

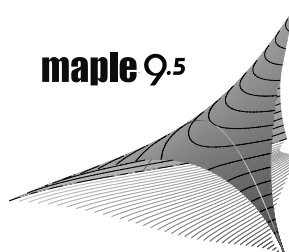


DÉPARTEMENT
DE MATHÉMATIQUES
**COLLÈGE
DE MAISONNEUVE**

Algèbre linéaire et géométrie analytique

(Mathématiques 201-NYCM)

maple 9.5



TP 4

Session automne 2004

- Objectif**
- Développer la résolution de problèmes de géométrie vectorielle de la droite et du plan dans l'espace.
 - S'initier aux tracés de droites et de plans dans l'espace afin d'être en mesure d'illustrer graphiquement des éléments de solutions à des problèmes de géométrie vectorielle.

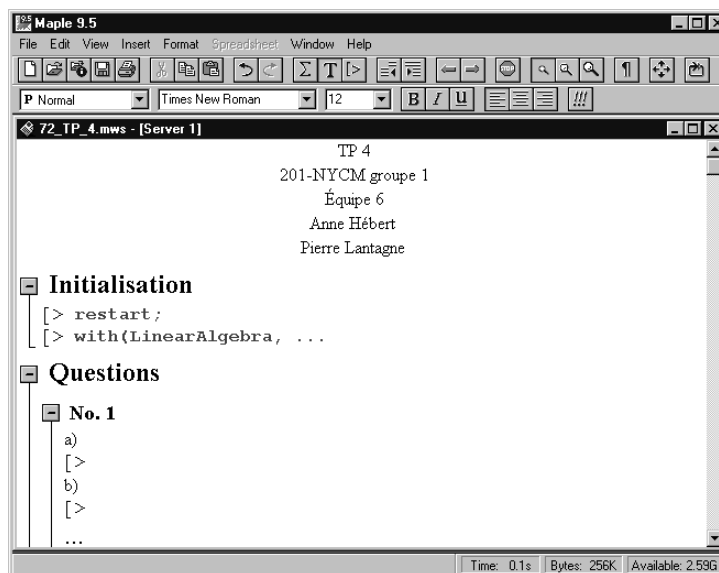
Déroulement

1. Il est obligatoire de travailler en équipe de deux personnes.
2. Vous devez prendre connaissance du texte intitulé « Session Maple pour le devoir 3 ». Ce texte vous donne toute l'information pertinente quant à la manière de tracer des graphiques de droites et de plans dans l'espace. Ce texte vous informe aussi sur les macro-commandes qu'il faut utiliser pour effectuer des multiplications scalaires et vectorielles.

Le texte dont il est question constitue en lui-même un modèle à suivre quant à la manière de documenter les développements mathématiques de vos solutions. Ce texte, que l'on retrouve à la fin du présent document, est présenté sous la forme d'une session Maple.

Consignes de remise

- Votre document Maple doit présenter les caractéristiques suivantes:
 - avoir une première section intitulée « **Initialisation** » dans laquelle on y retrouve une première requête « **restart** » suivie d'autres requêtes montrant seulement les différentes macro-commandes des extensions qui seront utilisées au cours de la session (voir exemple ci-dessous).
 - avoir un en-tête centré dans une zone de texte, sans crochet de bloc, présentant, dans un même paragraphe et dans l'ordre sur cinq (5) lignes différentes, les informations suivantes :
 - ▷ identification du numéro du devoir (première ligne)
 - ▷ identification du cours suivi et du numéro du groupe (deuxième ligne)
 - ▷ identification du numéro de l'équipe (troisième ligne).
 - ▷ noms des deux membres de l'équipe (quatrième et cinquième ligne).



