Rappel

Cette première section servira de rappel à certaines notions mathématiques indispensables à l'étude du *calcul différentiel*. Le rappel portera sur:

- le système des nombres réels,
- les exposants,
- l'algèbre des polynômes,
- la factorisation,
- les expressions algébriques rationnelles,
- les expressions algébriques irrationnelles,
- les fonctions.

Il est essentiel de bien comprendre ces notions et de les revoir au besoin. À cet effet, il est fortement conseillé à tous les étudiants de compléter les exercices de ce module.

les nombres réels

L'ensemble des nombres réels peut être considéré comme une extension de d'autres ensembles de nombres.

Le système des nombres réels comprend plusieurs sous-systèmes. Les nombres qu'on emploie pour compter s'appellent les *nombres naturels*. L'ensemble des nombres naturels est désigné par **N**.

$$\mathbf{N} = \{ 1, 2, 3, 4, ... \}$$

Viennent ensuite les *nombres entiers* que l'on désigne par **Z**.

$$\mathbf{Z} = \{ ... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \}$$

Puis, les quotients de nombres entiers que l'on appelle *nombres rationnels* et que l'on note par **Q**.

$$\mathbf{Q} = \{ p/q \mid p \text{ et } q \text{ sont des nombres entiers et } q \neq 0 \}$$

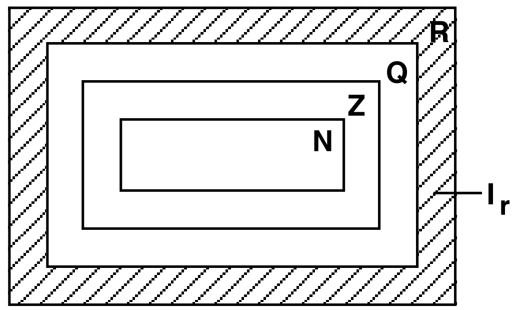
L'extension du dernier ensemble de nombres est d'une représentation beaucoup plus difficile que les précédentes. Contentons-nous d'appeler *nombre irrationnel* tout nombre pouvant s'écrire sous une forme décimale non périodique. Cet ensemble de nombres est noté $\mathbf{I_r}$.
Ainsi, $\pi = 3{,}1415926 ...$, $\sqrt{2} = 1{,}4142135 ...$ ou $\sqrt{3} = 1{,}7320508 ...$ sont des nombres irrationnels.

Finalement, l'ensemble des *nombres réels* noté **R** correspond à l'union des deux derniers ensembles de nombres.

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I_r}$$

exemple

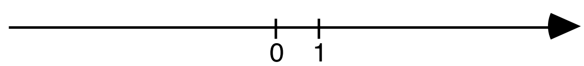
Placer les nombres à l’endroit approprié sur le diagramme.



$-\frac{1}{2}$	1	$2{,}3$	$\sqrt{4}$	$-0{,}\overline{3}$	947
$-\pi$	0	$-\sqrt{8}$	$\frac{22}{7}$	$3{,}1416$	$\sqrt[3]{-8}$

la droite des nombres réels

L’ensemble des nombres réels peut être représenté à l’aide d’une droite orientée. On détermine d’abord le point de la droite associé à la valeur zéro puis, on définit la longueur du segment de droite correspondant à l’unité.



Chaque point de la droite représente un nombre réel et chaque nombre réel est associé à un point de la droite.

notations particulières

$\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$ (les entiers naturels),

$\mathbf{Z^+} = \{1, 2, 3, 4, \ ...\}$ (les entiers positifs),

0 est ni positif, ni négatif

$\mathbf{Z^-} = \{ \ ... -4, -3, -2, -1\}$ (les entiers négatifs),

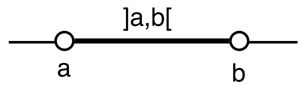
$\mathbf{Z} = \mathbf{Z^-} \cup \{0\} \cup \mathbf{Z^+}$

$\mathbf{R^+}$ représente l’ensemble des nombres réels positifs,

$\mathbf{R^-}$ représente l’ensemble des nombres réels négatifs.

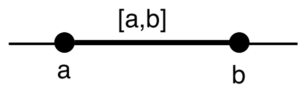
intervalle ouvert

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. L'*intervalle ouvert*]a, b[correspond à l'ensemble des nombres réels situés entre a et b.



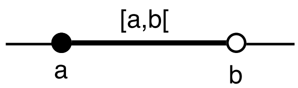
intervalle fermé

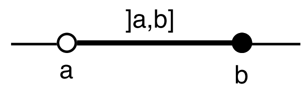
Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. L'*intervalle fermé* [a, b] correspond à l'ensemble des nombres réels situés entre a et b incluant a et b.



intervalle semi-ouvert (semi-fermé)

D'autres intervalles peuvent être *semi-ouverts* (*semi-fermés*).

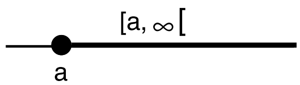


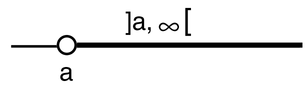


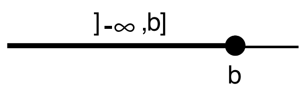
intervalle non borné

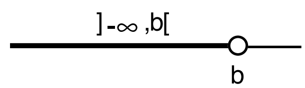
les symboles ∞ et -∞ ne sont pas des nombres réels, ils ne servent qu'à symboliser l'infiniment grand

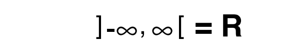
Certains intervalles ne sont pas bornés.







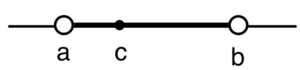




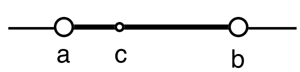
voisinage (voisinage troué)

si le point c est au milieu de l'intervalle on parlera d'un voisinage symétrique du point c

On appelle *voisinage* d'un nombre réel "c" tout intervalle ouvert]a, b[qui contient le point "c". Un voisinage du point "c" est noté V(c).



Lorsque d'un voisinage de "c" on exclut le point "c", on obtient un *voisinage troué* du point "c" que l'on note $V_o(c)$.



voisinage à gauche et voisinage à droite

L'intervalle]a, c[est appelé voisinage à gauche du point c.

Il est noté $V^-(c)$.

L'intervalle]c, b[est appelé voisinage à droite du point c.

Il est noté $V^+(c)$.

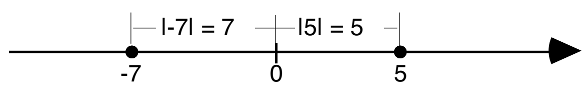
exemple

Vrai ou faux:

a) $]0, 5[$ est un voisinage de 4,
b) $[0, 5[= V(3)$,
c) $]2, 4[= V(\pi)$,
d) $]3, 6[\setminus \{4\} = V_o(4)$
e) $[-4, 4]$ est un voisinage symétrique de 0,
f) $]1, 3[= V^-(3)$,
g) $[-1, 2[= V^+(-1)$.

rép: a) V ; b) F ; c) V ; d) V ; e) F ; f) V ; g) F

valeur absolue La valeur absolue d'un nombre a est la distance qui sépare ce nombre de 0 sur la droite des nombres réels.



Pour obtenir la valeur absolue d'un nombre négatif, il suffit de changer son signe. La valeur absolue d'un nombre positif est le nombre lui-même.

définition

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

exemple

$|3| = 3$
$|-2/3| = 2/3$

propriétés de la valeur absolue

Soit les nombres réels a, b et n.

1. $|-a| = |a|$
2. $|ab| = |a| . |b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (si $b \neq 0$)
4. $|a^n| = |a|^n$ (si a^n existe)
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalité du triangle)

exemple

$|-5x| = |-5|.|x| = 5|x|$

$|x^3| = |x|^3$

Les exposants

exposant entier

Soit a un nombre réel et n un nombre entier positif.

1. $a^n = a \times a \times a \times a \times a \times \ldots \times a$ (n fois)

2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$

exemple

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$

$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

$-2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

$\frac{3}{(x+4)^{-1}} = 3(x+4) \quad x \neq -4$

attention!

$-2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

et

$(-2x)^{-3} = \frac{1}{(-2x)^3}$

exposant nul

Soit a un nombre réel non nul.

3. $a^0 = 1$

exemple

$5^0 = 1$

$(-4)^0 = 1$

$(2x)^0 = 1$ si $x \neq 0$

$(3x - 1)^0 = 1$ si $x \neq \frac{1}{3}$

0^0 n'existe pas

exposant fractionnaire (radical)

Soit a un nombre réel et soit m et n deux nombres entiers positifs.

4. $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

5. $a^{-m/n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ où $a \neq 0$

(pourvu que $\sqrt[n]{a^m}$ existe)

exemple

$$8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$4^{-3/2} = \frac{1}{4^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

$$x^{-3/5} = \frac{1}{x^{3/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$$

$$\sqrt[4]{(1 - x)^7} = (1 - x)^{7/4}$$

lois des exposants

Soit a, b, m et n des nombres réels.

1. $a^{m+n} = a^m . a^n$

2. $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$ si $a \neq 0$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(ab)^n = a^n b^n$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$

(pourvu que chaque terme existe)

lois des radicaux

le radical est un exposant fractionnaire, en conséquence les lois des exposants s'appliquent.

Soit a, b des nombres réels et m, n des nombres entiers.

6. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

7. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$

8. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ si $b \neq 0$

9. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

10. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

(pourvu que chaque radical existe)

exemple

$3^{1/3} . 3^{1/6} = 3^{1/3 + 1/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3},$

$x^3 . x^2 = x^{3+2} = x^5,$

$\dfrac{2^{12}}{2^8} = 2^{12-8} = 2^4 = 16$

$\dfrac{(x+2)^{4/3}}{(x+2)^{5/6}} = (x+2)^{4/3 - 5/6} = (x+2)^{1/2} = \sqrt{x+2}$

$(a^{2/3})^{3/4} = a^{(2/3)(3/4)} = a^{1/2} = \sqrt{a}$

$(4x)^{1/2} = 4^{1/2} . x^{1/2} = \sqrt{4} . \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$

$\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^5 = \dfrac{x^{10}}{y^{15}}$

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} . \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{(1-x)^{10}}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{(1-x)^{10}}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{(1-x)^9}\sqrt[3]{(1-x)}} = \frac{x}{(1-x)^3\sqrt[3]{1-x}}$$

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

L'algèbre des polynômes

Poursuivons le rappel en explorant l'algèbre des polynômes et son problème fondamental, *la factorisation*.

les polynômes

Les expressions algébriques

$$5x - 3 \quad , \quad 2x^3 - 4x + 6 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2}x^5 + \sqrt{3}x^2 + 4$$

sont tous des exemples de polynômes à une variable.

définition d'un polynôme

Un polynôme à une variable est une somme de termes où chaque terme est constitué d'une constante réelle multipliée par une puissance entière non négative de la variable.

Lorsqu'un polynôme comporte un seul terme, on dit que c'est un *monôme*. S'il possède deux termes on parlera d'un *binôme*. Un polynôme à trois termes s'appelle un *trinôme*.

exemple

$2x^3$	et	5	sont des monômes
$4x - 3$	et	$x^3 - 1$	sont des binômes
$-x^2 + 3x - 5$	et	$3x^6 - 5x^3 - 2$	sont des trinômes
$\frac{1}{x^2} + 1$	et	$2\sqrt{x} + 2x^3 - 1$	ne sont pas des polynômes

degré d'un polynôme

Le degré d'un polynôme à une variable dont les coefficients sont non nuls correspond à la puissance la plus élevée de la variable pour l'ensemble des termes.

exemple

$4x^3 + 7x - 1$	est un polynôme de degré 3,
$8x^5$	est un polynôme de degré 5,
2	est un polynôme de degré 0,
0	est un polynôme sans degré.

opérations sur les polynômes Les polynômes s'additionnent, se soustraient, se multiplient et se divisent exactement comme le font les nombres entiers.

addition de polynômes Pour additionner des polynômes, il suffit d'additionner les coefficients des monômes de puissances identiques.

exemple

Effectuer $(2x^3 - 3x + 1) + (2 + x - x^2 - 5x^3 - 3x^4)$

$$\begin{array}{cccccccccccc} & -3x^4 & - & 5x^3 & - & x^2 & + & x & + & 2 \\ + & & & 2x^3 & & & - & 3x & + & 1 \\ \hline & -3x^4 & - & 3x^3 & - & x^2 & - & 2x & + & 3 \end{array}$$

$$(2x^3 - 3x + 1) + (2 + x - x^2 - 5x^3 - 3x^4) = -3x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 3$$

soustraction de polynômes Pour soustraire des polynômes, on additionne le premier polynôme à l'opposé du second polynôme.

exemple

Effectuer $(3x^2 + 7x - 1) - (2x^3 - 4x^2 + 3x - 6)$

$(3x^2 + 7x - 1) - (2x^3 - 4x^2 + 3x - 6) = (3x^2 + 7x - 1) + (-2x^3 + 4x^2 - 3x + 6)$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & 3x^2 & + & 7x & - & 1 \\ + & -2x^3 & + & 4x^2 & - & 3x & + & 6 \\ \hline & -2x^3 & + & 7x^2 & + & 4x & + & 5 \end{array}$$

$$(3x^2 + 7x - 1) - (2x^3 - 4x^2 + 3x - 6) = -2x^3 + 7x^2 + 4x + 5$$

multiplication de polynômes Pour multiplier des polynômes, on multiplie chaque terme du premier polynôme par chacun des termes du second polynôme. On effectue ensuite l'addition des termes de puissances identiques.

exemple

Effectuer $(x^2 + 3x - 2)(2x - 5)$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & x^2 & + & 3x & - & 2 & & \\
\times & & & 2x & - & 5 & & \\
\hline
 & 2x^3 & + & 6x^2 & - & 4x & & \\
 & & - & 5x^2 & - & 15x & + & 10 \\
\hline
 & 2x^3 & + & x^2 & - & 19x & + & 10
\end{array}$$

$$(x^2 + 3x - 2)(2x - 5) = 2x^3 + x^2 - 19x + 10$$

division de polynômes La division de deux polynômes est analogue à la division de deux nombres entiers.

exemple

Effectuer $\dfrac{(2x^2 + 5x - 12)}{(x + 4)}$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 & 2x^2 & + & 5x & - & 12 & & x + 4 \\
\cline{8-8}
-(& 2x^2 & + & 8x &) & & & 2x - 3 \\
\cline{2-6}
 & & & -3x & - & 12 & & \\
 & & -(& -3x & - & 12 &) & \\
\cline{4-6}
 & & & & & 0 & &
\end{array}$$

$$\frac{(2x^2 + 5x - 12)}{(x + 4)} = 2x - 3$$

exemple

Effectuer $\dfrac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x - 2}$

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & 3x^3 & - & 5x^2 & + & 0x & + \; 1 & \; x - 2 \\
-(& 3x^3 & - & 6x^2 \;) & & & & \; 3x^2 + x + 2 \\ \hline
 & & & x^2 & + & 0x & + \; 1 & \\
 & & -(& x^2 & - & 2x \;) & & \\ \hline
 & & & & & 2x & + \; 1 & \\
 & & & & -(& 2x & - \; 4 \;) & \\ \hline
 & & & & & & 5 &
\end{array}
$$

donc $\dfrac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x - 2} = 3x^2 + x + 2 + \dfrac{5}{x - 2}$

équation polynomiale

Une *équation polynomiale* est une équation de la forme $P(x) = 0$ où $P(x)$ est un polynôme.

racine d'une équation polynomiale

Une *solution* ou *racine* d'une équation polynomiale est une valeur r telle que $P(r) = 0$. Cette quantité r est aussi appelée un *zéro* du polynôme.

