une autre forme d'indétermination. On poursuivra ensuite en utilisant les méthodes qui ont été proposées pour lever ce type d'indétermination.

Par exemple évaluons $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{2}{x-4} + \dfrac{1}{x+2}\right)$

On obtient

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{2}{x-4} + \frac{1}{x+2}\right) = (\infty)\left(\frac{2}{\infty-4} + \frac{1}{\infty+2}\right)$$

$$= \infty\,.\,0$$

En exprimant à l'aide d'un dénominateur commun l'expression dans la parenthèse on aura

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{2(x+2)\ +\ (x-4)}{(x-4)(x+2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{(x-4)(x+2)}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{IND.}$$

On continue en divisant chacun des termes du numérateur et du dénominateur par la variable affectée de l'exposant le plus élevé apparaissant au dénominateur.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 8}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{2x}{x^2} - \dfrac{8}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{x^2}}$$

$$= \frac{3}{1 - \dfrac{2}{\infty} - \dfrac{8}{\infty}}$$

$$= 3$$

exemple 1.4.17

Évaluer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}\left(\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

rép: 1

exemple 1.4.18

Évaluer $\lim\limits_{x \to 0^-} x\sqrt{1 + \dfrac{4}{x^2}}$

rép: -2

méthode générale pour lever une indétermination du type 0 (∞)

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0\,(\infty)$ ou $0\,(-\infty)$ IND. $\quad (a \in \overline{\mathbf{R}})$

Généralement pour lever ce genre d'indétermination, on transforme la fonction de façon à obtenir un autre type d'indétermination puis, on utilise les méthodes de solution proposées pour lever ce type d'indétermination.

Exercices 1.4

1. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{8x + 2x^2 - x^3}{3x^2 + 10x + 8}$

e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1 - x^4}{x^3 + 1}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{x+1} - \sqrt{4 - x}}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7} - (x+1)}{x - 2}$

j) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{26\sqrt{x+5} - 52}{x + 1}$

k) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x + \sqrt{x+2}}{3 - \sqrt{x+10}}$

l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$

m) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{5}}{x - 3}$

n) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\dfrac{1}{3-x} - \dfrac{1}{x+1}}{x - 1}$

o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^3}}{2x^2 - x - 1}$

p) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\dfrac{1}{(2x-1)^2} - \dfrac{1}{9}}{x + 1}$

q) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

r) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

s) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{x - 2}$

t) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3 - \sqrt{2x+3}}{(x-3)(2 + \sqrt{x+1})}$

u) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{2 + \sqrt{x}} - 2}$

v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

2. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 7x}{2x^3 + 4x - 7}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1 + x^2 - 5x^3}{2x^3 + x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 - 3}{(x + 1)(2 - x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{4x + 3}{5 + x}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2 - 3}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - x}{x - 1}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2 + 1}{5x^2 + \sqrt{1 + 9x^4}}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + \sqrt{x + 2}}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 4x - 1}{x^3 - \sqrt{x^6 + 2x^2 + 1}}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x - 1 + x^3}{\sqrt{x^4 + 2x^2} - 2x^3}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + 2x - 4}{x^2 - \sqrt{x^6 - 1}}$

l) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 5} + x^2}{(1 - 2x)(x + 1)}$

m) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x}{x + \sqrt{x^2 - 4}}$

n) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1 - 2x}{3x - \sqrt{4x^2 - 1}}\right)^3$

3. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 5x + 8x^4 - 1)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{1 - x^2} - x\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - \sqrt{9x^4 + 4}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 4}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1 - x + x^2} - x\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (1 + x - 2x^2)^3$

h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1 + x^2 + x^3}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)$

j) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{x^2 - 1}\right)$

k) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$

l) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - (x - 1) \right)$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left((x - 1) + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - 4x^2 - 1} \right)$

o) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x}{x - 4} - \dfrac{32}{x^2 - 16} \right)$

4. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(\dfrac{2}{1 - 3x} + \dfrac{3}{5x - 1} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{x + 1}{x^2 + 1} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) \left(\dfrac{1}{(x - 3)^2} + 2 \right)$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} x \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} x \sqrt{\dfrac{1}{x^2 + 1}}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} x \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

Réponses aux exercices 1.4

1\.
a) $\frac{1}{6}$

b) $-\frac{2}{3}$

c) 0

d) 6

e) $\frac{4}{3}$

f) $\frac{1}{4}$

g) -6

h) $\frac{5}{4}$

i) $-\frac{5}{6}$

j) $\frac{13}{2}$

k) -9

l) $\frac{9}{8}$

m) $-\frac{1}{25}$

n) $\frac{1}{2}$

o) 1

p) $\frac{4}{27}$

q) $2x$

r) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

s) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

t) $-\frac{1}{12}$

u) 16

v) $\nexists$ (à gauche: -1 et à droite: 1)

