

Calcul différentiel

L'objet et la place du cours dans le programme

Le cours *Calcul différentiel* est le premier cours de mathématiques obligatoire du bloc ministériel du programme en Sciences de la nature. Il est présenté à l'étudiant de la première session, qu'il soit du profil Sciences pures et appliquées ou du profil Sciences de la santé et de la vie. Il s'agit d'une introduction au calcul différentiel et intégral qui constitue, pour les sciences modernes, un fondement mathématique autant conceptuel que quantitatif.

L'étudiant pourra réinvestir ses acquis du secondaire d'une part et, d'autre part, appliquer ses nouvelles connaissances à diverses situations interdisciplinaires dans les autres cours du programme, notamment en physique et, à un degré moindre, en chimie. Mentionnons que le cours *Calcul différentiel* est préalable au cours de *Calcul différentiel et intégral* qui vise à résoudre des problèmes à l'aide de la différentielle, de l'intégrale et des séries.

Dans le cours *Calcul différentiel* l'étudiant sera appelé à développer une compétence en résolution de problèmes associés aux concepts de limite, de continuité et de dérivée des fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques et trigonométriques, autant en mathématiques qu'en sciences. Il aura l'occasion de développer sa confiance en ses capacités mathématiques, d'augmenter ses habiletés graphiques, de découvrir des concepts, des méthodes de calcul et des stratégies de résolution de problèmes.

Les objectifs généraux du cours

1. Les connaissances : l'étudiant doit

- 1.1 connaître, comprendre et savoir appliquer divers concepts liés au changement : limite, continuité et dérivée;
- 1.2 connaître et utiliser correctement les définitions, la terminologie, le symbolisme et les conventions mathématiques reliés au calcul différentiel;
- 1.3 connaître et savoir utiliser des stratégies de résolution de problèmes relatives au calcul différentiel;
- 1.4 savoir situer le développement des concepts du calcul différentiel dans un contexte historique.

2. Les habiletés : l'étudiant doit pouvoir

- 2.1 développer son intuition et son sens de l'observation des phénomènes de changement et prévoir, s'il y a lieu, un résultat en faisant une estimation préalable;
- 2.2 construire des modèles mathématiques correspondant à des situations du calcul différentiel;
- 2.3 appliquer des stratégies générales de résolution de problèmes;
- 2.4 construire et interpréter correctement des représentations graphiques de fonctions réelles à une variable;
- 2.5 résoudre un problème en utilisant des techniques appropriées du calcul différentiel, rédiger une solution dans un français convenable, selon un déroulement logique, clair et complet tout en employant la terminologie et la notation appropriées du calcul différentiel;
- 2.6 interpréter correctement les résultats obtenus et porter un jugement critique sur ces derniers;
- 2.7 relier les aspects numériques, symboliques et graphiques qui se présentent dans l'étude et l'utilisation des notions du calcul différentiel;
- 2.8 lire de façon autonome les textes mathématiques proposés dans le cours;
- 2.9 établir, s'il y a lieu, des liens entre les connaissances mathématiques et des notions relatives à d'autres disciplines.

3. Les attitudes : ce cours doit amener l'étudiant à

- 3.1 comprendre et améliorer son propre processus d'apprentissage et se responsabiliser face à ce processus;
- 3.2 développer sa créativité et sa curiosité intellectuelle;

- 3.3 développer sa rigueur intellectuelle et son souci d'être clair, précis, ordonné et systématique dans ses écrits et dans ses communications verbales;
- 3.4 comprendre l'importance de développer une compétence en résolution de problèmes où la recherche de solutions est exigeante;
- 3.5 augmenter sa confiance dans ses capacités face aux activités mathématiques et se valoriser dans l'effort;
- 3.6 développer sa capacité de collaborer avec autrui dans des équipes de travail tout en respectant les divers rythmes d'apprentissage de ses pairs;
- 3.7 prendre conscience de l'utilisation importante du calcul différentiel en sciences et de sa contribution particulière à la formation intellectuelle.

Les objectifs spécifiques (le contenu)

Remarques

Les éléments marqués d'une étoile sont des éléments d'enrichissement qui ne seront pas évalués dans la partie commune de l'examen récapitulatif et de synthèse du cours.