Résoudre une équation consiste à trouver *les racines* de l'équation.

exemple

Résoudre l'équation polynomiale: $2x - 5 = 0$

Lorsque le polynôme est de degré 1, on résout l'équation en isolant simplement la variable.

$$
\begin{aligned}
2x - 5 &= 0 \\
2x &= 5 \\
x &= 5/2
\end{aligned}
$$

L'ensemble-solution de l'équation est $\{ 5/2 \}$

exemple

Résoudre l'équation polynomiale: $3x^2 - 11x + 6 = 0$

on étudiera par la suite d'autres méthodes permettant de résoudre une telle équation; la factorisation est l'une d'elles.

Lorsque le polynôme est de degré 2, on peut utiliser la formule du second degré pour résoudre l'équation.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{avec} \quad a = 3,\ b = -11,\ c = 6$$

On obtient les deux racines

$$x_1 = \frac{11 + \sqrt{121 - 72}}{6} = \frac{11 + \sqrt{49}}{6} = \frac{11 + 7}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{11 - \sqrt{121 - 72}}{6} = \frac{11 - \sqrt{49}}{6} = \frac{11 - 7}{6} = \frac{2}{3}$$

L'ensemble-solution de l'équation est { 2/3; 3 }

exemple

Résoudre l'équation polynomiale: $2x^2 + 5x - 12 = 0$

rép: L'ensemble-solution de l'équation est { -4; 3/2 }

La factorisation

Décomposer en facteurs (ou factoriser) un polynôme signifie le mettre sous la forme d'un produit de polynômes et consiste donc à faire le travail inverse de la multiplication.

facteur commun Quand il s'agit de factoriser une expression, on devrait toujours commencer par chercher s'il y a un facteur commun à tous les termes.

exemple

Factoriser $20x^5 + 12x^3$

$$20x^5 + 12x^3 = 4x^3(5x^2 + 3)$$

exemple

Factoriser $8(x - 1)^3(x + 2) - 2(x - 1)^2(x + 2)^2$

$$\begin{aligned} 8(x - 1)^3(x + 2) - 2(x - 1)^2(x + 2)^2 &= 2(x - 1)^2(x + 2)\big(4(x - 1) - (x + 2)\big) \\ &= 2(x - 1)^2(x + 2)(3x - 6) \\ &= 6(x - 1)^2(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

méthode des groupements Dans certaines expressions algébriques, en groupant des termes, il est possible de mettre en évidence un facteur commun.

exemple

Factoriser $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 6 &= (2x^3 - 3x^2) + (4x - 6) \\ &= x^2(2x - 3) + 2(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(x^2 + 2) \end{aligned}$$

factorisations utiles

Différence de carrés

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Somme ou différence de cubes

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

exemple

Factoriser $16x^2 - 9$

$$16x^2 - 9 = (4x)^2 - (3)^2$$
$$= (4x - 3)(4x + 3) \quad \text{(différence de carrés: } a = 4x \text{ et } b = 3\text{)}$$

exemple

Factoriser $8y^3 + 27$

$$8y^3 + 27 = (2y)^3 + (3)^3$$
$$= (2y + 3)(4y^2 - 6y + 9) \quad \text{(somme de cubes: } a = 2y \text{ et } b = 3\text{)}$$

exemple

Factoriser $1 - 16x^4$

rép: $(1 - 2x)(1 + 2x)(1 + 4x^2)$

factorisation du trinôme

$ax^2 + bx + c$

Pour factoriser le trinôme $ax^2 + bx + c$,

a) on transforme le terme du milieu b en une somme (ou une différence) de deux termes:

- le produit P de ces termes devra être égal à ac,
- la somme S de ces termes devra être égale à b,

b) on factorise à l'aide de la méthode des groupements le polynôme obtenu.

exemple

Factoriser $3x^2 + 13x - 10$

a) Le trinôme a la forme de celui du haut.
Ses coefficients sont: $a = 3$, $b = 13$ et $c = -10$.

$$P = ac = (3)(-10) = -30 \qquad S = b = 13$$

Les valeurs cherchées sont 15 et -2 car $(15)(-2) = -30$ et $(15) + (-2) = 13$. Le terme du milieu $13x$ devient $(15x - 2x)$.

b)
$$\begin{aligned} 3x^2 + 13x - 10 &= 3x^2 + 15x - 2x - 10 \\ &= 3x(x + 5) - 2(x + 5) \\ &= (x + 5)(3x - 2) \end{aligned}$$

exemple

Factoriser $2a^2 + 5a - 12$

rép: $(a + 4)(2a - 3)$

exemple

Factoriser $x^2 - 4x - 21$

rép: $(x - 7)(x + 3)$

remarque Lorsque $a = 1$, il est inutile de passer à la seconde étape. Dans ce cas, si les valeurs cherchées à la première étape sont p et q alors les facteurs du trinôme seront $(x + p)(x + q)$.

exemple

Factoriser $x^2 - 2x - 24$

a) Les coefficients du trinôme sont: $a = 1$, $b = -2$ et $c = -24$.

$$P = ac = -24 \qquad\qquad S = b = -2$$

Les valeurs cherchées sont -6 et 4 car $(-6)(4) = -24$ et $(-6) + (4) = -2$. Puisque $a = 1$, il est inutile de passer à la seconde étape.

$$x^2 - 2x - 24 = (x - 6)(x + 4)$$

factorisation d'un trinôme se ramenant à la forme
$ax^2 + bx + c$

Lorsqu'un trinôme se ramène à l'aide d'un changement de variable à la forme $ax^2 + bx + c$,

1) on factorise le trinôme obtenu après changement de variable en utilisant la méthode précédente,
2) on replace la variable originale puis, on complète si nécessaire la factorisation.

exemple

Factoriser $4x^4 - 21x^2 + 5$

1) On pose $u = x^2$. Le polynôme devient $4u^2 - 21u + 5$. En utilisant les méthodes précédentes, on factorise le trinôme obtenu.

   a) $a = 4$, $b = -21$ et $c = 5$

   $$P = ac = (4)(5) = 20 \qquad S = b = -21$$

   Les valeurs cherchées sont -20 et -1
   Le terme du milieu $-21u$ devient $(-20u - u)$.

   b) $$4u^2 - 21u + 5 = 4u^2 - 20u - u + 5 = 4u(u - 5) - (u - 5) = (u - 5)(4u - 1)$$

2) On remplace u par x^2 et on obtient

   $$= (x^2 - 5)(4x^2 - 1)$$

   puis on complète la factorisation

   $$4x^4 - 21x^2 + 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(2x - 1)(2x + 1)$$

La méthode de factorisation *somme-produit* est efficace dans les cas où il est facile d'obtenir deux termes dont le produit P est ac et la somme S est b. Il sera toujours possible de factoriser dans les réels le trinôme $ax^2 + bx + c$ à l'aide de la formule permettant d'obtenir les racines d'une équation du second degré à la condition bien entendu que $b^2 - 4ac \geq 0$

Si $\quad p = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad$ et $\quad q = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

alors $\quad ax^2 + bx + c = a(x - p)(x - q)$

Lorsque $b^2 - 4ac < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ sera alors *irréductible* dans **R** c'est-à-dire non factorisable dans les réels.

factorisation complète dans R La factorisation d'un polynôme est complète dans les réels si tous les facteurs du polynôme sont du premier degré et/ou irréductibles du second degré.

exemple

Factoriser $3x^2 + 5x - 2$

Utilisons ici la formule permettant d'obtenir les racines d'une équation du second degré plutôt que d'utiliser la méthode somme-produit.

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

et $\quad p = \frac{1}{3} \quad q = -2$

on ne doit pas oublier de placer le coefficient de x^2 devant les facteurs

donc
$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3(x - p)(x - q) \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - (-2)) \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) \\ &= 3\left(\frac{3x - 1}{3}\right)(x + 2) \\ &= (3x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

exemple

Factoriser $3y^2 - 2y + 5$

rép: le trinôme est irréductible dans **R**

factorisation de polynômes quelconques En général la factorisation d'un polynôme de degré quelconque n'est pas un problème simple. Cependant dans certains cas, il sera possible d'obtenir une factorisation sans l'utilisation de techniques avancées.

exemple

Factoriser $12x^3 + x^2 - 6x$

- D'abord on met en évidence le facteur x.

$$12x^3 + x^2 - 6x = x(12x^2 + x - 6)$$

- On factorise ensuite le trinôme $12x^2 + x - 6$ en utilisant la méthode somme-produit.

  Les coefficients de $12x^2 + x - 6$ sont: $a = 12$, $b = 1$ et $c = -6$.

  $P = ac = -72$ $\qquad$ $S = b = 1$

  Les valeurs cherchées sont 9 et -8 car $(9)(-8) = -72$ et $(9) + (-8) = 1$. Le terme du milieu x devient $(9x - 8x)$.

$$\begin{aligned} 12x^3 + x^2 - 6x &= x(12x^2 + x - 6) \\ &= x(12x^2 + 9x - 8x - 6) \\ &= x\big(3x(4x + 3) - 2(4x + 3)\big) \\ &= x(3x - 2)(4x + 3) \end{aligned}$$

Lorsqu'on connaît un des facteurs du polynôme, il est alors préférable de diviser ce polynôme par le facteur connu.

exemple

Factoriser $3x^2 + 5x - 2$ sachant que $x + 2$ est un facteur du polynôme.

On divise le polynôme $3x^2 + 5x - 2$ par $x + 2$.

$$\begin{array}{rl} 3x^2 + 5x - 2 & \big|\ \underline{x + 2} \\ \underline{-(3x^2 + 6x)} & \quad 3x - 1 \\ -x - 2 & \\ \underline{-(-x - 2)} & \\ 0 & \end{array}$$

et $$3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x - 1)$$

exemple

Factoriser $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ sachant que $x + 3$ est un facteur du polynôme.

---

rép: $(x + 3)(x + 1)(2x - 1)$

résolution d'équations par la factorisation

La factorisation est un élément important dans la résolution d'équa-tions. Pour résoudre une équation polynomiale de la forme

$$P(x) = 0$$

il est recommandé de toujours commencer par essayer de factoriser le polynôme du membre de gauche. Si une factorisation complète est possible alors on obtient les racines de l'équation en <u>annulant chacun des facteurs</u>.

exemple

Résoudre l'équation $x^2 = x$

Écrivons d'abord l'équation sous la forme $P(x) = 0$.

$$x^2 - x = 0$$

Factorisons ensuite le membre de gauche de l'équation.

$$x(x-1) = 0$$

L'équation est satisfaite pour:

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

L'ensemble-solution est donc $\{0; 1\}$

exemple

Résoudre l'équation $2x^3 - x^2 = 3x$

rép: {0; 3/2; -1}

exemple

Résoudre l'équation $5x^3 = 1 + 5x - x^2$

rép: {-1; -1/5; 1}

résolution d'inéquations

L'ensemble-solution d'une inéquation polynomiale de la forme

$$P(x) < 0 \ , \ P(x) \leq 0 \ , \ P(x) > 0 \ \text{ou} \ P(x) \geq 0$$

correspond en général à un intervalle.

exemple

Trouver l'ensemble-solution de l'inéquation

$$2x - 3 < 8x + 9$$

---

lorsqu'on divise chaque membre d'une inégalité par un nombre négatif, on doit alors changer le sens de l'inégalité

$$2x - 3 < 8x + 9$$
$$2x - 8x < 9 + 3$$
$$-6x < 12$$
$$x > \frac{12}{-6}$$
$$x > -2$$

L'ensemble-solution correspond à l'ensemble de tous les nombres dans l'intervalle $]-2, \infty[$.

exemple

Trouver l'ensemble-solution de l'inéquation

$$x^2 < 16$$

Trouver l'ensemble-solution de $x^2 < 16$ est équivalent à trouver l'ensemble-solution de

$$x^2 - 16 < 0$$

$$\Rightarrow \qquad (x - 4)(x + 4) < 0$$

Le facteur $(x - 4)$ est positif lorsque $x > 4$ et négatif lorsque $x < 4$.
Le facteur $(x + 4)$ est positif lorsque $x > -4$ et négatif lorsque $x < -4$.
On constate en examinant le tableau du bas que $(x - 4)(x + 4)$ est négatif sur l'intervalle $]-4, 4[$.

x		-4	4
(x - 4)	-	-	+
(x + 4)	-	+	+
(x - 4)(x + 4)	+	-	+

L'ensemble-solution correspond à l'ensemble de tous les nombres dans l'intervalle $]-4, 4[$.

l'ensemble-solution des inéquations
$x^2 < a$
$x^2 > a$

Soit $a > 0$; l'ensemble-solution de l'inéquation

a) $x^2 < a$ est $]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[$,

b) $x^2 > a$ est $]-\infty, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, \infty[$.

exemple

Déterminer l'ensemble-solution des inéquations suivantes

a) $x^2 < 1$
b) $x^2 \geq 5$

---

rép: a) $]-1, 1[$; b) $]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty[$

exemple

Déterminer l'ensemble-solution de l'inéquation

$$(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$$

---

rép: $]-2, 1[\cup]3, \infty[$

Les fractions algébriques rationnelles

Le quotient de deux polynômes constitue ce qu'on appelle une fraction algébrique rationnelle.

exemple

$$\frac{3x - 1}{x^2 + 2x - 5} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x - 1}$$

sont deux fractions algébriques rationnelles.

forme réduite Une fraction algébrique est exprimée sous *forme réduite* si le numérateur et le dénominateur ne possèdent pas de facteurs communs. Cette forme réduite est obtenue par la simplification des facteurs communs non nuls de l'expression.

exemple

Simplifier $\dfrac{1 - x^2}{2x^2 - x - 1}$ pour $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1/2 , 1\}$

à noter que

$(1 - x) = - (x - 1)$

et

$\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$

$$\frac{1 - x^2}{2x^2 - x - 1} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(2x + 1)(x - 1)}$$

$$= \frac{-(x - 1)(1 + x)}{(2x + 1)(x - 1)}$$

$$= -\frac{1 + x}{2x + 1}$$

exemple

Simplifier $\dfrac{(x^2 - x - 6)(x^2 + 3x - 4)}{(x^2 - 2x + 1)(9x - x^3)}$ pour $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 0, 1, 3\}$

erreurs à éviter:

$\dfrac{\cancel{x} + 3}{\cancel{x}} = 3$

ou

$\dfrac{\cancel{x} - 4}{\cancel{x} + 2} = -2$

rép: $-\dfrac{(x + 2)(x + 4)}{x(x - 1)(x + 3)}$

L'addition et la soustraction de fractions algébriques est à l'image des mêmes opérations sur les nombres entiers. Avant d'effectuer une somme ou une différence de fractions algébriques, on doit s'assurer que tous les dénominateurs sont identiques. Dans le cas contraire, on cherchera le plus petit commun multiple des dénominateurs (le PPCM)

exemple Effectuer $\dfrac{1}{8x^2} + \dfrac{2x}{x^2 - 1} - \dfrac{5}{12x^2 + 12\,x}$

On cherche d'abord le PPCM des dénominateurs. On l'obtient en factorisant complètement chacun de ceux-ci.

$$8x^2, \quad (x - 1)(x + 1), \quad 12x(x + 1)$$

Le PPCM est la plus petite expression qui divise chacun des termes du haut. Le PPCM est donc

$$24x^2(x - 1)(x + 1)$$

On exprime ensuite chaque fraction à l'aide de ce PPCM puis, on effectue.