2\.
a) 0

b) $-\frac{5}{2}$

c) -7

d) 2

e) ∞

f) -2

g) $\frac{1}{4}$

h) $\nexists$

i) $\frac{1}{2}$

j) $-\frac{1}{2}$

k) -5

l) -1

m) $-\infty$

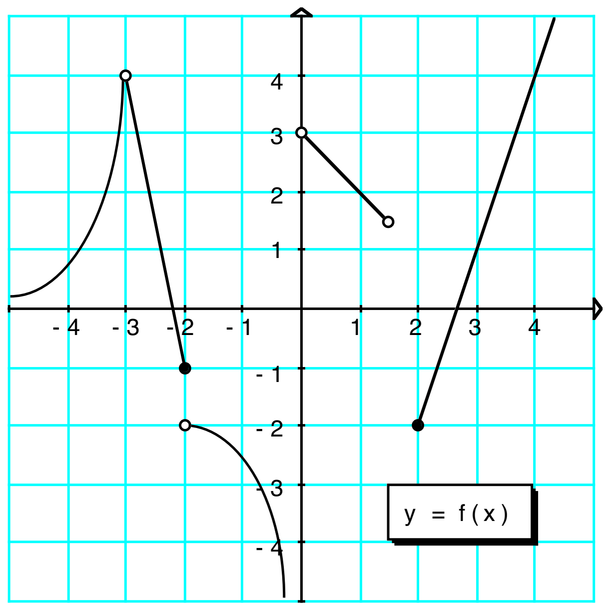
n) -8

3. a) ∞
   b) 0
   c) $\nexists$
   d) $-\infty$
   e) ∞
   f) ∞
   g) $-\infty$
   h) $\nexists$
   i) $-\infty$
   j) $-\infty$
   k) $\frac{1}{2}$
   l) $\frac{3}{2}$
   m) -1
   n) 2
   o) $\frac{3}{2}$

4. a) $-\frac{1}{15}$
   b) -2
   c) $\nexists$ (à gauche: $-\infty$ et à droite: ∞)
   d) 1
   e) -1
   f) $\nexists$ (à gauche: -1 et à droite: 1)

Exercices de révision

1- Évaluer intuitivement chacune des limites dans $\overline{\mathbf{R}}$. Si une limite n'existe pas parce que la limite à gauche est différente de la limite à droite indiquez ces deux limites.



a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

i) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\overline{\mathbf{R}}$

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 4}}$

3. $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{7}{\sqrt{5 - x}}$

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2}$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2}$

6. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{8}{\sqrt{16 - x^2}}$

7. $\lim\limits_{x \to -2^-} \sqrt{4 - x^2}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{1 + x} + \sqrt{x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

11. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - x^3} - x$

12. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{2x - 2}}{x - 3}$

13. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$

14. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 1}{x + \sqrt{x + 2}}$

15. $\lim\limits_{x \to -2^+} \left(\dfrac{x - 3}{\sqrt{4 - x^2}} - \dfrac{x}{x^2 - 4} \right)$

16. $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}}$

17. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{\dfrac{x^2 - 16}{x + 8}}$

18. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x^2 - x - 3}{\sqrt{x + 1}}$

19. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$

20. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x + 5} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2}$

21. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$

22. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x^2 - x + 1}$

23. $\lim\limits_{x \to -4^+} \sqrt{\dfrac{x^2 - 16}{x + 3}}$

24. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x - 1}}$

25. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$

26. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1 - 5x + x^4}{4x^3 - 1}$

27. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{(x + 2)^2} - x$

28. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{2 - \sqrt{x}}}{x - 1}$

29. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 1} - (x + 3)}{x + 1}$

30. $\lim\limits_{x \to 0^-} x \sqrt{4 + \dfrac{9}{x^2}}$

31. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$

32. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x + 1)^5}{(1 - 2x)^5}$

33. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} \right)$

34. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + x - 10}{5x - x^2 - 6}}$

35. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}\right)$

36. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{3x - \sqrt{9x^2 - 1}}$

37. Évaluer les limites suivantes si elles existent dans $\bar{\mathbf{R}}$.

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} 1 - x - x^2 & x \leq 1 \\ \dfrac{2x - 11}{(x - 3)^2} & 1 < x < 4 \\ \dfrac{5x - 4 - x^2}{x - 4} & x > 4 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

Réponses aux exercices de révision

1 a) -1

b) -2

c) $\nexists$ (à gauche: -1 et à droite: -2)

d) $-\infty$

e) ∞

f) 2

g) $\nexists$

h) 3

i) 4

j) 0

2. $\nexists$

3. ∞

4. $-\frac{1}{6}$

5. -1

6. ∞

7. $\nexists$

8. $\nexists$ (à gauche: $\nexists$ et à droite: 1)

9. $\nexists$ (à gauche: -1 et à droite: 1)

10. 1

11. ∞

12. $\frac{1}{16}$

13. $-\frac{1}{2}$

14. $\frac{1}{3}$

15. $-\infty$

16. $\frac{1}{2}$

17. $\nexists$ (à gauche: $\nexists$ et à droite: 0)

18. 0

19. $-\infty$

20. $\frac{4}{3}$

21. $-\frac{1}{2}$

22. 0

23. 0

24. $-\sqrt{3}$

25. $-\frac{1}{2}$

26. ∞

27. ∞

28. $\frac{1}{4}$

29. $-\frac{5}{2}$

30. -3

31. $\frac{3}{4}$

32. $-\frac{1}{32}$

33. $\frac{1}{2}$

34. 3

35. -1

36. -3

37. a) 1

b) $\nexists$ (à gauche: -1 et à droite: $-\frac{9}{4}$)

c) $-\infty$

d) -3

e) $-\infty$

f) $-\infty$

Continuité

2

2.1 Continuité en un point

Karl Weierstrass
(1815-1897)

C'est à ce mathématicien allemand que l'on doit la définition formelle de continuité utilisée aujourd'hui

Nous allons maintenant faire intervenir à l'aide de la limite, la notion de *continuité*. Cette notion est d'une grande importance en analyse car la dérivée ainsi que plusieurs règles tirées du calcul différentiel ne prennent leur sens que sur des fonctions continues.