Des notes historiques seront présentées au moment approprié tout au long du cours.

Fonctions algébriques

(9 périodes)

	L'étudiant doit pouvoir...
Fonctions réelles	<ul style="list-style-type: none"> . donner la définition d'une fonction réelle et particulièrement des fonctions suivantes : <ul style="list-style-type: none"> les fonctions constantes : $f(x) = c$ les fonctions linéaires : $f(x) = mx + b$ les fonctions quadratiques : $f(x) = ax^2 + bx + c$ les fonctions polynomiales de degré supérieur à 2 les fonctions rationnelles les fonctions irrationnelles la fonction valeur absolue : $f(x) = x$ les fonctions en morceaux
Domaine et image	<ul style="list-style-type: none"> . déterminer le domaine d'une fonction, en particulier de celles citées ci-dessus . calculer des images de fonctions . déterminer le domaine d'une fonction rationnelle où peut intervenir la factorisation des expressions algébriques suivantes : $ax^2 + bx + c$, $x^4 + bx^2 + c$, $x^2 - a^2$, $x^3 - a^3$, $x^3 + a^3$ ainsi que la mise en évidence . déterminer le domaine d'une fonction irrationnelle pouvant impliquer la résolution d'équations ou d'inéquations du second degré
Opérations sur les fonctions	<ul style="list-style-type: none"> . effectuer les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de composition de fonctions (produit fonctionnel), en particulier, effectuer la division de polynômes . décomposer en fonctions plus simples un produit fonctionnel . à partir d'une fonction donnée, déterminer si elle est polynomiale, rationnelle ou irrationnelle
Graphique d'une fonction	<ul style="list-style-type: none"> . tracer le graphique de certaines fonctions citées ci-dessus . à partir d'un graphique donné, déterminer si c'est le graphique d'une fonction et selon le cas, donner le domaine de la fonction, calculer une image, déterminer les zéros de la fonction . tracer le graphique d'une fonction satisfaisant certaines conditions . tracer le graphique d'une fonction donnée pouvant être obtenu par une seule translation d'une fonction connue

Graphique d'une fonction (suite)

- reconnaître une fonction paire et une fonction impaire
- tracer le graphique des fonctions données par

$$f(x) = x^3$$
$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = 1/x$$
$$f(x) = x^{1/3}$$

$$f(x) = 1/x^2$$
$$f(x) = x^{2/3}$$

Limites et continuité

(15 périodes)

L'étudiant doit pouvoir...

Limites

- utiliser la notion de voisinage (*)
- donner la définition formelle de limite à l'aide des voisinages (*)
- calculer des limites, des limites à droite, des limites à gauche, des limites à l'infini et des limites infinies à partir de la représentation graphique d'une fonction
- calculer des limites à l'aide des théorèmes portant sur les fonctions définies par $f(x) = c$, $f(x) = mx + b$, $f(x) = x^n$, $f(x) = x^{1/n}$ et les opérations $+$, $-$, \times , \div
- calculer la limite d'une fonction algébrique (ou fonction en morceaux) en un point ou à l'infini à l'aide des théorèmes sur les limites ou la continuité
- donner une justification lorsqu'une limite n'existe pas
- lever une indétermination de la forme $0/0$ où il faut, entre autres choses, factoriser, mettre à un dénominateur commun ou encore, multiplier par un conjugué
- lever une indétermination de la forme ∞/∞ où peut intervenir la définition de valeur absolue
- lever une indétermination de la forme $\infty - \infty$ où il faut, entre autres choses, faire une mise en évidence, mettre à un dénominateur commun ou encore, multiplier par un conjugué
- lever une indétermination de la forme $0(\pm \infty)$ où peut intervenir la définition de valeur absolue

Continuité

- donner la définition de continuité d'une fonction :
a) en un point, b) sur un intervalle ouvert, c) sur un intervalle fermé (*)
- énoncer les théorèmes portant sur la continuité des fonctions polynomiales, rationnelles, valeur absolue, racines n-ième de x ainsi que les fonctions $(f + g)$, fg , cf , f/g , $f \circ g$
- déterminer si une fonction (en particulier, une fonction en morceaux) est continue :
a) en un point, b) sur un intervalle ouvert, c) sur un intervalle fermé (*)
à partir de son graphique ou de son équation
- tracer le graphique d'une fonction satisfaisant à des conditions dont certaines portent sur les limites et sur la continuité

Dérivées

(12 périodes)

L'étudiant doit pouvoir...