$$\frac{1}{8x^2} \times \frac{3(x - 1)(x + 1)}{3(x - 1)(x + 1)} + \frac{2x}{x^2 - 1} \times \frac{24x^2}{24x^2} - \frac{5}{12x^2 + 12\,x} \times \frac{2x(x - 1)}{2x(x - 1)}$$

$$= \frac{3(x - 1)(x + 1) + 48x^3 - 10x(x - 1)}{24x^2(x - 1)(x + 1)}$$

$$= \frac{3x^2 - 3 + 48x^3 -10x^2 + 10x}{24x^2(x - 1)(x + 1)}$$

$$= \frac{48x^3 - 7x^2 + 10x - 3}{24x^2(x - 1)(x + 1)}$$

exemple Effectuer $\dfrac{1}{x^2(x + 1)} - \dfrac{(x + 3)}{x(x^2 - 1)}$ pour $x \in \mathbf{R} \setminus \{ -1 ,0, 1\}$

(indiquer le PPCM des dénominateurs)

rép: le PPCM est $x^2(x^2 - 1)$; $\dfrac{-(x + 1)}{x^2(x - 1)}$

Certaines fractions algébriques plus complexes ont à la fois au numérateur et au dénominateur des expressions fractionnaires.

exemple

Simplifier $\dfrac{x + \dfrac{1}{x^2}}{x - \dfrac{1}{x}}$ pour $x \,\varepsilon\, \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$$\frac{x + \dfrac{1}{x^2}}{x - \dfrac{1}{x}} = \frac{x\,\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}}{x\,\dfrac{x}{x} - \dfrac{1}{x}}$$

on divise deux fractions en multipliant le numérateur par l'inverse multiplicatif du dénominateur

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$= \frac{\dfrac{x^3 + 1}{x^2}}{\dfrac{x^2 - 1}{x}}$$

$$= \frac{x^3 + 1}{x^2} \times \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x^2} \times \frac{x}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1}{x(x - 1)}$$

exemple

Simplifier $\dfrac{y + \dfrac{2y}{y - 2}}{1 + \dfrac{4}{y^2 - 4}}$ pour $x \,\varepsilon\, \mathbf{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$

rép: $y + 2$

Les expressions algébriques irrationnelles

Une expression algébrique qui possède au moins une variable (ou un groupe de termes) avec un exposant fractionnaire ou irrationnel est une expression irrationnelle.

exemple

$$\sqrt{x} - 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt[3]{x - 3}}{x + \sqrt{x + 1}}$$

sont deux expressions algébriques irrationnelles.

si n est pair et a est positif $\sqrt[n]{a} > 0$

Tout nombre réel positif possède deux racines carrées; une positive et une négative. Pour désigner la racine positive (la racine *principale*) on utilise le symbole $\sqrt{\ }$ et pour désigner la racine négative on utilise le symbole $-\sqrt{\ }$ Le nombre 4 possède deux racines carrées: 2 et -2. On dira que $-\sqrt{4} = -2$ et $\sqrt{4} = 2$. Si a est un nombre positif alors $\sqrt{a}$ correspond toujours à un nombre positif. Il en est de même pour toute racine paire. Par ailleurs, à tout nombre réel a est associé une seule racine réelle impaire du même signe que a.

racine paire et racine impaire d'un nombre réel

Si a est un nombre réel et n est un entier positif

a) pair alors $\sqrt[n]{a^n} = |a|$,

b) impair alors $\sqrt[n]{a^n} = a$.

exemple

Simplifier: a) $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

b) $\sqrt[4]{x^4} + x \quad$ si $x < 0$

c) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \quad$ si $0 < x < 1$

---

a) $$\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{-x}{x} = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

rép: b) 0 ; c) 1 - x

rationalisation La *rationalisation* est une opération qui a pour but d'éliminer les radicaux du dénominateur (ou du numérateur) d'une fraction algébrique irrationnelle. Pour cela il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction par une même quantité.

exemple Rationaliser le dénominateur: a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{a}{\sqrt{x}}$; c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

---

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c)

b)

Lorsque l'expression à rationaliser est un binôme de la forme

$$a \pm \sqrt{b} \quad \text{ou} \quad \sqrt{a} \pm b \quad \text{ou} \quad \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction algébrique par le conjugué de l'expression. Le conjugué du binôme $x - y$ est $x + y$ et vice versa.

Le conjugué de $\sqrt{5} - 3$ est $\sqrt{5} + 3$

Le conjugué de $1 + \sqrt{x}$ est $1 - \sqrt{x}$

Le conjugué de $\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x + 1}$ est $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x + 1}$

exemple Rationaliser le

a) dénominateur de $\dfrac{2}{3 - \sqrt{2}}$

b) numérateur de $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$

---

a) $\dfrac{2}{3 - \sqrt{2}} = \dfrac{2}{3 - \sqrt{2}} \times \dfrac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \dfrac{2(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \dfrac{2(3 + \sqrt{2})}{7}$

b) $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \dfrac{5 - 3}{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

exemple

Rationaliser le dénominateur et simplifier $\dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ pour $x \in [0, \infty[\setminus \{4\}$

on multiplie seulement les deux facteurs conjugués

$$\frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} = \sqrt{x} + 2$$

exemple

Rationaliser le dénominateur et simplifier $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x - 1}}$ pour $x \in [1, \infty[$

rép: $\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}$

exemple

Rationaliser le numérateur et simplifier $\dfrac{\sqrt{x + 7} - (x + 1)}{x - 2}$

pour $x \in [-7, \infty[\setminus \{ 2 \}$

rép: $\dfrac{-(x + 3)}{\sqrt{x + 7} + (x + 1)}$

simplification La simplification des formes irrationnelles obéit aux mêmes règles que les formes rationnelles. L'expression simplifiée ne devra jamais contenir d'exposants fractionnaires mais plutôt des radicaux. Il est souhaitable de toujours rationaliser les dénominateurs.

exemple

Simplifier $(1 + 3x)\sqrt{1 - 2x} - \sqrt{(1 - 2x)^3}$ pour $x \varepsilon [-\infty, 1/2]$

$\sqrt{(1-2x)^2} = |1-2x|$

puisque dans l'expression à simplifier $(1 - 2x) \geq 0$ on a donc

$\sqrt{(1-2x)^2} = 1-2x$

(1 + 3x)\r(1 - 2x) - \r((1 - 2x)^3) = (1 + 3x)\r(1 - 2x) - \r((1 - 2x)^2(1 - 2x))

$$= (1 + 3x)\sqrt{1 - 2x} - |1 - 2x|\sqrt{1 - 2x}$$

$$= (1 + 3x)\sqrt{1 - 2x} - (1 - 2x)\sqrt{1 - 2x}$$

$$= \sqrt{1 - 2x}\,\big((1 + 3x) - (1 - 2x)\big)$$

$$= \sqrt{1 - 2x}\,\big(1 + 3x - 1 + 2x\big)$$

$$= 5x\sqrt{1 - 2x}$$

exemple

Simplifier $\dfrac{\sqrt{x^3} - \dfrac{x}{\sqrt{x}}}{x - 1}$ pour $x \varepsilon\,]0, \infty[\setminus \{ 1 \}$

$$\frac{\sqrt{x^3} - \dfrac{x}{\sqrt{x}}}{x - 1} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^3}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \dfrac{x}{\sqrt{x}}}{x - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{x^{3/2} \,.\, x^{1/2} - x}{\sqrt{x}}}{x - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x}}}{\dfrac{x - 1}{1}}$$

$$= \frac{x(x - 1)}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{(x - 1)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

exemple Montrer que $\dfrac{\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} = \dfrac{1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$ pour $x \in]-1, 1[$

exemple Montrer que $\dfrac{\sqrt{(1 - x)^3} - x\sqrt{1 - x} + \dfrac{1 - x}{\sqrt{1 - x}}}{1 - x} = 2\sqrt{1 - x}$ pour $x \in]-\infty, 1[$

Exercices

1. a) Donner trois voisinages du point 3.
   b) Donner trois voisinages symétriques du point -1.

2. Dites si l'intervalle peut être considéré comme étant un voisinage du point indiqué.

   a) $]0, 5[\quad ; \quad 3$
   b) $]2, 4[\quad ; \quad \pi$
   c) $]-1, 4[\quad ; \quad 4$
   d) $[-2, 2] \quad ; \quad 0$
   e) $]-3, 5[\quad ; \quad -4$
   f) $]0, 1] \quad ; \quad 1/2$

3. Déterminer (s'il y a lieu) de quelle valeur l'intervalle est-il un voisinage symétrique.

   a) $]-1, 2[$
   b) $[-4, 4]$
   c) $]a, b[\quad (a < b)$

4. Vrai ou faux

   a) $]-7, -5[$ est un voisinage à gauche de -5,
   b) $]1, 6[= V^+(6)$,
   c) $V_o(2) =]1, 2[\cup]2, 5[$,
   d) $V(0) =]-a, a], \quad (a > 0)$

5. Évaluer (sans utiliser votre calculatrice).

   a) 3^4
   b) -2^{-2}
   c) $(-2)^{-2}$
   d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$
   e) $\frac{(27)^{-1}}{3^{-3}}$
   f) $\left(\frac{8^{-2}}{4^{-4}}\right)^3$
   g) $9^{3/2}$
   h) $8^{-2/3}$
   i) $\left(\frac{27}{64}\right)^{2/3}$
   j) $(2^{1/2} . 2^{-1/3})^3$
   k) $\left(\frac{3^7 . 2^7}{6^5}\right)^{-1/2}$
   l) $\sqrt{45} . \sqrt{5}$
   m) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}$
   n) $\sqrt{\sqrt{2}} . \sqrt[4]{8}$
   o) $(\sqrt[3]{4})^2 . (\sqrt[3]{4^4})$

6. Simplifier.

a) $(x^3\,x^{-4})^{-2}$

b) $\dfrac{(2x^2)^4}{2x^3}$

c) $\left(\dfrac{b^{-4}}{-3b^3}\right)^{-2}$

d) $\dfrac{(x^{2/3})^{3/4}}{x^{3/4}}$

e) $\dfrac{(2^{a+2})^2}{2^{2a+1}}$

f) $\dfrac{\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt{b}}$

7. Trouver parmi les expressions algébriques suivantes, celles qui sont des polynômes et dans le cas d'un polynôme, indiquer son degré.

a) $3x^2 + 5x - 1$

b) $1 - 8x^4$

c) x^5

d) $\sqrt{x} - 1$

e) 2

f) $x^{-2} + x - 7$

g) 0

h) $\sqrt{2}x^3 - 7$

8. Effectuer.

a) $(x^3 + 5x - 9) + (7x^2 - 4x -1)$

b) $(x^4 - 3x^2 + 4x) - (3x^3 + x^2 - 5x + 3)$

c) $(2y^2 - 3)(2y^2 + 3)$

d) $(5 - 3x)^2$

e) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

f) $(1 + x)^3$

g) $(y -1)(y^2 + 1)(y +1)$

h) $(2x^2 + x - 1)(x^2 - x + 2)$

i) $(x^2 - 4)(3 - x) - 4(x - 2)$

j) $(6x^2 + 5x - 6) \div (3x - 2)$

k) $(x^3 - x^2 + 3x + 1) \div (x^2 - 2)$

l) $(2x^3 + x^2 - 4) \div (x + 3)$

m) $(x^5 + 1) \div (x + 1)$

n) $(x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3) \div (x - 3)(x+1)$

9. Factoriser.

a) $x^3 + x$

b) $3x^3 - x^2 - 12x + 4$

c) $y^2 + 8y +15$

d) $a^2 - a - 72$

e) $y^2 - 17y + 42$

f) $6y^2 - 7y - 3$

g) $3x^2 + 19x - 14$

h) $64x^2 - 25$

i) $x^3 + 8y^3$

j) $x^4 - 13x^2 + 36$

k) $x^2 + 9$

l) $2x^2 - x + 4$

m) $x^7 - x^4$

n) $4x^4 - 11x^2 - 20$

o) $(2 - x)^4 - x(2 - x)^3$

p) $(1 - 3x)^2(5x - 3)^5 - (5x - 3)^4(1 - 3x)^3$

10. Résoudre.

a) $6x + 5 = 0$

b) $(5x - 3)(1 + 2x) = 0$

c) $2x^2 - 3x = 0$

d) $9x^2 - 1 = 0$

e) $x^3 - 64 = 0$

f) $x^2 + 4x - 21 = 0$

g) $2x^2 - x - 6 = 0$

h) $4x^2 + 100 = 0$

i) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

j) $x^5 = 9x$

k) $3x^3 = 5x^2 + 2x$

l) $(2x- 3)^2 + 17x = 15$

m) $(x - 2)^4(5x - 2) - (x - 2)^5 = 0$

n) $12x^3(x - 4)^2 + 8x(x - 4)^3 = 0$

11. Factoriser et ensuite trouver les racines des équations suivantes.

a) $x^3 - 6x^2 - 9x + 14 = 0$ si $x - 1$ est un facteur du polynôme,

b) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$ si $x - 3$ et $x + 1$ sont des facteurs du polynôme.

12. Déterminer l'ensemble-solution des inéquations suivantes.

a) $x - 3 < 3x + 7$

b) $x^2 - 1 \geq 0$

c) $x^2 < 36$

d) $x^2 + 4 > 0$

e) $2x^2 - 6 \leq 0$

f) $(x + 1)(x - 5) \geq 0$

g) $x^2 - x < 0$

h) $\dfrac{x + 2}{x - 4} \leq 0$

13. Simplifier.

a) $\dfrac{2x^3 - 8x}{2x^2 - 4x}$

b) $\dfrac{x^2 - 8x + 12}{4 - x^2}$

c) $\dfrac{(8y + 4y^2)^2}{y^4 + 8y}$

d) $\left(\dfrac{1 - 4x^2}{3 - 5x - 2x^2}\right)\left(\dfrac{5x + 15}{8x^3 + 1}\right)$

e) $\dfrac{x - 2}{\dfrac{x + 2}{x^2 - 4}}$

f) $\dfrac{\dfrac{x - 2}{x + 2}}{x^2 - 4}$

14. Trouver le plus petit commun multiple des dénominateurs (le PPCM).

a) $\dfrac{3}{4y^2}$, $\dfrac{5}{6y}$, $\dfrac{1}{9}$;

b) $\dfrac{3}{4x^2 - 1}$, $\dfrac{1}{2x + 1}$, $\dfrac{5}{2x - 1}$;

c) $\dfrac{x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$, $\dfrac{3x}{x^2 - 4x + 4}$, $\dfrac{2x + 1}{x^4 - 2x^3}$;

d) $\dfrac{3x}{x^2 - 1}$, $\dfrac{2x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$, $\dfrac{3x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

15. Effectuer puis simplifier.

a) $\dfrac{3}{2x + 3} + \dfrac{2x}{2x + 3}$

b) $\dfrac{x}{1 - x} + \dfrac{1}{x - 1}$

c) $\dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4} + \dfrac{2}{x + 2}$

d) $\dfrac{3y}{y^2 - 7y + 10} - \dfrac{2y}{y^2 - 8y + 15}$

e) $\dfrac{9x + 2}{3x^2 - 2x - 8} + \dfrac{7}{3x^2 + x - 4}$

f) $\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{x}{4 - x^2} - \dfrac{2x - 3}{4 - 4x + x^2}$

16. Simplifier.

a) $\dfrac{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{x - 1}$

b) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{9}}{\dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{x^2}}$

17. Simplifier.

a) $\sqrt{(x + 1)^2}$

b) $\sqrt[3]{(-2x)^3}$

c) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} - (x + 3)$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{x^4}}{\sqrt[3]{x^3}}$ si $x < 0$

18. Rendre le dénominateur rationnel puis simplifier.

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}$

c) $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{1 - \sqrt{x - 1}}$

d) $\dfrac{4 - x^2}{\sqrt{3x - 2} - (x - 4)}$

19. Rendre le numérateur rationnel, puis simplifier.

a) $\dfrac{\sqrt{2+x}\ -\ 3}{x-7}$ b) $\dfrac{(1-x)\ +\ \sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}$

20. Montrer.

a) $\sqrt{x}\ -\ \dfrac{x}{2\sqrt{x}}\ =\ \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ pour $x \neq 0$;

b) $4\sqrt{x}\ -\ 5\sqrt{x^3}\ +\ \sqrt{x^5}\ =\ (x-4)(x-1)\sqrt{x}$;

c) $\dfrac{\sqrt{3x-4}\ -\ \dfrac{2(3-x)}{\sqrt{3x-4}}}{(x-2)^3}\ =\ \dfrac{5}{(x-2)^2\sqrt{3x-4}}$;

d) $\dfrac{2\sqrt{(x-1)^3}\ -\ 3(x-2)\sqrt{x-1}}{(x-4)^2}\ =\ -\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-4}$;

e) $\dfrac{\sqrt{x}\ -\ \dfrac{(x^2-1)}{\sqrt{x^3}}}{x}\ =\ \dfrac{\sqrt{x}}{x^3}$.