L'adjectif continu a en mathématiques une signification très rapprochée de son sens courant. Par exemple, lorsque nous disons d'une personne qu'elle parle continuellement, nous voulons dire qu'elle parle d'une façon ininterrompue. Par analogie, nous dirons qu'intuitivement une fonction est continue en une valeur donnée de son domaine si son graphique est ininterrompu de part et d'autre de cette valeur. Aucun saut, aucune interruption, aucune irrégularité ne doit être noté autour de cette valeur.

Prenons par exemple les fonctions définies par les graphiques suivants.

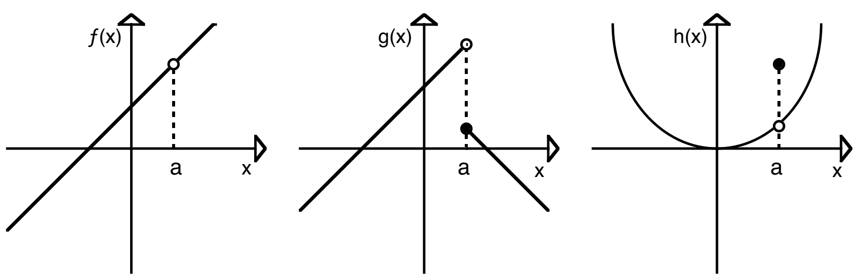


figure 2.1.1 *figure 2.1.2* *figure 2.1.3*

Les trois graphiques sont "brisés" lorsque $x = a$;

- $x = a$ n'est pas une valeur du domaine de la première fonction,
- la deuxième fonction subit un saut brusque lorsque $x = a$,
- la troisième fonction possède une irrégularité d'une nature différente des deux premières en $x = a$.

On dira dans les trois cas que la fonction n'est pas continue pour $x = a$.

Évidemment, lorsqu'on connaît le graphique de la fonction, l'étude de continuité de cette fonction se fait en un clin d'oeil. Mais généralement, le graphique nous est inconnu alors comment exprimer cette notion analytiquement?

En utilisant la notion de limite! La définition qui suit exprime le concept intuitif qui vient d'être présenté.

définition 2.1.1

fonction continue pour x = a

Une fonction f est continue pour x = a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Cette définition implique que les trois conditions suivantes sont remplies.

1) $f(a)$ existe dans **R**,

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe dans **R**,

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

discontinuité

Si au moins une de ces conditions n'est pas satisfaite, on dira que la fonction est *discontinue* pour x = a.

Intuitivement une fonction est discontinue en une valeur donnée de sa variable indépendante lorsque pour cette valeur, le graphique de la fonction est marqué par une interruption sous forme de *trou*, de *saut*, *d'explosion* ou *par défaut* lorsque la fonction n'est pas définie autour de la valeur en question. En somme, lorsqu'on trace le graphique d'une fonction, on est en présence d'une discontinuité à chaque fois que l'on doit lever le crayon.

Certaines situations demanderont une plus grande précision. Même si une fonction n'est pas continue lorsque x = a, elle peut être continue *à droite en x = a* ou *à gauche en x = a*.

définition 2.1.2

fonction continue à gauche en x = a

Une fonction f est continue à gauche en x = a $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

définition 2.1.3

fonction continue à droite en x = a

Une fonction f est continue à droite en x = a $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Afin de bien saisir la nuance entre ces notions considérons la fonction f associée au graphique de la figure 2.1.4.

Cette fonction est discontinue pour x = a car

$$\lim_{x \to a} f(x) \ \nexists$$

et discontinue pour x = b car

$$\lim_{x \to b} f(x) \ \nexists$$

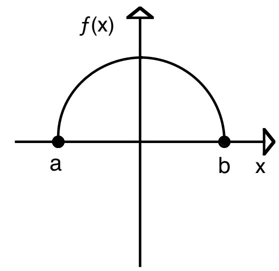


figure 2.1.4

Bien que discontinue pour x = a et pour x = b, cette fonction est néanmoins continue à droite en x = a puisque

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

et à gauche en x = b puisque

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

exemple 2.1.1

Dire si les fonctions associées aux graphiques suivants sont continues

a) pour x = 1,
b) à gauche en x = 1,
c) à droite en x = 1.

---

a) pour x = 1: D
à gauche en x = 1: C
à droite en x = 1: D

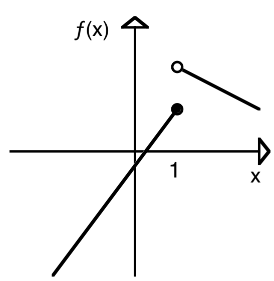
b) pour x = 1: C
à gauche en x = 1: C
à droite en x = 1: C

c) pour x = 1: D
à gauche en x = 1: D
à droite en x = 1: D

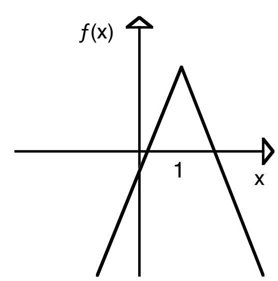
d) pour x = 1: D
à gauche en x = 1: C
à droite en x = 1: D