Dérivées

- donner la définition du taux de variation moyen et du taux de variation instantané
- donner la définition de la dérivée d'une fonction f : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}$
- calculer la dérivée des fonctions suivantes à l'aide de la définition :
 $f(x) = mx + b$ $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f(x) = ax^3$
 $f(x) = 1/(mx + b)$ $f(x) = \sqrt{mx + b}$ $f(x) = 1/ax^2$ (*)
- calculer la pente d'une tangente à la courbe d'une fonction, donner l'équation de cette tangente et en donner une représentation graphique
- à partir de la représentation graphique d'une fonction f , déterminer le domaine de f' et le signe de $f'(x)$

Dérivées (suite)

- à partir de la représentation graphique d'une fonction, déterminer sur quel(s) intervalle(s) le taux de variation de la fonction augmente ou diminue
- à partir de la représentation graphique d'une fonction et d'un contexte donné, interpréter les variations du taux de variation
- démontrer les règles de dérivation portant sur les fonctions suivantes :
$$f(x) = x^n \quad f(x) = c g(x), c \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c, c \in \mathbb{R}$$
$$h(x) = f(x) + g(x) \quad h(x) = f(x) g(x) \quad (*) \quad h(x) = f(x) / g(x) \quad (*)$$
- calculer la dérivée d'une fonction algébrique
- donner la dérivée d'une fonction sous une forme simplifiée c'est-à-dire sous la forme permettant, par exemple, de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x l'on a $f'(x) = 0$
- dériver en appliquant la dérivation en chaîne
- calculer des dérivées d'ordre supérieur
- déterminer la vitesse v (ds/dt) et l'accélération a (dv/dt), au temps t , d'un objet en mouvement à partir de la fonction s donnant sa position en fonction du temps
- *calculer la dérivée d'une fonction paramétrique (*)*
- calculer des dérivées implicites d'ordre 1 et d'ordre 2 (*)
- tracer le graphique d'une fonction f satisfaisant à des conditions dont certaines portent sur f'

Applications de la dérivée

(15 périodes)

L'étudiant doit pouvoir...

Étude de courbes

- déterminer les intervalles ouverts de croissance et de décroissance d'une fonction
- déterminer les extremums (maximums et minimums) d'une fonction
- déterminer les intervalles ouverts de concavité vers le haut et de concavité vers le bas d'une fonction
- déterminer les points d'inflexion d'un graphique
- déterminer les asymptotes verticales et horizontales d'une fonction
- déterminer les asymptotes obliques d'une fonction rationnelle
- déterminer si une fonction est paire, impaire ou ni paire ni impaire, à partir de son équation ou de sa représentation graphique
- tracer le graphique d'une fonction polynomiale de degré 3
- tracer le graphique d'une fonction rationnelle
- établir le tableau de variation d'une fonction et tracer le graphique de cette fonction
- à partir du graphique d'une fonction f , tracer le graphique de $|f(x)|$

Optimisation

- mathématiser une situation d'optimisation
- résoudre un problème d'optimisation relié aux thèmes suivants :
 - la recherche de deux nombres répondant à certaines conditions
 - le calcul d'un périmètre, de l'aire d'une surface plane, d'un volume
 - le calcul d'un coût minimal
 - le calcul d'une vitesse ou d'une accélération maximale
 - et autres...

Taux liés

- *mathématiser une situation de taux liés (*)*
- *résoudre un problème de taux liés (*)*

Fonctions exponentielles et logarithmiques

(8 périodes)

L'étudiant doit pouvoir...