Réponses aux exercices

1. a)]2, 4[,]1/2, 7[,]-2, 5[
   b)]-2, 0[,]-3/2, -1/2[,]-6, 4[

2. a) oui
   b) oui
   c) non
   d) non
   e) non
   f) non

3. a) $\frac{1}{2}$
   b) aucune valeur
   c) $\frac{a + b}{2}$

4. a) vrai
   b) faux
   c) vrai
   d) faux

5. a) 81
   b) -1/4
   c) 1/4
   d) 27/8
   e) 1
   f) 64
   g) 27
   h) 1/4
   i) 9/16
   j) $\sqrt{2}$
   k) 1/6
   l) 15
   m) 3/4
   n) 2
   o) 16

6. a) x^2
   b) $8x^5$
   c) $9b^{14}$
   d) $x^{-1/4}$
   e) 8
   f) $\sqrt[4]{ab}$

7. a) polynôme (degré 2)
   b) polynôme (degré 4)
   c) polynôme (degré 5)
   d) ce n'est pas un polynôme
   e) polynôme (degré 0)
   f) ce n'est pas un polynôme
   g) polynôme (aucun degré)
   h) polynôme (degré 3)

8. a) $x^3 + 7x^2 + x - 10$
   b) $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 9x - 3$
   c) $4y^4 - 9$
   d) $9x^2 - 30x + 25$
   e) $8x^3 - 1$
   f) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
   g) $y^4 - 1$
   h) $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$
   i) $-x^3 + 3x^2 - 4$
   j) $2x + 3$
   k) $x - 1 + \dfrac{5x - 1}{x^2 - 2}$
   l) $2x^2 - 5x + 15 - \dfrac{49}{x+3}$
   m) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
   n) $x^2 + 1$

9. a) $x(x^2 + 1)$
   b) $(3x - 1)(x - 2)(x + 2)$
   c) $(y + 5)(y + 3)$
   d) $(a - 9)(a + 8)$
   e) $(y - 14)(y - 3)$
   f) $(2y - 3)(3y + 1)$
   g) $(x + 7)(3x - 2)$
   h) $(8x - 5)(8x + 5)$
   i) $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$
   j) $(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$
   k) $x^2 + 9$ est irréductible
   l) $2x^2 - x + 4$ est irréductible
   m) $x^4(x - 1)(x^2 + x + 1)$
   n) $(x - 2)(x + 2)(4x^2 + 5)$
   o) $2(1 - x)(2 - x)^3$
   p) $4(2x - 1)(1 - 3x)^2(5x - 3)^4$

10. a) $\{-5/6\}$
    b) $\{-1/2; 3/5\}$
    c) $\{0; 3/2\}$
    d) $\{-1/3; 1/3\}$
    e) $\{4\}$
    f) $\{-7; 3\}$
    g) $\{-3/2; 2\}$
    h) $\{ \}$
    i) $\{-2; 2\}$
    j) $\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$
    k) $\{-1/3; 0; 2\}$
    l) $\{-2; 3/4\}$
    m) $\{0; 2\}$
    n) $\{-2; 0; 4/3; 4\}$

11. a) $(x + 2)(x - 1)(x - 7)$ $\{-2, 1, 7\}$
    b) $(x + 1)(x - 3)(x^2 + 1)$ $\{-1, 3\}$

12. a) $]-5, \infty[$
b) $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$
c) $]-6, 6[$
d) **R**
e) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
f) $]-\infty, -1] \cup [5, \infty[$
g) $]0, 1[$
h) $[-2, 4[$

13. a) $x + 2 \quad (x \neq 2,\ x \neq 0)$
b) $-\dfrac{x - 6}{x + 2} \quad (x \neq 2)$
c) $\dfrac{16y(2 + y)}{y^2 - 2y + 4} \quad (y \neq -2,\ y \neq 0)$
d) $\dfrac{5}{4x^2 - 2x + 1} \quad (x \neq \pm 1/2,\ x \neq -3)$
e) $(x - 2)^2 \quad (x \neq \pm 2)$
f) $\dfrac{1}{(x + 2)^2} \quad (x \neq 2)$

14. a) $36y^2$ c) $x^3(2x - 1)(x - 2)^2$
b) $4x^2 - 1$
d) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

15. a) $1 \quad (x \neq -3/2)$
b) $-1 \quad (x \neq 1)$
c) $\dfrac{x}{x - 2} \quad (x \neq -2)$
d) $\dfrac{y}{(y - 2)(y - 3)} \quad (y \neq 5)$
e) $\dfrac{3x - 4}{(x - 1)(x - 2)} \quad (x \neq -4/3)$
f) $\dfrac{10 - 7x}{(x - 2)^2(x + 2)}$

16. a) $\dfrac{x - 1}{x^2} \quad (x \neq 1)$
b) $-\dfrac{x + 3}{x - 3} \quad (x \neq 0)$

17. a) $|x + 1|$
b) $-2x$
c) 0 si $x \geq -3$; $-2x - 6$ si $x < -3$
d) -1

18. a) $2\sqrt{3}$
b) $\sqrt{x} - 1 \quad (x \neq 1)$
c) $-(x + 6)(1 + \sqrt{x - 1}) \quad (x \neq 2)$
d) $\dfrac{(x + 2)(\sqrt{3x - 2} + (x - 4))}{x - 9} \quad (x \neq 2)$

19. a) $\dfrac{1}{\sqrt{2 + x} + 3} \quad (x \neq 7)$
b) $\dfrac{1}{(1 - x) - \sqrt{x - 1}} \quad (x \neq 1,\ x \neq 2)$

Les fonctions

fonction

domaine et image

Une *fonction* f est une règle qui associe à tout élément d'un ensemble de départ A au plus un élément d'un ensemble d'arrivée B.

L'ensemble A est appelé le *domaine* de la fonction f (dom f) tandis que l'ensemble B est appelé l'*image* de la fonction f (ima f).

fonction réelle

Nous limiterons notre étude à une catégorie de fonctions dont le domaine et l'image sont des sous-ensembles des nombres réels. Cette catégorie de fonctions porte le nom de *fonctions réelles*.

Les éléments du domaine seront représentés à l'aide d'une lettre (souvent cette lettre sera x) appelée *variable indépendante* ceux de l'image par une autre lettre (en général la lettre y) appelée *variable dépendante*. La règle définissant la fonction est donnée à l'aide d'une équation de la forme $y=f(x)$.

exemple

Soit f une fonction réelle définie par l'équation $y = x^2 + 1$.

La fonction f associe à la valeur $x = 2$, la valeur $y = 5$. On dira dans ce cas que $f(2) = 5$. Pour toute autre valeur réelle de x, il existe une valeur réelle de y. Le domaine de la fonction f (dom f) est donc

$$\text{dom } f = \mathbf{R}$$

Il est évidemment possible d'utiliser d'autres lettres pour définir une fonction (g, h, f_1, f_2, ...) et ses variables (u, v, t, y, z, ...).

exemple

Soit g une fonction réelle définie par l'équation $u = \dfrac{3t + 5}{t - 3}$

La fonction g associe à la valeur $t = 1$, la valeur $u = -4$. On dira dans ce cas que $g(1) = -4$. Pour toute autre valeur réelle de t, il existe une valeur réelle de u sauf si $t = 3$ (cette valeur de t annule le dénominateur).

$$\text{dom } g = \mathbf{R} \setminus \{3\}$$

Le domaine d'une fonction correspond à l'ensemble des valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction peut être évaluée.

Lorsqu'on cherche à trouver le domaine d'une fonction, on doit porter une attention particulière aux dénominateurs ainsi qu'aux racines paires. Les valeurs de la variable indépendante ne doivent jamais:

a) *annuler un dénominateur*,
b) *rendre négative une expression sous une racine paire*.

Par la suite, afin d'alléger la notation, on parlera de la fonction $y = f(x)$ plutôt que de la fonction réelle f définie par l'équation $y = f(x)$.

exemple

Trouver le domaine de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 4}$.

À cause de la racine paire au numérateur,

$$x + 1 \geq 0$$
$$x \geq -1$$

et à cause du dénominateur,

$$x^2 - 4 \neq 0$$
$$x \neq \pm 2 \ .$$

Donc

$$\text{dom } f = [-1, \infty[\setminus \{2\}$$

exemple

Trouver le domaine de la fonction $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}{2x^2 + x - 1}$.

rép: dom h = [-5, 3] \ { -1, 1/2 }

exemple

Trouver le domaine de la fonction $f(x) = \sqrt{9 - x^2} - \sqrt[3]{x}$.

rép: dom f = [-3, 3]

graphe

Soit f une fonction réelle. Le graphe de f est l'ensemble des points (x,y) tels que $y = f(x)$.

Dans le cas d'une fonction réelle, il est possible de représenter graphiquement le comportement de la fonction à l'aide d'un plan cartésien. Il suffit pour cela de considérer les éléments du graphe de la fonction et de les porter sur le plan cartésien. La variable indépendante sera placée en abscisse tandis que la variable dépendante sera placée en ordonnée. Cette représentation graphique porte simplement le nom de *graphique* de la fonction. Dans les cas simples, quelques points suffiront pour obtenir le tracé.

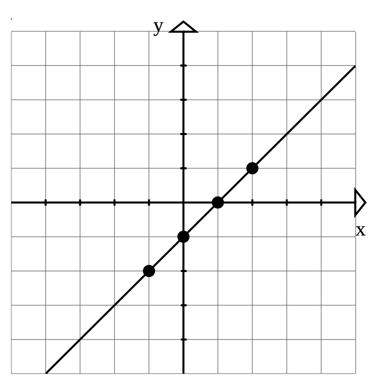
exemple

Tracer le graphique de la fonction $f(x) = x - 1$.

On trouve d'abord quelques points du graphe de la fonction.

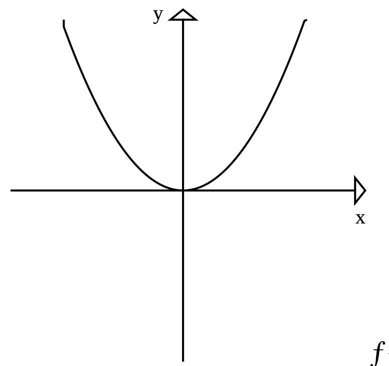
f = { (0, -1), (1, 0), (2, 1), (-1, -2), ... }

Puis on porte ces points sur un plan cartésien. On remarque rapidement qu'ils forment une droite.

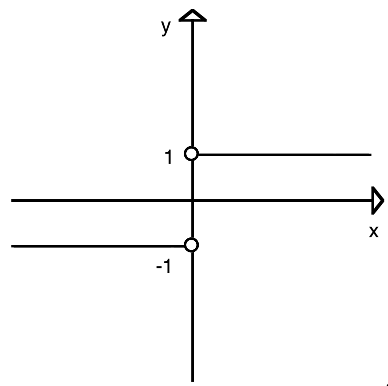


exemple

Quels sont les graphiques représentant une fonction? Dans le cas où le graphique représente une fonction, trouver le domaine et l'image de cette fonction.

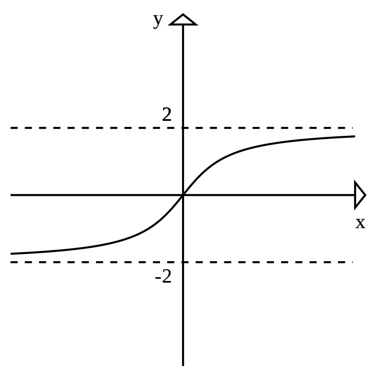


f_1

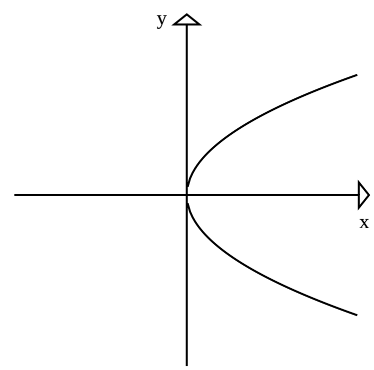


f_2

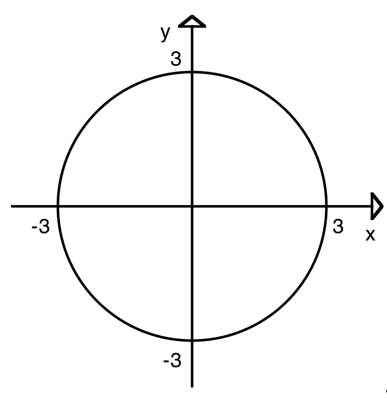
il est facile de savoir si un graphique représente une fonction; si une droite verticale coupe une courbe plus d'une fois, cette courbe ne représente pas une fonction



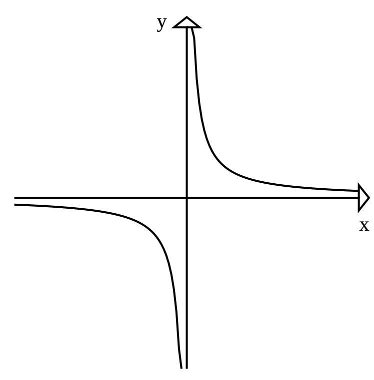
f_3



f_4



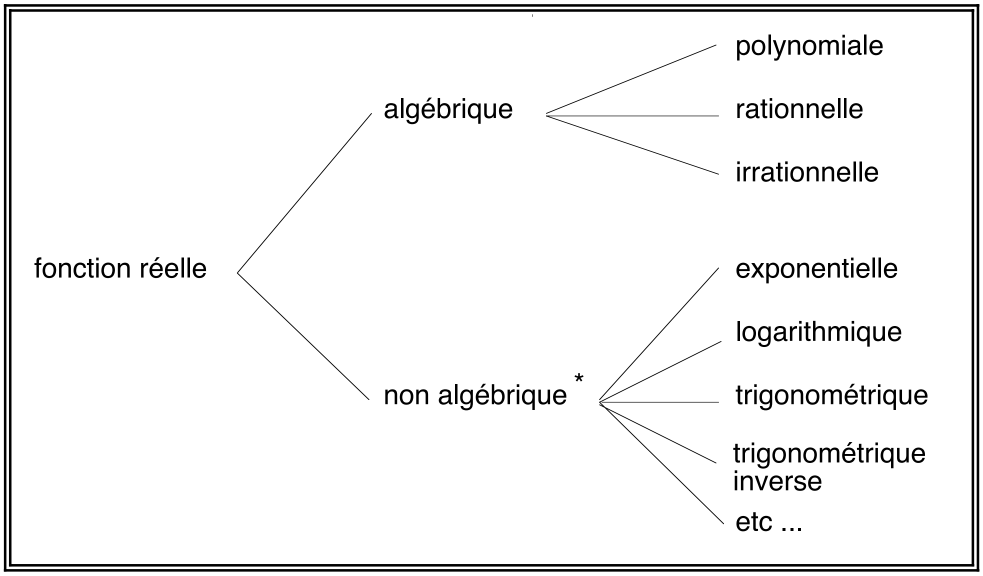
f_5



f_6

rép: f_1 ; $\mathrm{dom}(f_1) = \mathbf{R}$; $\mathrm{ima}(f_1) = [0, \infty[$
f_2 ; $\mathrm{dom}(f_2) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; $\mathrm{ima}(f_2) = \{-1, 1\}$
f_3 ; $\mathrm{dom}(f_3) = \mathbf{R}$; $\mathrm{ima}(f_3) =]-2, 2[$
f_6 ; $\mathrm{dom}(f_6) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; $\mathrm{ima}(f_6) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

Classification des fonctions réelles



Les fonctions algébriques

fonction polynomiale

Une *fonction polynomiale* est définie à partir d'une équation de la forme

$$y = P(x)$$

où P(x) est un *polynôme* c'est-à-dire une expression algébrique de la forme

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ ... \ + a_nx^n$$

($a_0, a_1, a_2, ... a_n$ sont des constantes réelles et n un nombre naturel)

exemple

Les fonctions suivantes sont toutes des fonctions polynomiales.

a) $f_1(x) = 3x - 2$

b) $f_2(x) = 2 - 3x - 4x^2$

c) $f_3(x) = x^7 - 5x^3 + 2x + 9$

* Le rappel portera uniquement sur les fonctions algébriques puisque pour les quatre premiers chapitres, seules les fonctions de ce type seront considérées. À partir du cinquième chapitre, on s'intéressera aux fonctions non algébriques. Le rappel sur ces notions viendra à ce moment.