(C pour continue,
D pour discontinue)

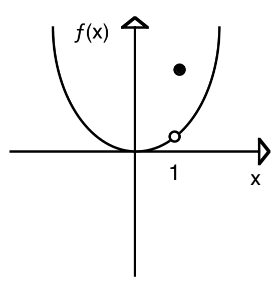
a)



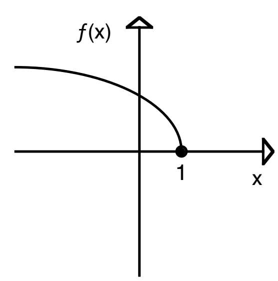
b)



c)



d)

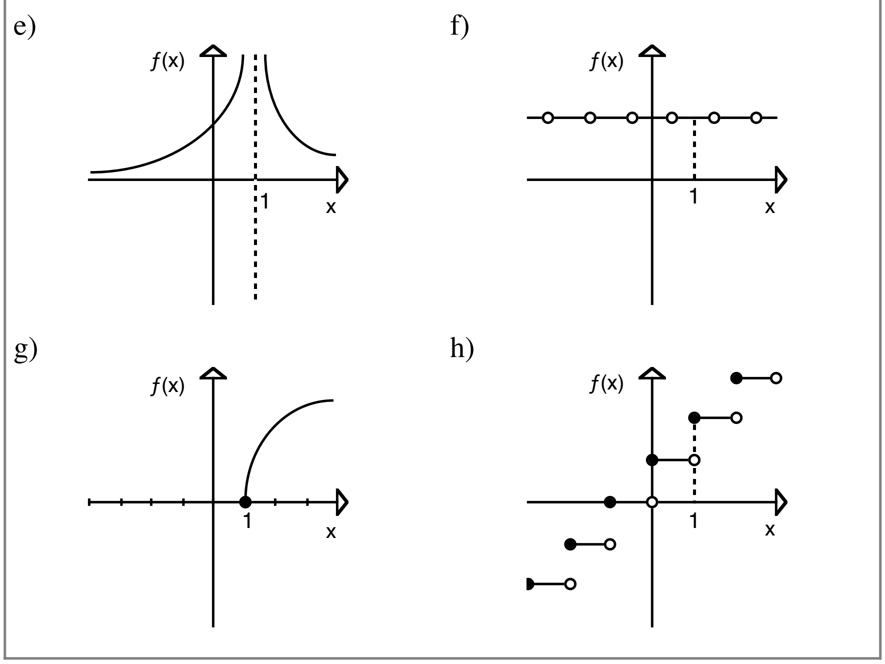


e) pour x = 1: D
à gauche en x = 1: D
à droite en x = 1: D

f) pour x = 1: C
à gauche en x = 1: C
à droite en x = 1: C

g) pour x = 1: D
à gauche en x = 1: D
à droite en x = 1: C

h) pour x = 1: D
à gauche en x = 1: D
à droite en x = 1: C



Malheureusement le graphique est rarement disponible. En général pour faire une étude de continuité, on utilisera les définitions.

exemple 2.1.2

En utilisant la définition, étudier la continuité de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

a) pour x = 1,
b) pour x = 3.

---

a) Par définition, la fonction est continue pour x = 1 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

Puisque 1) $f(1) = \dfrac{(1)^2 - 9}{1 - 3} = 4$

2) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to 1} (x^2 - 9)}{\displaystyle\lim_{x \to 1} (x - 3)} = \frac{(1)^2 - 9}{1 - 3} = 4$

Donc 3) $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

La fonction est alors continue pour x = 1.

le résultat $\frac{0}{0}$ ne correspond pas à une indétermination puisqu'il ne provient pas du calcul d'une limite

b) Par définition, la fonction est continue pour x = 3 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

Puisque 1) $f(3) = \frac{(3)^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0} \quad \nexists$

La première condition n'est pas satisfaite, la fonction est discontinue pour x = 3.

exemple 2.1.3

En utilisant la définition, étudier la continuité de $f(x) = \sqrt{x - 4}$

a) pour x = 4,
b) à droite en x = 4,
c) à gauche en x = 4.

---

a) Par définition, la fonction est continue pour x = 4 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$$

Puisque 1) $f(4) = \sqrt{4 - 4} = 0$

2) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x - 4} = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} \sqrt{x - 4} = \sqrt{0^-} \quad \nexists \\ \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{0^+} = 0 \end{cases}$

donc $\lim_{x\to 4} \sqrt{x - 4} \quad \nexists$

Par conséquent fonction est discontinue pour x = 4.