Fonctions exponentielles et logarithmiques

- donner la définition d'une fonction exponentielle
- donner la définition d'une fonction logarithmique
- donner une définition du nombre e

Fonctions
exponentielles et
logarithmiques
(suite)

- . à partir d'une fonction f donnée du type $f(x) = e^x$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \log_a x$, $f(x) = a^{g(x)}$, $f(x) = \log_a g(x)$ ou $f(x) = h(x)^{g(x)}$ (*) déterminer le domaine, calculer des images (avec et sans calculatrice), tracer le graphique
- . résoudre des équations à l'aide des lois des exposants et des propriétés des logarithmes
- . calculer une limite (forme non indéterminée) impliquant une fonction exponentielle ou une fonction logarithmique
- . étudier la continuité d'une fonction exponentielle et d'une fonction logarithmique
- . démontrer les règles de dérivation des fonctions a^x et $\log_a x$
- . calculer la dérivée d'une fonction exponentielle et d'une fonction logarithmique et donner la réponse sous une forme simplifiée
- . appliquer la dérivée des fonctions exponentielles et logarithmiques dans des études de courbes simples ou des problèmes d'optimisation
- . calculer des dérivées implicites d'ordre 1 et d'ordre 2 (*)
- . *calculer des dérivées logarithmiques* (*)
- . établir l'équation d'une tangente à la courbe d'une fonction exponentielle et d'une fonction logarithmique

Fonctions trigonométriques et trigonométriques inverses

(11 périodes)

L'étudiant doit pouvoir...

Fonctions
trigonométriques

- . donner la définition, le domaine et l'image des 6 fonctions trigonométriques de base : \sin , \cos , tg , cotg , sec et cosec
- . faire appel aux identités suivantes lorsque la résolution d'un exercice le demande :

$$\begin{aligned} \sin^2 + \cos^2 &= 1 \\ \text{tg}^2 + 1 &= \text{sec}^2 \\ \text{cotg}^2 + 1 &= \text{cosec}^2 \\ \sin 2 &= 2 \sin \cos \\ \cos 2 &= \cos^2 - \sin^2 \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} - \right) &= \sin \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} - \right) &= \cos \end{aligned}$$
- . à partir d'une fonction trigonométrique donnée, déterminer le domaine, calculer des images (avec et sans calculatrice) et en tracer le graphique
- . résoudre des équations trigonométriques où peuvent intervenir des identités trigonométriques et des équations du second degré
- . déterminer le domaine des fonctions définies par :

$$f(x) = \sin g(x), f(x) = \cos g(x) \dots \text{ et autres cas simples}$$
- . calculer une limite impliquant des fonctions trigonométriques (formes non indéterminées) dont $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$
- . utiliser les égalités suivantes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- . *calculer une limite impliquant des fonctions trigonométriques (formes indéterminées)* (*)
- . étudier la continuité d'une fonction trigonométrique sur $]0, 2\pi[$ ou sur une période
- . calculer la dérivée d'une fonction trigonométrique et donner la réponse sous une forme simplifiée
- . établir l'équation d'une tangente à la courbe d'une fonction trigonométrique
- . calculer des dérivées implicites d'ordre 1 et d'ordre 2 (*)
- . tracer le graphique des fonctions données par $f(x) = a \sin bx$ et $f(x) = a \cos bx$
- . *appliquer la dérivée des fonctions trigonométriques à l'étude de courbes simples ou à des problèmes d'optimisation* (*)

Fonctions
trigonométriques
inverses

Pour les fonctions Arc sin x , Arc cos x , Arc tg x , Arc sec x , Arc cotg x (*) et
Arc cosec x (*)

- . donner la définition, le domaine et l'image
- . calculer des images (avec et sans calculatrice)
- . tracer le graphique
- . démontrer leurs règles de dérivation
- . calculer leur dérivée
- . *appliquer la dérivée des fonctions trigonométriques inverses à l'étude de courbes simples ou à des problèmes d'optimisation* (*)

Synthèse

(5 périodes)

Synthèse

L'étudiant doit pouvoir...

- . résoudre des problèmes qui comportent plusieurs étapes et qui requièrent l'application des notions les plus importantes vues dans le cours

Évaluation

L'évaluation sommative de 100 points se fait dans le cadre suivant :

- . un minimum de 3 examens durant la session, excluant l'examen final;
- . un maximum de 25 points pour un examen;
- . un maximum de 20 points pour d'autres formes d'évaluation;
- . un examen final commun récapitulatif et de synthèse du cours valant 15 points.