Les fonctions *linéaires* et les fonctions *quadratiques* sont deux types de fonctions polynomiales.

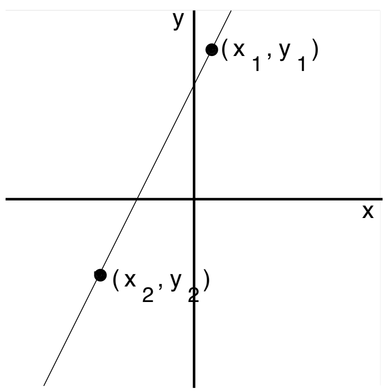
fonction linéaire

> Une fonction polynomiale de la forme
>
> $f(x) = mx + b$ où m et b sont des nombres réels
>
> est appelée *fonction linéaire*.

caractéristiques de la fonction linéaire $f(x) = mx + b$

a) Le graphique d'une fonction linéaire est une droite.
b) Puisque $f(0) = b$ alors la droite coupe l'axe des y en $y = b$ (b est l'ordonnée à l'origine).
c) m représente la *pente* de la droite.

pente d'une droite



La pente d'une droite passant par les points distincts

(x_1, y_1) et (x_2, y_2)

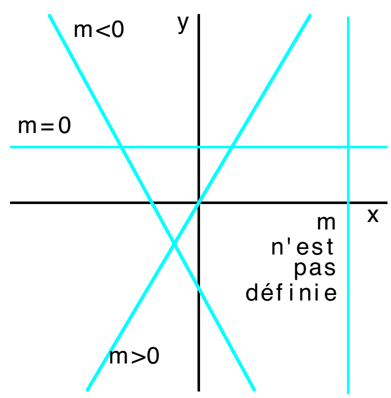
est donnée par le rapport

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2$$

Lorsque

$x_1 = x_2$, la droite est verticale (la pente n'est pas définie),

$y_1 = y_2$, la droite est horizontale (la pente est nulle).



équation de la droite de pente m passant par le point (x_1, y_1)

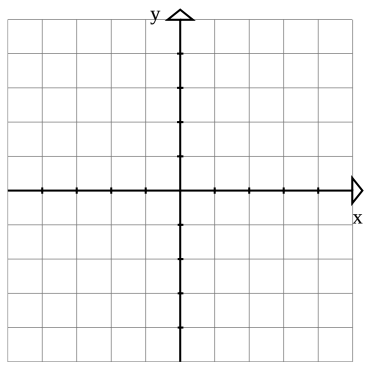
Lorsqu'on connaît la pente m d'une droite et un point (x_1, y_1) sur cette droite, l'équation de cette droite sera $y = mx + b$.

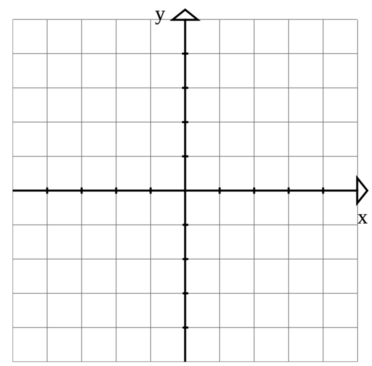
La droite de pente m passant par le point (x_1, y_1) est donnée par l'équation

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

exemple Tracer le graphique de chacune des fonctions

a) $f(x) = 3x - 1$ b) $g(x) = 2$





exemple Déterminer la pente de la droite passant par les points (-1,2) et (1, -1).

rép: $m = -3/2$

exemple Trouver l'équation de la droite passant par

a) le point (-3, 2) et dont la pente est 5,
b) les points (-1, 1) et (0, 3).

rép: a) $y = 5x + 17$; b) $y = 2x + 3$

fonction quadratique

Une fonction polynomiale de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{où} \quad a,\ b \text{ et } c \ \text{ sont des nombres réels et } a \neq 0$$

est appelée *fonction quadratique*.

caractéristiques de la fonction quadratique $f(x) = ax^2+bx+c$

a) Le graphique d'une fonction quadratique est une parabole.

b) Si $a > 0$ alors la parabole est orientée vers le haut;
si $a < 0$ alors la parabole est orientée vers le bas.

intersection de la parabole avec l'axe des x

c) Les intersections de la parabole avec l'axe des x (s'il y en a), sont les racines réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. On obtient ces valeurs, en factorisant le polynôme ou en utilisant la formule du second degré

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

abscisse du sommet

d) L'abscisse du point correspondant au sommet de la parabole est

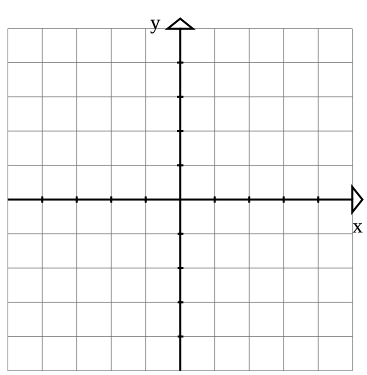
$$x = -\frac{b}{2a}$$

exemple

Tracer le graphique de chacune des fonctions. Identifier s'il y a lieu, l'intersection du graphique avec l'axe des x ainsi que le sommet du graphique.

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

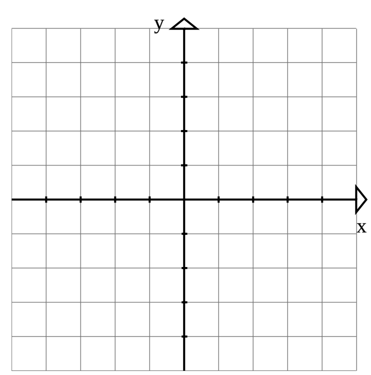
____



rép: racines {-3,1}
maximum (-1, 4)

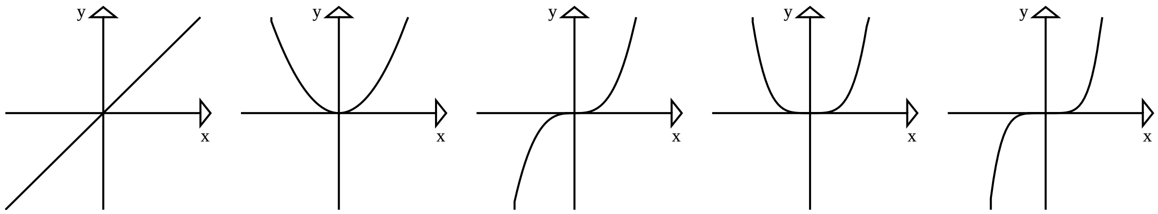
b) $g(x) = 2 + 2x + x^2$

____



rép: racine { }
minimum (-1, 1)

Graphiques des fonctions polynomiales de la forme $f(x) = x^n$ (n = 1, 2, 3, 4, 5, ...)



$f(x) = x$ $\quad$ $f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^3$ $\quad$ $f(x) = x^4$ $\quad$ $f(x) = x^5$

Lorsque la valeur de n est supérieure à 1, les graphiques de $f(x) = x^n$ sont uniquement de deux formes de plus en plus aplaties autour de x =0.

fonction rationnelle

Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} , \quad Q(x) \neq 0$$

où P(x) et Q(x) sont deux polynômes est appelée *fonction rationnelle*.

exemple

Les fonctions suivantes sont toutes des fonctions rationnelles.

a) $f_1(x) = \frac{2}{x}$

b) $f_2(x) = \frac{x^3 + 2x - 1}{x - 1}$

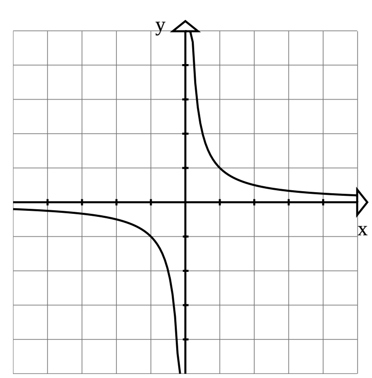
c) $f_3(x) = x + \frac{x - 2}{x + 5}$

(la dernière fonction peut se ramener à la forme d'un quotient de deux polynômes)

exemple

Tracer le graphique de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{1}{x}$.

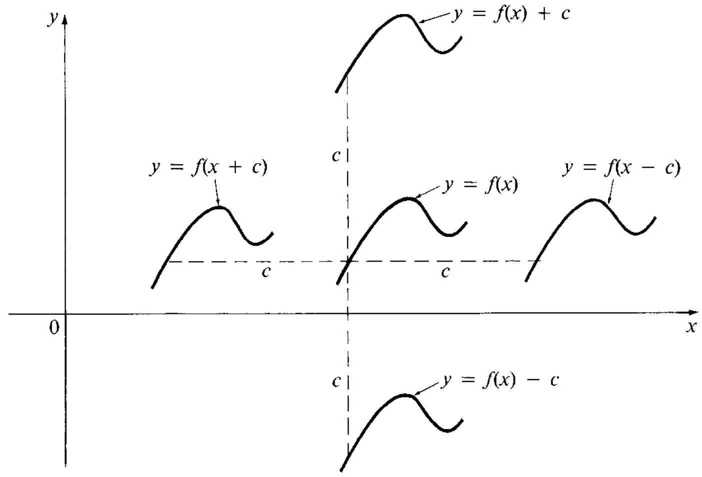
Le graphique de cette fonction peut être obtenu en se donnant suffisamment de points. On note que zéro ne fait pas partie du domaine (ni de l'image).



translations horizontales et verticales

Soit $c > 0$. Pour obtenir le graphique de

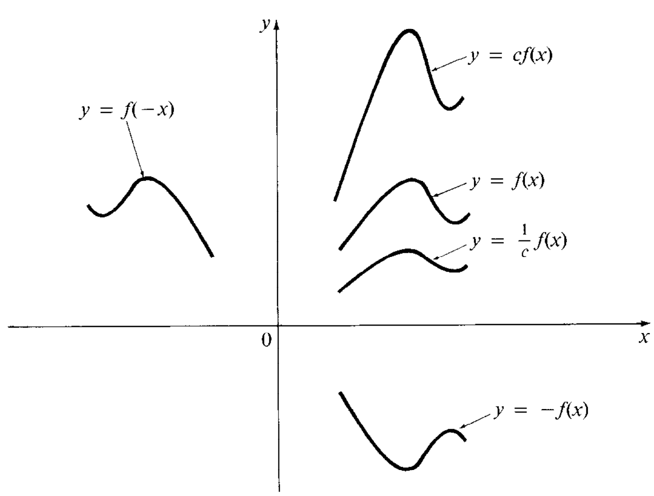
a) $y = f(x) + c$, on déplace de c unités vers le haut le graphique de $y = f(x)$,
b) $y = f(x) - c$, on déplace de c unités vers le bas le graphique de $y = f(x)$,
c) $y = f(x - c)$, on déplace de c unités vers la droite le graphique de $y = f(x)$,
d) $y = f(x + c)$, on déplace de c unités vers la gauche le graphique de $y = f(x)$,



compression, étirement et rotation

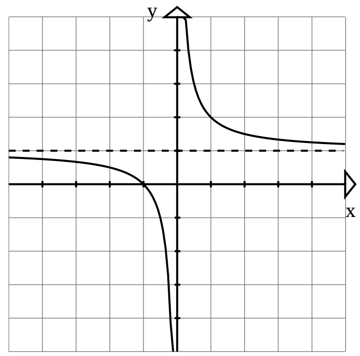
Soit $c > 1$. Pour obtenir le graphique de

a) $y = c\,f(x)$, on étire le graphique de $y = f(x)$ verticalement d'un facteur c,
b) $y = \frac{1}{c} f(x)$, on comprime le graphique de $y = f(x)$ verticalement d'un facteur c,
c) $y = -f(x)$, on fait une rotation du graphique de $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x,
d) $y = f(-x)$, on fait une rotation du graphique de $y = f(x)$ par rapport à l'axe des y.