---

b) Par définition, la fonction est continue à droite en x = 4 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$$

Puisque 1) $f(4) = \sqrt{4 - 4} = 0$

2) $\lim_{x\to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{0^+} = 0$

3) $\lim_{x\to 4^+} \sqrt{x - 4} = f(4)$

La fonction est donc continue à droite en x = 4.

c) Par définition, la fonction est continue à gauche en $x = 4 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4)$$

Puisque 1) $f(4) = \sqrt{4 - 4} = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{x - 4} = \sqrt{0^-} \quad \nexists$

La fonction n'est pas continue à gauche en x = 4.

exemple 2.1.4

En utilisant la définition, étudier la continuité de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} & x < 1 \\ 1 - 3x & x \geq 1 \end{cases}$$

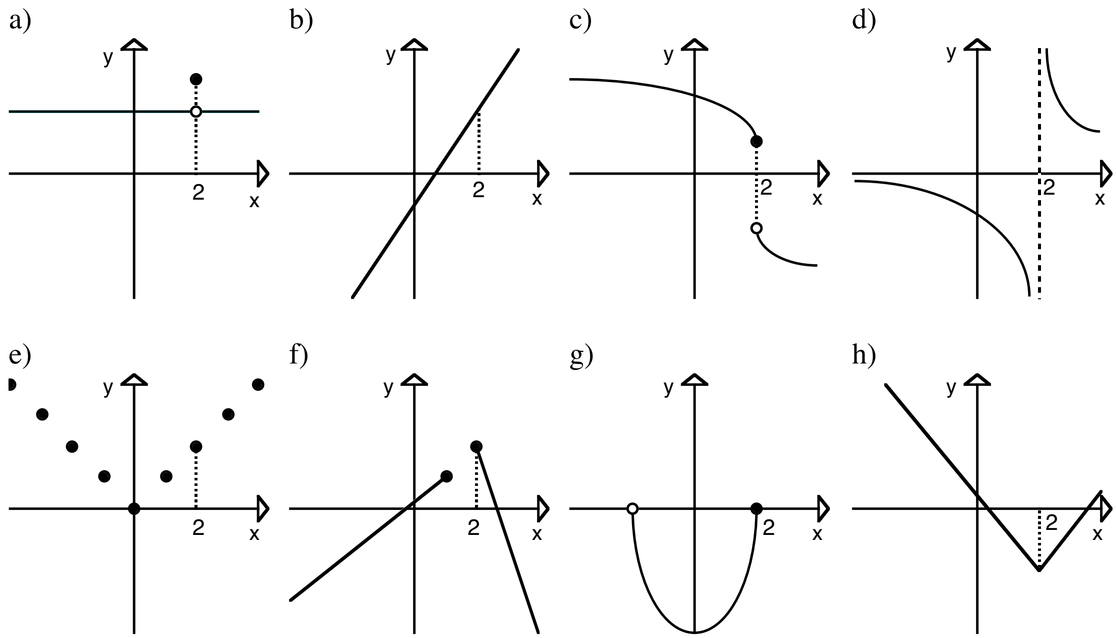
a) pour x = 1,
b) à droite en x = 1,
c) à gauche en x = 1.

rép: a) D ; b) C ; c) D

Exercices 2.1

1. Étudier intuitivement (à l'aide des graphiques) la continuité de chacune des fonctions.

   pour $x = 2$; à gauche en $x = 2$; à droite en $x = 2$.



2. En utilisant la définition 2.1.1, étudier la continuité de chacune des fonctions aux valeurs indiquées.

   a) $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$ — $x = 1$

   b) $f_2(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ — $x = 0$; $x = 2$

   c) $f_3(x) = \sqrt{x + 2}$ — $x = -3$; $x = -2$

   d) $f_4(x) = \begin{cases} 3 + x & x \leq 1 \\ 3 - x & x > 1 \end{cases}$ — $x = 1$

e) $f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{x+2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$ $\qquad x = 2$

f) $f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$ $\qquad x = 1$

3. Soit $f(x) = \begin{cases} cx + 3 & x < 1 \\ 5 & x \geq 1 \end{cases}$

Déterminer si possible, la valeur de c pour que la fonction soit continue pour $x = 1$.

4. En utilisant les définitions 2.1.2 et 2.1.3 étudier la continuité de chacune des fonctions à gauche et à droite aux valeurs indiqués.

a) $f_1(x) = \sqrt{1 - x}$ $\qquad x = 1$

b) $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ $\qquad x = -3 \;;\; x = 3$

c) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \leq 1 \\ x - 2 & x > 1 \end{cases}$ $\qquad x = 1$

Réponses aux exercices 2.1

1.

	$x = 2$	à gauche en $x = 2$	à droite en $x = 2$
a)	D	D	D
b)	C	C	C
c)	D	C	D
d)	D	D	D
e)	D	D	D
f)	D	D	C
g)	D	C	D
h)	C	C	C

2.

a)	C		d)	D
b)	C,	D	e)	D
c)	D,	D	f)	C

3. $c = 2$

4.

		à gauche	à droite
a)	$x = 1$	C	D
b)	$x = -3$	C	D
	$x = 3$	D	C
c)	$x = 1$	C	D

2.2 Continuité sur un intervalle

définition 2.2.1

continuité sur un intervalle ouvert

On dit qu'une fonction $y = f(x)$ est continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ si cette fonction est continue pour chaque valeur de l'intervalle.

définition 2.2.2

continuité sur un intervalle fermé

On dit qu'une fonction $y = f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si cette fonction est continue

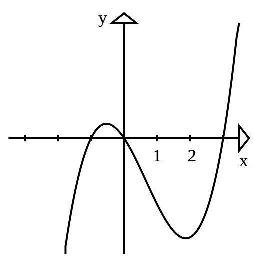
a) sur l'intervalle ouvert $]a, b[$,
b) à droite en $x = a$,
c) à gauche en $x = b$.

exemple 2.2.1

Indiquer si les fonctions associées aux graphiques ci-dessous sont continues sur les différents intervalles.