(Pour effectuer un changement forcé de ligne à l'intérieur d'un même para-

graphe, utiliser les touches Majuscule-Retour)

- avoir chaque solution développée dans une section dont le titre correspond au numéro de la question (par exemple No. 1).
 - avoir chaque sous-question bien identifiée dans une zone de texte sans crochet de bloc (par exemple a)).
 - avoir toute justification, explication ou conclusion formulée dans une zone de texte, sans crochet de bloc.
- Au plus tard à la date limite de remise, chaque équipe aura remis une version imprimée de son travail portant, à côté des deux noms de l'en-tête, la signature de chaque membre de l'équipe. La version papier inclura tous les résultats de vos requêtes Maple et devra être imprimée à partir d'un affichage réduit à 75 % (ctrl-1). Aussi, la pagination de votre document doit être en haut à droite et apparaître à partir de la deuxième page avec le nombre 2. De plus, la version papier de votre feuille Maple (worksheet) devra montrer le déploiement toutes les sections et, s'il y a lieu, de toutes les sous-sections. Cette remise aura été faite directement au professeur ou aura été déposée dans son casier.
- Également, au plus tard à la date limite de remise, chaque équipe aura remis une copie définitive de leur fichier Maple en le déposant sur le lecteur de remise des travaux, soit le lecteur K. Ce fichier doit être identifié comme suit: No.équipe_Titre.mws. Par exemple, «33_TP_4.mws». Cette remise devant être faite dans le sous-répertoire identifié à votre groupe: « NYCM_gr_01 » du sous-répertoire «Pierre_Lantagne» du répertoire «math».

Avant de déposer votre devoir sur le lecteur K, s'assurer que toutes les sections ont été rétractées et que tous les résultats ont été éliminés. Ne pas oublier donc de rétracter d'abord toutes les sections à l'aide du menu «View → Collapse All Sections» et d'éliminer ensuite tous les résultats à l'aide du menu «Edit → Remove Output → From Worksheet» de votre document avant de quitter Maple. Effectuer alors votre remise avec un **copier-coller** ou avec un **glisser-déposer**. Ne pas sauvegarder une copie définitive de votre devoir dans le répertoire de remise à partir de Maple lui-même. Cela n'est pas possible car, en tant qu'élève, vous n'avez aucun droit d'ouverture de fichiers dans ce lecteur K. Finalement, contrôler si la remise s'est correctement faite en affichant le contenu du répertoire identifié à votre groupe afin de vérifier la taille de votre document remis. Dans Windows, effectuer un affichage avec détails évidemment. Le nombre d'octets occupés par votre document doit être différent de zéro.

Date de remise

- Remettre le tout au plus tard le _____
- Tout retard, peu importe le motif, sera pénalisé selon les modalités prévues.

Pierre Lantagne
plantagne@cmaisonneuve.qc.ca
<http://math.cmaisonneuve.qc.ca/plantagne>

Énoncé des questions du quatrième TP

No. 1 Soit les trois plans d'équations

$$\Pi_1: 2x + y + z = 1$$

$$\Pi_2: 6x + y + z = 3$$

$$\Pi_3: x + y - z = 0$$

- Ces trois plans se coupant en un point P, trouver les coordonnées de ce point.
- Illustrer graphiquement ces trois plans dans un même graphique en utilisant l'option `style=patchnograd`. Choisir une couleur différente pour chacun. Superposer à ce graphique le tracé d'une petite sphère illustrant le point d'intersection des trois plans. Utiliser la macro-commande `sphere` de l'extension `plottools`. Ajuster la valeur du rayon afin que le tracé illustre correctement celui d'un point de l'espace. Produire un graphique montrant clairement la position relative de ces trois plans en utilisant judicieusement les options `orientation` et `view`.
- Trouver des équations paramétriques des droites d'intersection des plans deux-à-deux.
- Sur un même graphique, superposer seulement ces droites et une petite sphère illustrant le point d'intersection. Tracer ces droites avec des couleurs différentes mais de même épaisseur (`thickness=3`). Ajuster judicieusement la valeur du rayon de la sphère.
- Finalement, dans un dernier graphique, superposer tous ces objets: plans, point et droites. Produire un graphique bien orienté afin de montrer clairement toutes les caractéristiques de vos tracés.