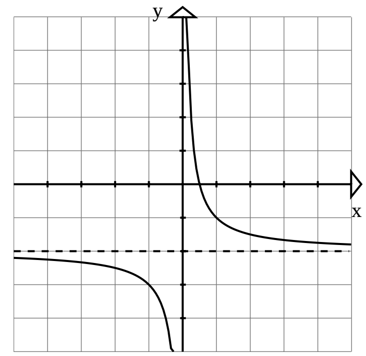


exemple

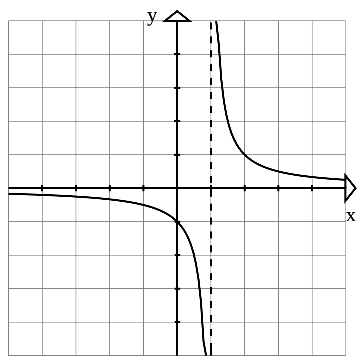
en se servant des règles de la page précédente, on obtient à partir du graphique de f(x) = 1/x le tracé des 8 courbes suivantes



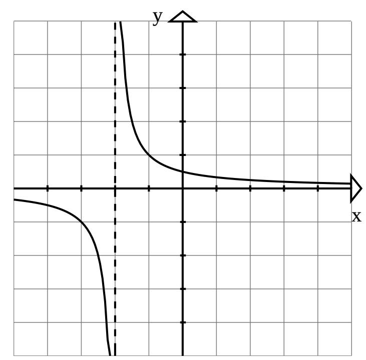
$f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$



$f(x) = \dfrac{1}{x} - 2$



$f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$



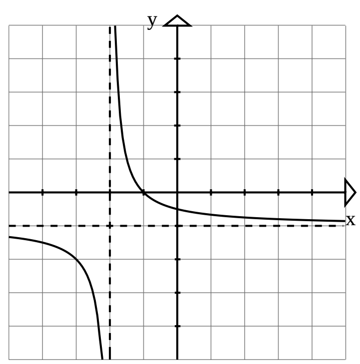
$f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

toute fonction pouvant s'écrire sous la forme

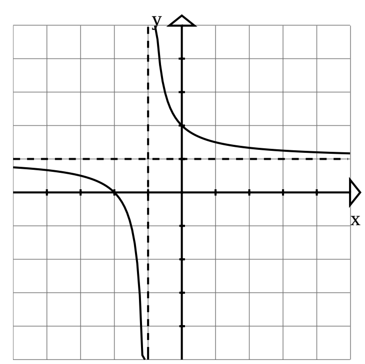
$f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

où $c \neq 0$, $x \neq -d/c$

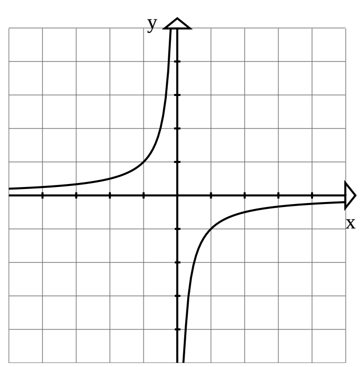
est appelée "fonction homographique"



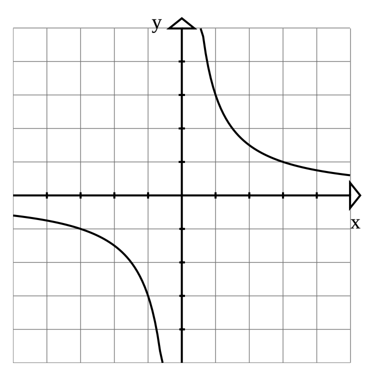
$f(x) = \dfrac{1}{x + 2} - 1$



$f(x) = \dfrac{x + 2}{x + 1}$



$f(x) = -\dfrac{1}{x}$



$f(x) = \dfrac{3}{x}$

fonction irrationnelle

On appelle *fonction irrationnelle* une fonction algébrique qui n'est pas de type polynomial ou de type rationnel.

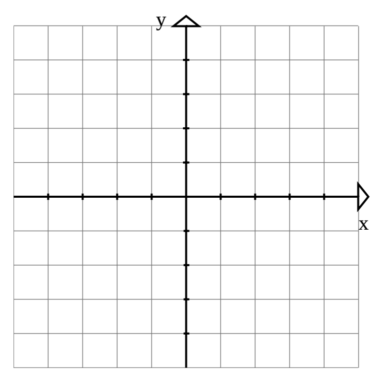
exemple

Les fonctions suivantes sont toutes des fonctions irrationnelles.

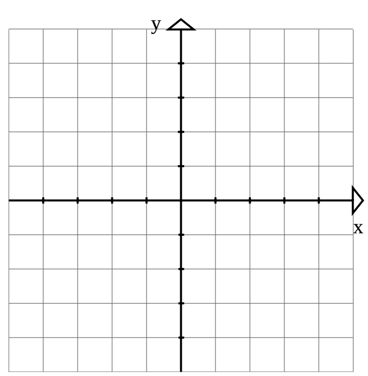
a) $f_1(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x} - x}$ b) $f_2(x) = x^{-3/4} + x^2$ c) $f_3(x) = \sqrt{2x - 1}$

exemple

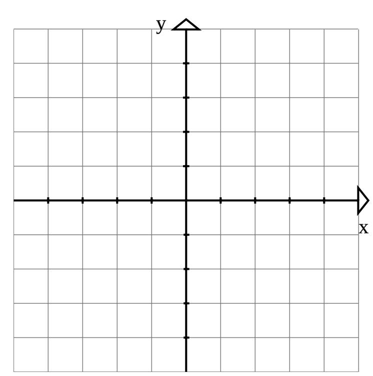
Tracer le graphique de la fonction irrationnelle $f(x) = \sqrt{x}$ en vous donnant suffisamment de points. Puis, en vous servant de ce graphique, tracer les autres graphiques.



$f(x) = \sqrt{x}$



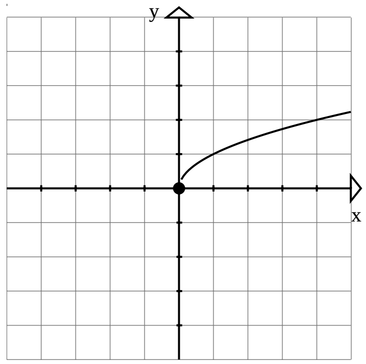
$f(x) = \sqrt{x - 1}$



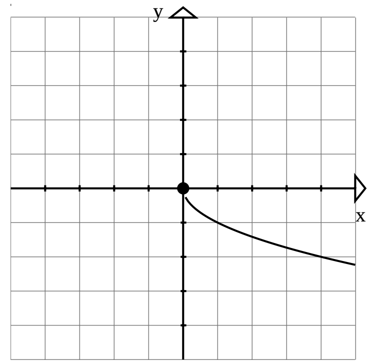
$f(x) = \sqrt{x + 2} - 3$

On rappelle que les fonctions d'équations $y = f(x)$ et $y = - f(x)$ sont des fonctions symétriques par rapport à l'axe des x tandis que les fonctions d'équations $y = f(x)$ et $y = f(-x)$ sont des fonctions symétriques par rapport à l'axe des y.

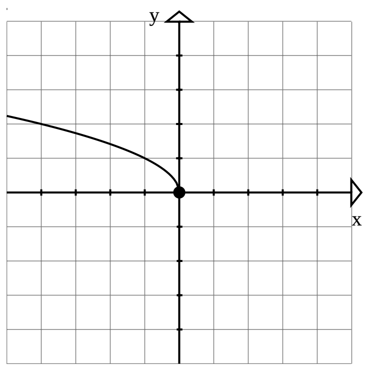
exemple



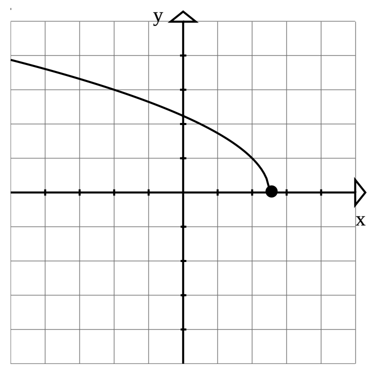
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = -\sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt{-x}$



$f(x) = \sqrt{5 - 2x} = \sqrt{2}\,\sqrt{-x + 5/2}$

exemple

Identifier sur le tableau du bas chacune des fonctions algébriques.

		polynomiale		rationnelle	irrationnelle
	linéaire	quadratique	autres		
$f(x) = 1 + x - 3x^2$		√			
$f(x) = x^{1/3}$					
$f(x) = 5x$					
$f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 5}{3x + 4}$					
$f(x) = \dfrac{1}{3}$					
$f(x) = x^{\pi} + x - 3$					
$f(x) = x(x - 1)(x + 1)$					
$f(x) = 2x^{-2} + 1$					
$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$					

fonction en branches

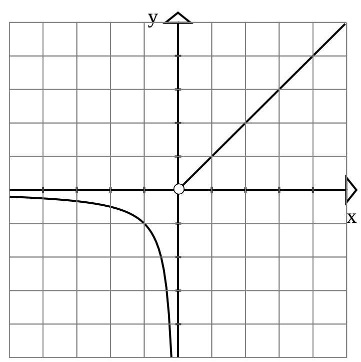
Certaines fonctions sont définies en utilisant plus d'une équation. On les appelle des *fonctions en branches*.

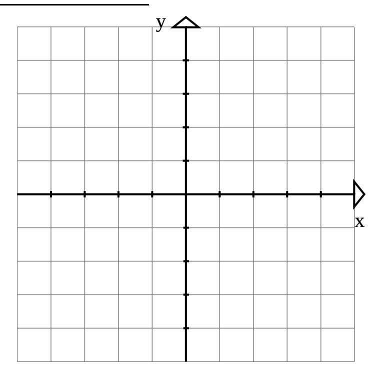
exemple

Tracer le graphique de chacune des fonctions en branches suivantes.

a) $f(\text{x}) = \begin{cases} \text{x} & \text{si } \text{x} > 0 \\ \dfrac{1}{\text{x}} & \text{si } \text{x} < 0 \end{cases}$

b) $g(\text{x}) = \begin{cases} \text{x}^2 - 1 & \text{si } \text{x} < 0 \\ 4 - \text{x} & \text{si } 0 \le \text{x} < 1 \\ -3 & \text{si } \text{x} > 1 \end{cases}$

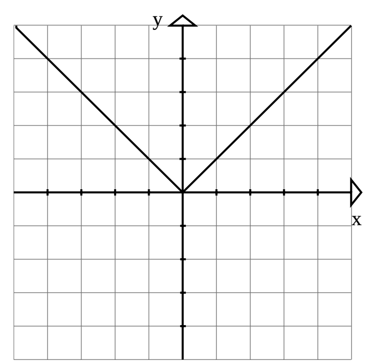




les fonctions
| x | et $\sqrt{x^2}$

Une fonction en branches très utile en mathématiques est la fonction *valeur absolue*

$$f(\text{x}) = |\text{x}| = \begin{cases} \text{x} & \text{si } \text{x} \ge 0 \\ -\text{x} & \text{si } \text{x} < 0 \end{cases}$$



Rappelons que

$|x| = \sqrt{x^2}$

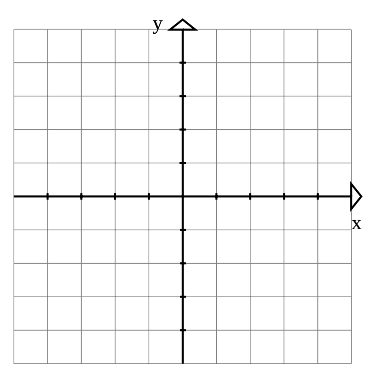
$$f(\text{x}) = |\text{x}| \text{ et } g(\text{x}) = \sqrt{\text{x}^2}$$

sont deux fonctions égales.

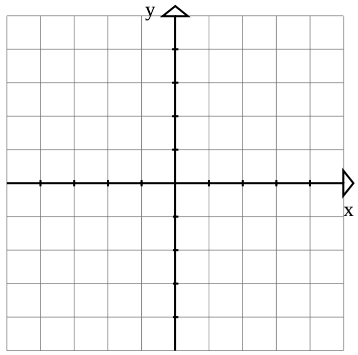
exemple

Tracer le graphique de chacune des fonctions en vous servant du graphique de

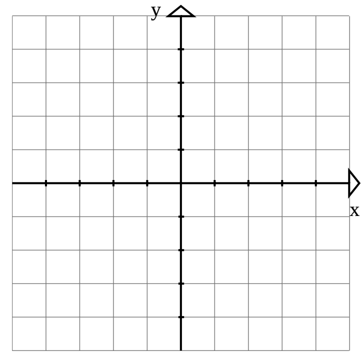
$$f(\text{x}) = |\text{x}| \;\; (\, f(\text{x}) = \sqrt{\text{x}^2}\,)$$



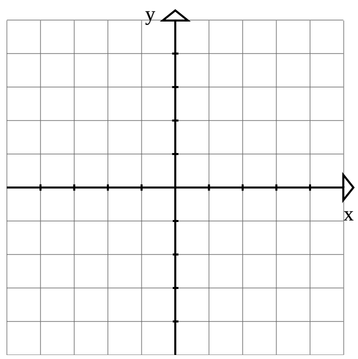
$f(\text{x}) = |\text{x} + 1|$



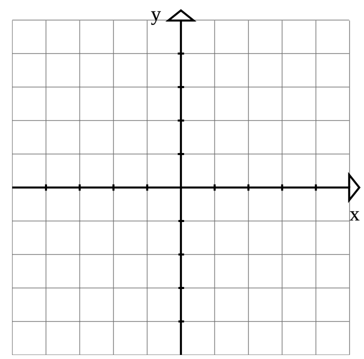
$f(x) = |x - 2| + 1$



$f(x) = -|x - 1|$



$f(x) = 2 - |x - 3|$



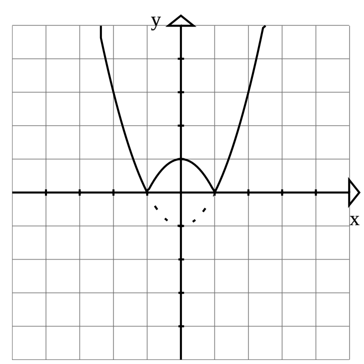
$f(x) = 1 + \sqrt{(x + 2)^2}$

exemple Tracer le graphique de $f(x) = |x^2 - 1|$.

On trace d'abord le graphique de

$$y = x^2 - 1$$

puis on fait faire une rotation de la partie négative de ce graphique autour de l'axe des x.



$f(x) = |x^2 - 1|$

À partir de fonctions, il est possible d'en créer d'autres en utilisant les opérations algébriques: *somme, différence, produit et quotient*.

opérations sur les fonctions

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions. La fonction

1) *somme* correspond à la fonction $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
2) *différence* correspond à la fonction $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$;
3) *produit* correspond à la fonction $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$;
4) *quotient* correspond à la fonction $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$, $g(x) \neq 0$.

Le domaine des fonctions *somme*, *différence*, *produit* et *quotient* est le domaine commun des fonctions $f(x)$ et $g(x)$

$$\text{dom } f \cap \text{dom } g$$

sans oublier la restriction pour la fonction *quotient* que le dénominateur $g(x)$ ne peut être nul.

exemple

Trouver

a) $(f+g)(x)$ b) $(g-f)(x)$ c) $(fg)(x)$ d) $(g/f)(x)$

$$\text{si } f(x) = \frac{x}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

D'abord trouvons le domaine des fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

$$\text{dom f} = \mathbf{R} \setminus \{1\} \quad \text{et} \quad \text{dom g} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)x} \qquad \text{pour } x \text{ dans } \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$$

b) $(g-f)(x) = g(x) - f(x)$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}$$

$$= \frac{-x^2 + x - 1}{(x-1)x} \qquad \text{pour } x \text{ dans } \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$$

c) $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$

$$= \frac{x}{x - 1} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x - 1} \qquad \text{pour } x \text{ dans } \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$$

b) $(g\backslash f)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

$$= \frac{1/x}{x/(x - 1)}$$

$$= \frac{x - 1}{x^2} \qquad \text{pour } x \text{ dans } \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$$

composition de fonctions Une autre façon de construire une fonction consiste à transformer les images d'une première fonction à l'aide d'une seconde fonction. C'est ce qu'on appelle la *composition de fonctions*.

Par exemple la fonction définie par l'équation $y = \sqrt{3x + 1}$ peut être obtenue en considérant les deux fonctions:

$$f(x) = 3x + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Pour comprendre le mécanisme derrière le procédé de composition de fonctions, notons d'abord que la fonction associée à

$$y = \sqrt{3x + 1}$$

transforme $x = 1$ en $y = 2$. Il est possible d'obtenir le même résultat en utilisant les fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

D'abord	$f(x) = 3x + 1$	transforme	$x = 1$	en	$f(1) = 4$
puis,	$g(x) = \sqrt{x}$	transforme	$f(1) = 4$	en	$g(f(1)) = g(4) = 2$

$$1 \xrightarrow{f(x) = 3x + 1} f(1) = 4 \xrightarrow{g(x) = \sqrt{x}} g(f(1)) = g(4) = 2$$

Par cette double transformation, $x = 1$ est associé à $y = 2$.