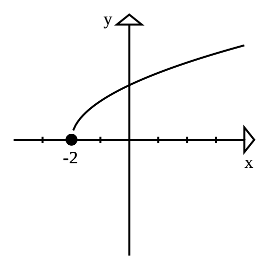
lorsqu'une fonction est continue sur $]-\infty, \infty[$ on dira simplement qu'elle est continue sur ***R***

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$



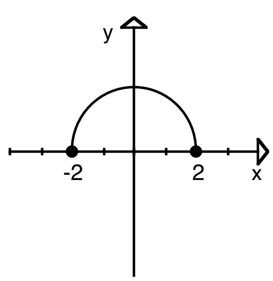
a) sur $]1, 3[$,
b) sur $[0, 2]$,
c) sur **R** .

2. $f(x) = \sqrt{x + 2}$



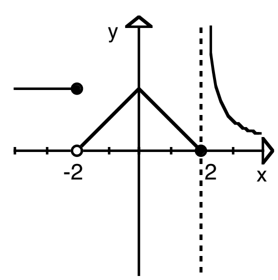
a) sur $]-2, 3[$,
b) sur $[-2, 3]$,
c) sur $]-3, 0[$.

3. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$



a) sur $]-2, 2[$,
b) sur $[-2, 2]$,
c) sur **R** .

4. $f(x)$



a) sur $]-2, 2[$,
b) sur $[-2, 2]$,
c) sur $]-3, 2[$.

rép:

1. a) continue
1. b) continue
1. c) continue

2. a) continue
2. b) continue
2. c) pas continue

3. a) continue
3. b) continue
3. c) pas continue

4. a) continue
4. b) pas continue
4. c) pas continue

En général, on fera l'étude de la continuité d'une fonction sur un intervalle à l'aide de propositions.

a) Étude de la continuité d'une fonction sur un intervalle ouvert

proposition 2.2.1
fonction polynomiale

Toute fonction polynomiale est continue sur l'ensemble des réels.

démonstration

Par la proposition 1.2.3 on a que si P est une fonction polynomiale alors

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a) \qquad \forall a \in \mathbf{R}.$$

par la définition 2.1.1

Par conséquent la fonction P est continue sur l'ensemble des réels.

proposition 2.2.2
fonction rationnelle

Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine.

démonstration

Soit P/Q une fonction rationelle. En utilisant les propositions 1.2.2 d) et 1.2.3 sur les limites, on a que

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \qquad \forall a \in \mathbf{R} \quad \text{sauf si} \quad Q(a) = 0 .$$

par la définition 2.1.1

Par conséquent la fonction rationnelle P/Q est continue sur son domaine.

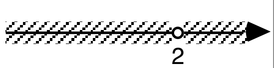
exemple 2.2.2

Étudier la continuité de la fonction $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ sur l'ensemble des réels.

f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur l'ensemble des réels (proposition 2.2.1).

exemple 2.2.3

Étudier la continuité de la fonction $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5}{x - 2}$ sur l'ensemble des réels. Cette fonction est-elle continue sur **R** ?



f est une fonction rationnelle, elle est donc continue sur son domaine c'est-à-dire sur $\mathbf{R} \setminus \{ 2 \}$ (proposition 2.2.2).

Par conséquent, la fonction f n'est pas continue sur **R**.

proposition 2.2.3
$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$

Toute fonction irrationnelle de la forme $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ $(n \in \mathbf{N})$ est continue sur son domaine sauf s'il y a lieu aux bornes inférieure et supérieure de ce domaine.

démonstration

Par la proposition 1.2.4 b) nous savons que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{g(a)}$

$\forall\ a \in \text{dom } g$ sauf si n est pair et $g(a) \leq 0$.

par la définition 2.1.1

Par conséquent la fonction f est continue sur son domaine sauf s'il y a lieu aux bornes inférieure et supérieure de ce domaine.

exemple 2.2.4

Étudier la continuité de la fonction $f(x) = \sqrt{x - 5}$ sur l'ensemble des réels.

f est une fonction de la forme $\sqrt[n]{g(x)}$ $(n \in \mathbf{N})$ et dom $f = [5, \infty[$, cette fonction est donc continue sur $]5, \infty[$ (proposition 2.2.3).

En combinant les trois propositions précédentes avec celle qui suit (propriétés des fonctions continues), nous serons en mesure d'étudier rapidement la continuité de toute fonction algébrique.

proposition 2.2.4
propriétés des fonctions continues

cette proposition découle directement des propriétés sur les limites

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle I alors

a) kf est continue sur I, $(k \in \mathbf{R})$
b) $f \pm g$ est continue sur I,
c) $f \cdot g$ est continue sur I,
d) f / g est continue sur I. (sauf pour les valeurs de l'intervalle qui annulent le dénominateur)

exemple 2.2.5

Étudier la continuité de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x - 7}$ sur l'ensemble des réels. Indiquer ensuite si cette fonction est continue sur

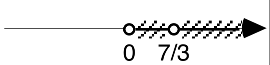
a) $]1, 3[$ b) $]0, 2[$.