D'une façon générale,

$$x \xrightarrow{f(x) = 3x + 1} f(x) = 3x + 1 \xrightarrow{g(x) = \sqrt{x}} g(f(x)) = g(3x + 1) = \sqrt{3x + 1}$$

On dira que la fonction définie par l'équation $y = \sqrt{3x + 1}$ est le résultat de la composition de $g(x)$ et $f(x)$. Elle sera notée $g\circ f(x)$.

$$g\circ f(x) = \sqrt{3x + 1}$$

Le domaine de la fonction $g\circ f(x)$ correspond aux valeurs x du domaine de $f(x)$ pour lesquelles $f(x)$ est élément du domaine de $g(x)$.

fonction composée

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions. La fonction composée $g\circ f(x)$ est définie par

$$g\circ f(x) = g(f(x))$$

$$\text{dom } g\circ f = \{ x \mid x \text{ dans le dom } f \text{ et } f(x) \text{ dans le dom } g \}$$

exemple

Soit $f(x) = 1 - 3x$ et $g(x) = x^2$. Trouver

a) $f\circ g(x)$ b) $g\circ f(x)$ c) $f\circ f(x)$

a) Par définition
$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= 1 - 3(x^2) \\ &= 1 - 3x^2 \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbf{R} \end{aligned}$$

rép: b) $1 - 6x + 9x^2$ où x dans **R** ; c) $9x - 2$ où x dans **R** *exemple* Déterminer $f(x)$ et $g(x)$ si $h(x) = g \circ f(x)$ et:

a) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ b) $h(x) = (x^2 + 3)^5$ c) $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

rép: a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$; b) $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = x^5$

c) $f(x) = x^3 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$

exemple Trouver la fonction $y = f(x)$ définie par la composition des fonctions suivantes.

a) $y = u^3 - 1$, $u = \dfrac{1}{x}$;

b) $y = \sqrt{u}$, $u = x - 1$;

c) $y = \dfrac{1}{u}$, $u = 3 + v$, $v = x^2$.

---

rép: a) $y = \dfrac{1}{x^3} - 1$; b) $y = \sqrt{x - 1}$; c) $y = \dfrac{1}{3 + x^2}$

Exercices

1. Parmi les droites ci-contre, identifier celle(s) dont la pente est

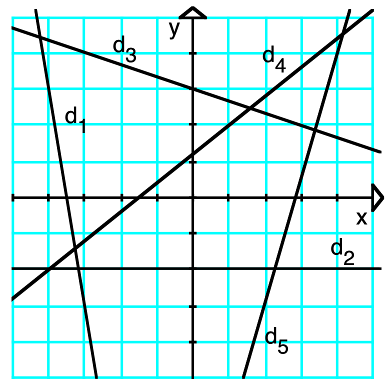
   a) positive,

   b) nulle,

   c) négative,

   d) la plus grande,

   e) la plus petite.



2. Tracer le graphique de chacune des droites (déterminer s'il y a lieu, la pente et l'ordonnée à l'origine).

   a) $y = 3x - 2$

   b) $y = 7 - 2(3 + x)$

   c) $x = 2$

   d) $1 = \frac{x}{3} + \frac{y}{4}$

3. Trouver l'équation de la droite

   a) dont l'ordonnée à l'origine est 3 et la pente est 1,
   b) qui passe par le point $(2, -1)$ et dont la pente est 3,
   c) qui passe par les points $(-2, 3)$ et $(2, -5)$.

4. Tracer le graphique de chacune des paraboles (déterminer s'il y a lieu, les points où la parabole coupe l'axe des x ainsi que le point maximal ou minimal).

   a) $y = x^2 - 1$

   b) $y = 3x^2 - 4x + 1$

   c) $y = 8x - 2x^2 - 6$

   d) $y = 4x^2 - 7x + 4$

5. Trouver le domaine des fonctions suivantes:

   a) $f_1(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

   b) $f_2(x) = \frac{1}{x}$

   c) $f_3(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$

   d) $f_4(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

   e) $f_5(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

   f) $f_6(x) = \frac{x(x + 1)}{(2x^2 - 1)(x - 1)}$

   g) $f_7(x) = \frac{x - 4}{2x^2 - 11x + 12}$

   h) $f_8(x) = \frac{x}{-x^2 + x - 1}$

i) $f_9(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

j) $f_{10}(x) = \sqrt{x - 1}$

k) $f_{11}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x - 1}}$

l) $f_{12}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

m) $f_{13}(x) = \sqrt{4 - x^2}$

n) $f_{14}(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

o) $f_{15}(x) = \dfrac{1}{|2x^2 - 3|}$

p) $f_{16}(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + 1}}{\sqrt{5 - x}}$

q) $f_{17}(x) = x^3 - \sqrt{3x^2 + 1}$

r) $f_{18}(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 5}}$

s) $f_{19}(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x^2 - 7x - 4}$

t) $f_{20}(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 2}}$

6. Vrai ou faux.

a) $f_1(x) = x^2$ est une fonction quadratique,

b) $f_2(x) = x^2 - 1$ est une fonction polynomiale,

c) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{x^2 + 1}$ est une fonction irrationnelle,

d) $f_4(x) = (3 - 2x)^2$ est une fonction quadratique,

e) $f_5(x) = \dfrac{1 + x}{\sqrt{x - 1}}$ est une fonction rationnelle,

f) $f_6(x) = \frac{1}{4}$ est une fonction linéaire,

g) $f_7(x) = x^{-1/2}$ est une fonction rationnelle,

h) $f_8(x) = x(x^3 - 2)$ est une fonction polynomiale.

7. Tracer le graphique de $f(x) = x^2$ puis, à l'aide de ce graphique, tracer les graphiques suivants:

a) $f_1(x) = -x^2$

b) $f_2(x) = x^2 - 3$

c) $f_3(x) = 2 - x^2$

d) $f_4(x) = (x - 1)^2$

e) $f_5(x) = (x + 2)^2$

f) $f_6(x) = (x - 2)^2 + 3$

8. Tracer le graphique de $f(x) = x^3$ puis, à l'aide de ce graphique, tracer les graphiques suivants:

a) $f_1(x) = (x - 1)^3$

b) $f_2(x) = - x^3$

c) $f_3(x) = 1 - x^3$

d) $f_4(x) = (x + 2)^3 - 3$

9. Tracer le graphique de chacune des fonctions (déterminer le domaine et l'image de ces fonctions)

a) $f_1(x) = -\frac{1}{x}$

b) $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $f_3(x) = \sqrt{x + 1}$

d) $f_4(x) = \sqrt{2 - x}$

e) $f_5(x) = \sqrt[3]{x}$

f) $f_6(x) = \sqrt[3]{x^2}$

g) $f_7(x) = |3 + 2x|$

h) $f_8(x) = \sqrt{(3 + 2x)^2}$

i) $f_9(x) = |x^2 + x - 2|$

j) $f_{10}(x) = \big||x + 1| - 2\big|$

10. Tracer chacun des graphiques (déterminer le domaine et l'image des fonctions)

a) $f_1(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq -1 \\ x + 2 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} (x - 1)^2 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

d) $f_4(x) = \frac{|x|}{x}$

11. Si $f(x) = 2x^2 - 1$ alors trouver:

a) $f(2)$

b) $f(3)$

c) $f(2 + 3)$

d) $f(2) + f(3)$

e) $f(a)$

f) $f(a - b)$

g) $f(a) - f(b)$

h) peut-on dire que $f(a - b) = f(a) - f(b)$?

12. Soit $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Tracer le graphique de la fonction.

b) Évaluer si possible les images suivantes: $f(-1/2)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(1/2)$.

13. Soit $f(x) = (1 + x)^{1/x}$.
   a) En utilisant votre calculatrice, compléter (si possible) le tableau suivant.

x	0	0,001	0,01	0,1	1	2	10	100	1000
$f(x)$									

   b) Que deviennent les images de cette fonction lorsque la valeur de x augmente?
   c) Que deviennent les images de cette fonction lorsque la valeur de x s'approche de 0 (tout en demeurant positive)?
   d) À l'aide du tableau, tracer le graphique de la fonction pour $x \geq 0$.

14. Pour chaque paire de fonctions f et g , trouver:
   $(f+ g)(x)$, $(g - f)(x)$, $(fg)(x)$, $(f/g)(x)$, $(g/f)(x)$.
   Donner le domaine de chacune des fonctions.
   a) $f(x) = x - 5$, $g(x) = x^2 - 1$
   b) $f(x) = x\sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

15. Soit $f(x) = 1 + 2x$ et $g(x) = x^2$, trouver
   a) $(fog)(x)$
   b) $(gof)(x)$

16. Soit $f(x) = 1 - 2x$ et $g(x) = \sqrt{x + 3}$, trouver
   a) $(fog)(x)$ et dom fog,
   b) $(gof)(x)$ et dom gof,
   c) $(fof)(x)$ et dom fof,
   d) $(gog)(x)$ et dom gog,
   e) $(fofof)(x)$ et dom $fofof$.

17. Déterminer les fonctions g(x) et h(x) si
   a) $(goh)(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$
   b) $(goh)(x) = (x^2 + 3x - 6)^7$
   c) $(goh)(x) = \sqrt{(x^2 + 1)^3}$

18. Trouver la fonction $y = f(x)$ définie par la composition des fonctions suivantes:
   a) $y = u^3$, $u = 2x - 1$;
   b) $y = \dfrac{1}{v^2}$, $v = x^2 + 1$;
   c) $y = r + \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{x}$;
   d) $y = \dfrac{1}{u}$, $u = v^2$, $v = 2x^3 - 5$;
   e) $y = \sqrt{r}$, $r = 3u^2 - 1$, $u = 1 - 2x$.

19. Simplifier le plus possible l'expression $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $(a \neq b)$

   a) si $f(x) = 2x + 1$

   b) si $f(x) = x^2 - 3$

20. Simplifier le plus possible l'expression $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ $(h \neq 0)$

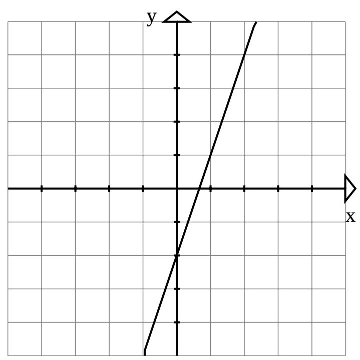
   a) si $f(x) = x^2 + x + 1$

   b) si $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

Réponses aux exercices

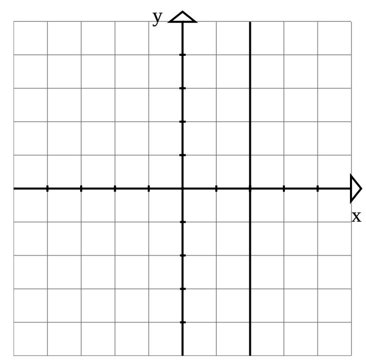
1. a) d_4, d_5 b) d_2 c) d_1, d_3 d) d_5 e) d_1

2. a)



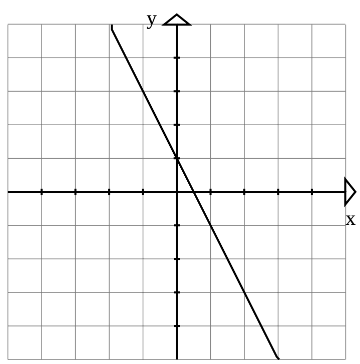
m = 3 ; b = -2

c)



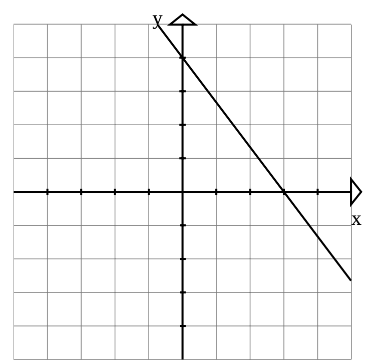
m et b ne sont pas définies

b)



m = -2 ; b = 1

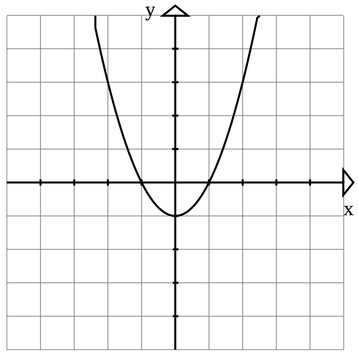
d)



m = - 4/3 ; b = 4

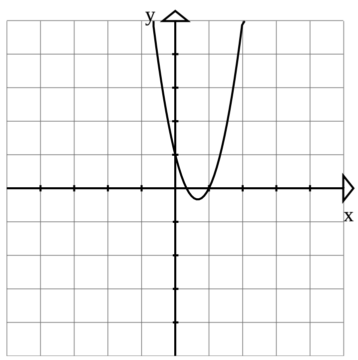
3. a) y = x + 3 b) y = 3x - 7 c) y = -2x - 1

4. a)



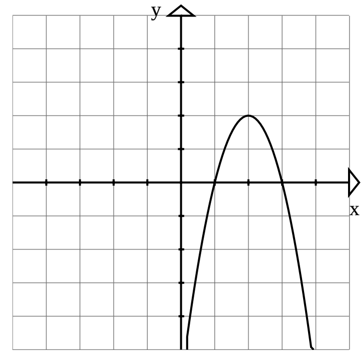
racines: -1, 1 ; minimum (0, -1)

b)



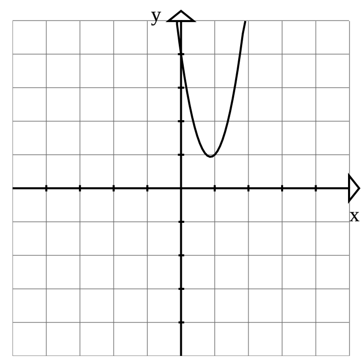
racines: 1/3, 1 ; minimum (2/3, -1/3)

c)



racines: 1, 3 ; maximum (2, 2)

d)

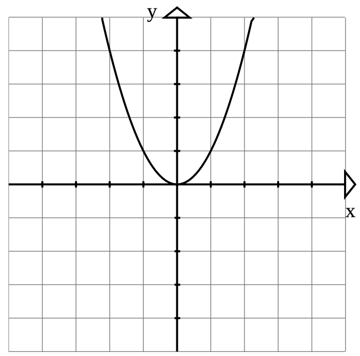


aucune racine réelle ; minimum (7/8,15/16)

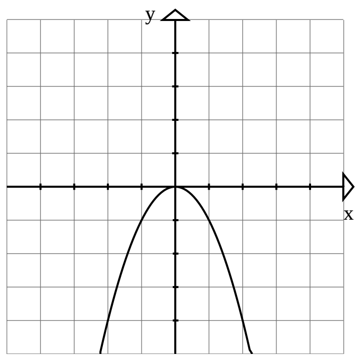
5. a) $\mathbf{R}$
   b) $\mathbf{R} \setminus \{0\}$
   c) $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$
   d) $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$
   e) $\mathbf{R}$
   f) $\mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}/2, 1, \sqrt{2}/2\}$
   g) $\mathbf{R} \setminus \{3/2, 4\}$
   h) $\mathbf{R}$
   i) $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$
   j) $[1, \infty[$
   k) $]1/2, \infty[$
   l) $\mathbf{R}$
   m) $[-2, 2]$
   n) $]-\infty, -3] \cup [3, \infty[$
   o) $\mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{6}/2, \sqrt{6}/2\}$
   p) $]-\infty, 5[$
   q) $\mathbf{R}$
   r) $]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, \infty[$
   s) $]-\infty, -3] \cup [3, \infty [\setminus \{4\}$
   t) $]-\infty, -1] \cup]2, \infty[$

6. a) vrai
   b) vrai
   c) faux
   d) vrai
   e) faux
   f) vrai
   g) faux
   h) vrai

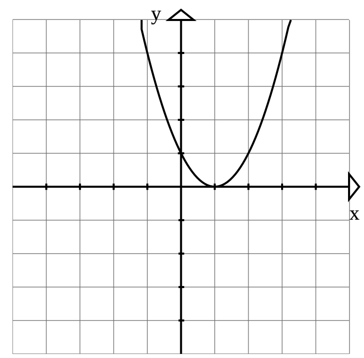
7.



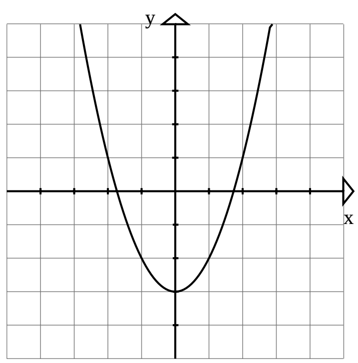
a)



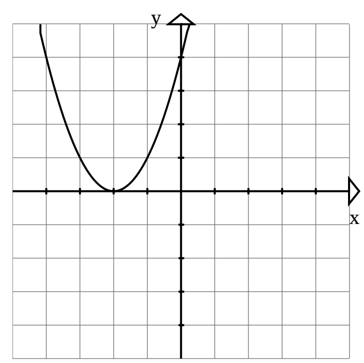
d)



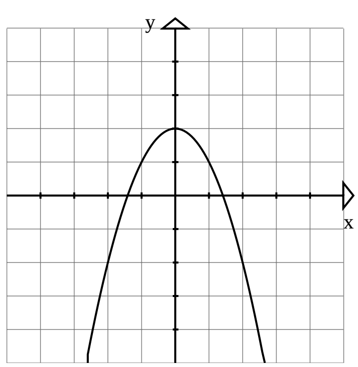
b)



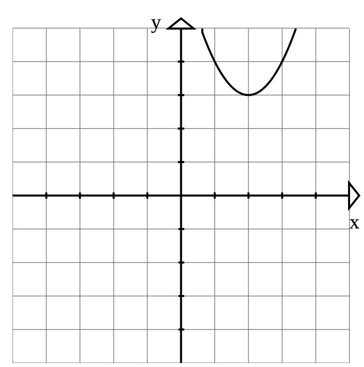
e)



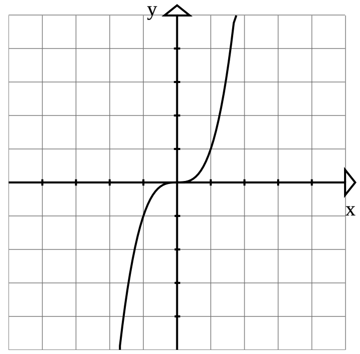
c)



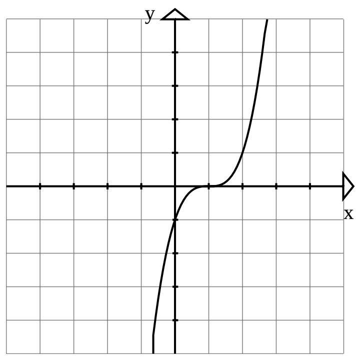
f)



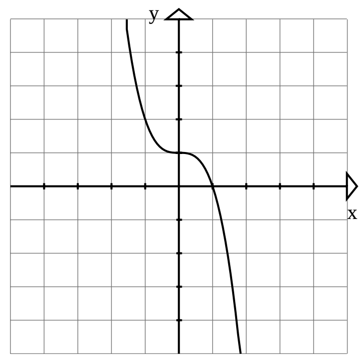
8.



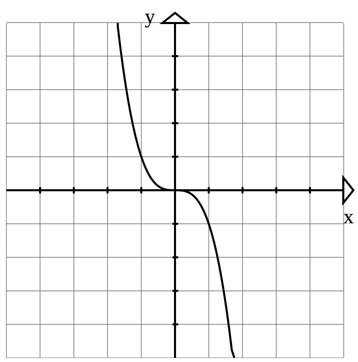
a)



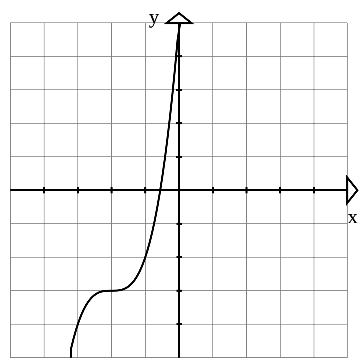
c)



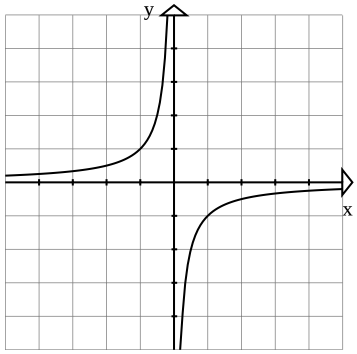
b)



d)

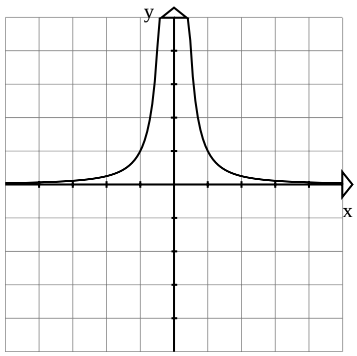


9. a)



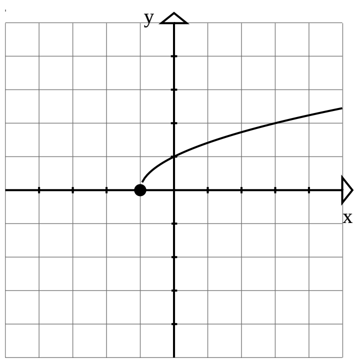
dom $f_1 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
ima $f_1 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

b)



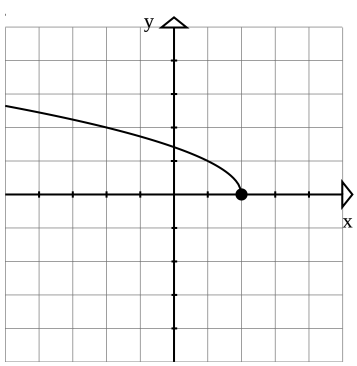
dom $f_2 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
ima $f_2 =]0, \infty[$

c)



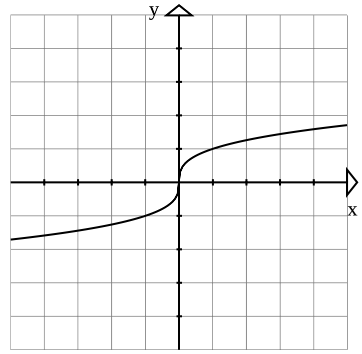
dom $f_3 = [-1,\infty[$
ima $f_3 = [0, \infty[$

d)



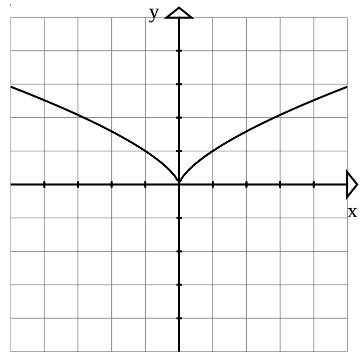
dom $f_4 =]-\infty,2]$
ima $f_4 = [0, \infty[$

e)



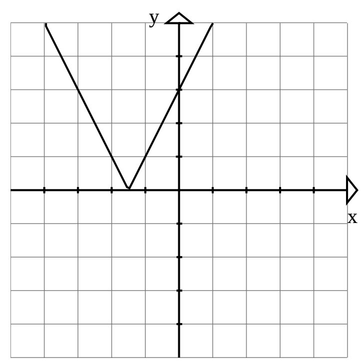
dom $f_5 = \mathbf{R}$
ima $f_5 = \mathbf{R}$

f)



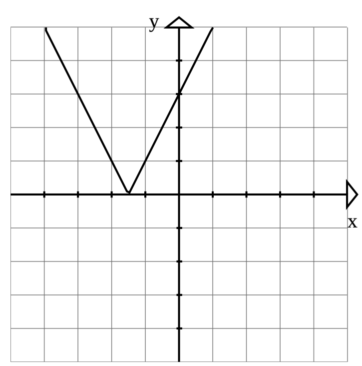
dom $f_6 = \mathbf{R}$
ima $f_6 = [0, \infty[$

g)



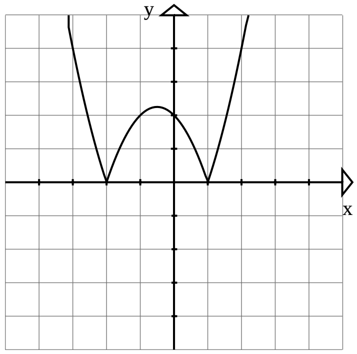
dom $f_7 = \mathbf{R}$
ima $f_7 = [0, \infty[$

h)



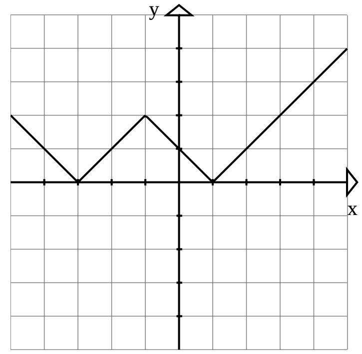
dom $f_8 = \mathbf{R}$
ima $f_8 = [0, \infty[$

i)



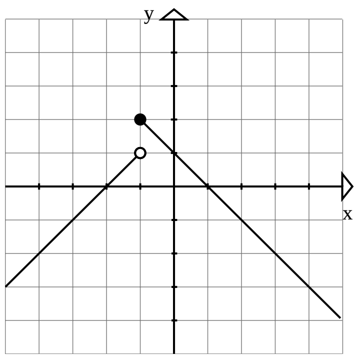
dom f_9 = **R**
ima f_9 = [0, ∞[

j)



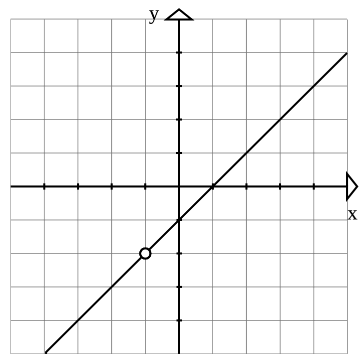
dom f_{10} = **R**
ima f_{10} = [0, ∞[

10 a)



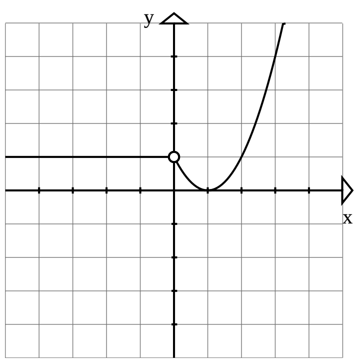
dom f_1 = **R**
ima f_1 =]-∞,2]

c)



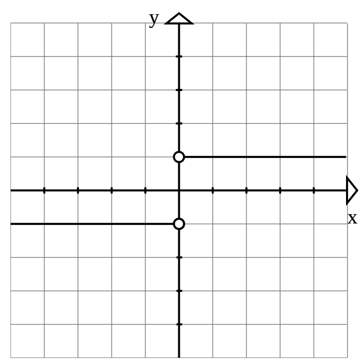
dom f_3 = **R** \ {-1}
ima f_3 = **R** \ {-2}

b)



dom f_2 = **R** \ {0}
ima f_2 = [0, ∞[

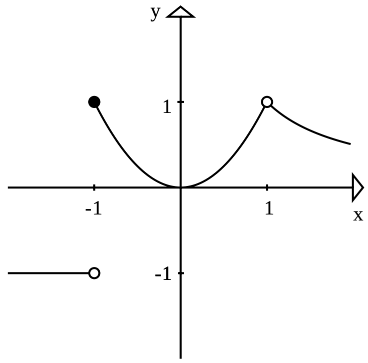
d)



dom f_4 = **R** \ {0}
ima f_4 = {-1, 1}

11. a) 7
b) 17
c) 49
d) 24
e) $2a^2 - 1$
f) $2a^2 - 4ab + 2b^2 - 1$
g) $2(a - b)(a + b)$
h) non

12.a)



b) $f(-1/2) = 1/4$
$f(2) = 1/2$
$f(-1) = 1$
$f(-2) = -1$
$f(1)$ n'existe pas
$f(1/2) = 1/4$

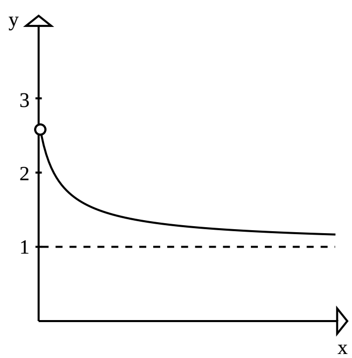
13. a)

x	0	0,001	0,01	0,1	1	2	10	100	1000
f(x)	-	2,717	2,705	2,594	2	1,732	1,271	1,047	1,007

b) elles semblent s'approcher de la valeur 1

c) elles semblent s'approcher d'une valeur d'environ 2,7

d)



14. a) dom f = **R**
dom g = **R**
$(f+g)(x) = x^2 + x - 6$ dom $(f+g)$ = **R** ;
$(g-f)(x) = x^2 - x + 4$ dom $(g-f)$ = **R** ;
$(fg)(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$ dom (fg) = **R** ;
$(f/g)(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 - 1}$ dom $(f/g) = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$
$(g/f)(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 5}$ dom $(g/f) = \mathbf{R} \setminus \{5\}$

b) dom f = $[0,\infty[$
dom g = $]0,\infty[$

$(f+g)(x) = \dfrac{(1+x^2)\sqrt{x}}{x}$ dom $(f+g) =]0,\infty[$

$(g-f)(x) = \dfrac{(1-x^2)\sqrt{x}}{x}$ dom $(g-f) =]0,\infty[$

$(fg)(x) = x$ dom $(fg) =]0,\infty[$

$(f/g)(x) = x^2$ dom $(f/g) =]0,\infty[$

$(g/f)(x) = \dfrac{1}{x^2}$ dom $(g/f) =]0,\infty[$

15. a) $(f o g)(x) = 1 + 2x^2$
b) $(g o f)(x) = (1 + 2x)^2$

16. a) $1 - 2\sqrt{x+3}$ pour x dans $[-3,\infty[$
b) $\sqrt{4-2x}$ pour x dans $]-\infty, 2]$
c) $4x - 1$ pour x dans **R**
d) $\sqrt{3+\sqrt{x+3}}$ pour x dans $[-3,\infty[$
e) $3 - 8x$ pour x dans **R**

17. a) $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
b) $g(x) = x^7$ et $h(x) = x^2 + 3x - 6$
c) $g(x) = x^{3/2}$ et $h(x) = x^2 + 1$

18. a) $y = (2x-1)^3$
b) $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$
c) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
d) $y = \dfrac{1}{(2x^3-5)^2}$
e) $y = \sqrt{3(1-2x)^2 - 1}$

19. a) 2
b) b + a

20. a) 2x + h + 1
b) $-\dfrac{1}{(x+h)x}$