Étudions d'abord la continuité de la fonction sur l'ensemble des réels.

cont. sur $]0, \infty[$ (prop. 2.2.3)

$$f(x) = \frac{\boxed{\sqrt{x}}}{\boxed{3x - 7}}$$

*cont. sur **R** (prop 2.2.1)*



f est donc continue sur $]0, \infty[\setminus \{ 7/3 \}$ (prop. 2.2.4 d)

La fonction n'est pas continue sur $]1, 3[$ et est continue sur $]0, 2[$.

exemple 2.2.6

Étudier la continuité de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - x} - \sqrt{x + 3}}{x - 1}$ sur l'ensemble des réels. Indiquer ensuite si la fonction est continue sur

a) $]0, 2[$ b) $]-3, 1[$.

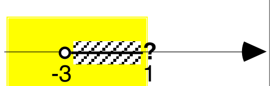
rép: f est continue sur $]-3, 2[\setminus [1\}$
a) f n'est pas continue sur $]0, 2[$; b) f est continue sur $]-3, 1[$

exemple 2.2.7

Soit $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3 + x} & x < 1 \\ \dfrac{3 - x}{x^2 - 2x - 3} & x \geq 1 \end{cases}$$

Étudier la continuité de cette fonction sur l'ensemble des réels.

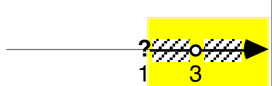
1) si $x < 1$



$$f(x) = \underbrace{\sqrt{3 + x}}_{f \text{ est continue sur }]-3, \infty[\text{ (prop. 2.2.3)}} \qquad (\text{ dom } f = [-3, \infty[\ )$$

$\Rightarrow$ La fonction est continue sur $]-3, 1[$,

2) si $x > 1$

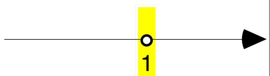


$$f(x) = \frac{3 - x}{x^2 - 2x - 3} = \underbrace{\frac{3 - x}{(x - 3)(x + 1)}}_{f \text{ est continue sur } \mathbf{R} \setminus \{ -1, 3 \} \text{ (prop. 2.2.2)}}$$

$\Rightarrow$ La fonction est continue sur $]1, \infty[\setminus \{ 3 \}$

3) si $x = 1$

- $f(1) = \dfrac{3 - 1}{(1)^2 - 2(1) - 3} = -\dfrac{1}{2}$



- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{3 + x} = \sqrt{4} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3 - x}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{3 - 1}{(1)^2 - 2(1) - 3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \nexists$

$\Rightarrow$ La fonction est discontinue pour $x = 1$.

On conclut que la fonction est continue sur $]-3, \infty[\setminus \{ 1, 3 \}$.

b) Étude de la continuité d'une fonction sur un intervalle fermé

exemple 2.2.8

La fonction $f(x) = \sqrt{2 - x}$ est-elle continue sur $[0, 2]$?.

Étudions d'abord la continuité de cette fonction sur l'ensemble des réels.

f est une fonction de la forme $\sqrt[n]{g(x)}$ ($n \in \mathbf{N}$) et $\text{dom } f =]-\infty, 2]$, par conséquent la fonction est continue sur $]-\infty, 2[$, (prop. 2.2.3).

une fonction continue en $x = a$ est nécessairement continue à gauche en $x = a$ et à droite en $x = a$

- Puisque f est continue sur $]-\infty, 2[$, elle le sera aussi sur $]0, 2[$.
- Étant continue pour $x = 0$, elle est nécessairement continue à droite en $x = 0$.
- La fonction est de plus continue à gauche en $x = 2$ puisque

$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2 - x} = f(2)$$

En utilisant la définition 2.2.2, on peut donc affirmer que la fonction f est continue sur $[0, 2]$.

exemple 2.2.9

Indiquer si la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 2}$ est continue sur

a) sur $[0, 1]$ b) sur $[1, 2]$

rép: a) f est continue sur $[0, 1]$; b) f n'est pas continue sur $[1, 2]$

exemple 2.2.10

Indiquer si la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{4 - x}{x + 2}}$ est continue sur

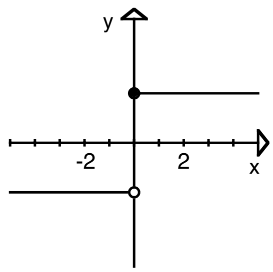
a) $[-2, 4]$ b) $[2, 4]$

rép: a) f n'est pas continue sur $[-2, 4]$; b) f est continue sur $[2, 4]$

Exercices 2.2

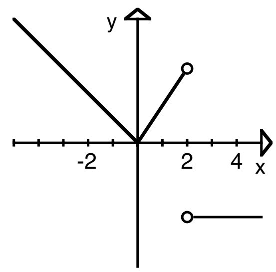
1. Indiquer si les fonctions associées aux graphiques ci-dessous sont continues sur les différents intervalles.

a)



- $]-2, 0[$,
- $[0, 2]$,
- $\mathbf{R}$.

b)



- $]-2, 2[$,
- $[2, 4]$,
- $[-2, 0]$.

2. Étudier la continuité de chacune des fonctions sur l'ensemble des réels.

a) $f_1(x) = x^3 - 5x^2 + 7$

b) $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f_3(x) = 3$

d) $f_4(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 4}$

e) $f_5(x) = \sqrt{2 - x}$

f) $f_6(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$

g) $f_7(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$

h) $f_8(x) = |x - 1|$

i) $f_9(x) = \sqrt{1 - x^2}$

j) $f_{10}(x) = \sqrt{x + 5} - \sqrt{2 - x}$

k) $f_{11}(x) = \dfrac{8 + x^3}{x - \sqrt{2x + 3}}$

l) $f_{12}(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - x}}{3 - 5x - 2x^2}$

m) $f_{13}(x) = \dfrac{\sqrt{3x + 5}}{(x + 1)} - \dfrac{(x - 2)}{(x^2 - 2x)}$

3. Étudier la continuité de chacune des fonctions sur l'ensemble des réels.

a) $f_1(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 2 \\ 3x - 3 & x \geq 2 \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{x - 1} & x > 0 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 3}{x - 3} & x < 0 \\ \dfrac{x - 2}{x + 1} & x \geq 0 \end{cases}$

d) $f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 4} & x < 2 \\ \dfrac{x^2 + 3}{2 - \sqrt{x}} & x > 2 \end{cases}$

4. Indiquer si les fonctions suivantes sont continues sur les différents intervalles.

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ $[3, 4]$; $[0, 4]$; $[2, 4]$; $]2, 4[$

b) $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ $]-\infty, -3[$; $[-5, -3]$; $[3, 10]$; $]-4, 4[$

c) $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{3 + x}}$ $]-3, 2[$; $[-3, 2]$

5. Tracer le graphique d'une fonction f vérifiant les conditions suivantes:

a)
- continue sur **R**,
- $f(0) = 0$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$.

b)
- discontinue pour $x = \pm 1$,
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty$,
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \infty$,
- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Réponses aux exercices 2.2

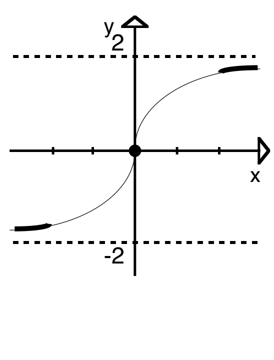
1. a) continue ; continue ; pas continue
   b) continue ; pas continue ; continue

2. a) continue sur **R**
   b) continue sur **R** \ { 0 }
   c) continue sur **R**
   d) continue sur **R** \ { -2, 2 }
   e) continue sur]-∞, 2[
   f) continue sur **R**
   g) continue sur **R**
   h) continue sur **R**
   i) continue sur]-1, 1[
   j) continue sur]-5, 2[
   k) continue sur]-3/2, ∞[\ { 3 }
   l) continue sur]-∞, -2[∪]2, 4[\ { -3 }
   m) continue sur]-5/3, ∞[\ { -1, 0, 2 }

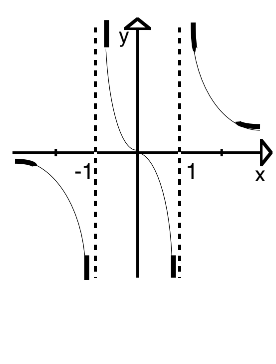
3. a) continue sur **R**
   b) continue sur **R** \ { 0, 1 }
   c) continue sur **R** \ { 0 }
   d) continue sur]-4, ∞[\ { 2, 4 }

4. a) continue ; pas continue ; pas continue ; continue
   b) continue ; continue ; continue ; pas continue
   c) continue ; pas continue

5. a)

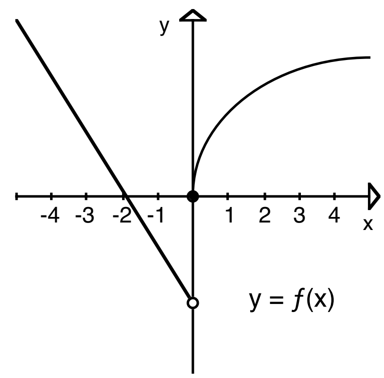


b)



Exercices de révision

1. Vrai ou faux.



   a) f est continue pour $x = 0$,
   b) f est continue à droite en $x = 0$,
   c) f n'est pas continue à gauche en $x = 0$
   d) f est continue sur $]0, 4[$,
   e) f n'est pas continue sur $]-4, 0[$,
   f) f est continue sur $[0, 2]$,
   g) f est continue sur **R**,
   h) f est continue à droite en $x = -1$.

2. Étudier la continuité de chacune des fonctions sur l'ensemble des réels puis indiquer si elles sont continues sur $]0, 1[$ et $[0, 1]$.

   a) $f_1(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x - 4$

   b) $f_2(x) = \dfrac{3x}{x^2 - x}$

   c) $f_3(x) = \sqrt{1 - x^2}$

   d) $f_4(x) = \dfrac{5x + 1}{\sqrt{x} - 1}$

   e) $f_5(x) = \sqrt{1 - x} + 3\sqrt{x}$

   f) $f_6(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{2x^2 + 3x - 2}$

   g) $f_7(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 - 4} & x \leq 0 \\ \sqrt{1 - x} & x > 0 \end{cases}$

Réponses aux exercices de révision

1. a) F
   b) V
   c) V
   d) V
   e) F
   f) V
   g) F
   h) V

2.

a)	continue **R**	; continue	; continue
b)	continue sur **R** \ { 0, 1 }	; continue	; pas continue
c)	continue sur]-1, 1[	; continue	; continue
d)	continue sur]0. 1[$\cup$]1, ∞[	; continue	; pas continue
e)	continue sur]0, 1[	; continue	; continue
f)	continue sur]-1, 1[\ { 1/2 }	; pas continue	; pas continue
g)	continue sur]-∞, 1[\ { -2, 0 }	; continue	; pas continue