No. 2 Soit le plan $\Pi: 2x - 3y + 6z - 4 = 0$ et la droite $\Delta: \frac{x-2}{4} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-4}{3}$.

- La droite Δ coupant le plan Π , trouver les coordonnées du point de percée.
- Dans un même graphique, illustrer les tracés du plan Π , de la droite Δ et du point de percée avec une petite sphère. Ajuster judicieusement la valeur du rayon de la sphère. Produire un graphique bien orienté afin de montrer clairement la position relative de la droite Δ et du plan Π .
- Trouver l'angle de percée de la droite Δ et du plan Π . Convertir votre résultat en degrés. Consulter l'aide Maple de `convert`.

No. 3 Soit le point $P(6, 3, -2)$ et la droite $\Delta: \frac{x-2}{5} = \frac{y+1}{2} = z-3$

- Calculer la distance **exacte** (pas d'approximation décimale) du point P à la droite Δ . **Ne pas** utiliser la formule «clé en main» $\left| \frac{aq_1 + bq_2 + cq_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$.

- b) Produire un graphique illustrant cette distance: superposer, dans un même graphique, les tracés
- de la droite Δ ;
 - du segment abaissé perpendiculairement du point P à la droite Δ ;
 - de deux petites sphères illustrant le point P ainsi que le point d'intersection de la droite et de la perpendiculaire. Ajuster évidemment la taille des deux sphères avec un même rayon.
- Encore ici, il s'agit de produire un graphique bien orienté afin de montrer clairement toutes les caractéristiques de vos tracés.
- c) Obtenir une équation cartésienne du plan contenant le point P et la droite Δ .
- d) Produire un graphique bien orienté surperposant le plan obtenu à la partie c) avec celui qui a été produit à la partie b).

Session Maple pour le TP 4

Initialisation

```
> with(plots,display,setoptions,setoptions3d):  
  setoptions(axesfont=[TIMES,ROMAN,10]);  
  setoptions3d(axesfont=[TIMES,ROMAN,10]);  
  with(LinearAlgebra,CrossProduct,DotProduct,Norm);
```

Tracé d'une droite dans le plan et dans l'espace

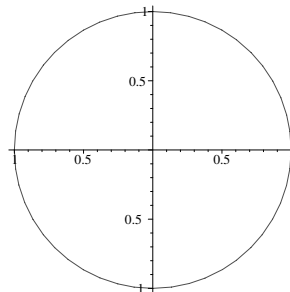
Rappelons la syntaxe paramétrique du tracé d'un lieu géométrique dans le plan cartésien:

```
plot([x(t),y(t),t=a..b])
```

L'abscisse $x(t)$ et l'ordonnée $y(t)$ de chaque point du lieu géométrique en cause sont obtenues en donnant différentes valeurs au paramètre t .

Par exemple, traçons un cercle de rayon unité centré à l'origine. Des équations paramétriques de ce cercle sont $x(t) = \cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$.

```
> plot([cos(t),sin(t),t=-Pi..Pi],scaling=constrained);
```

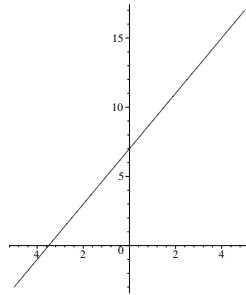


Pour utiliser la syntaxe paramétrique dans le cas d'une fonction définie par $y = f(x)$, il suffit de considérer $x(t) = t$. Donc, dans ce cas, nous pouvons poser $y(t) = f(x(t)) = f(t)$:

```
plot([t,f(t),t=a..b])
```

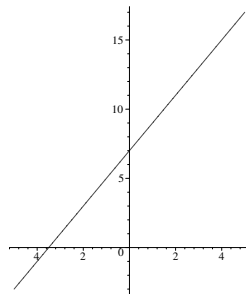
De sorte que, en considérant la fonction linéaire définie par $y = f(x) = 2x + 7$ sur l'intervalle $[-5, 5]$, on formulera son tracé comme suit:

```
> plot([t,2*t+7,t=-5..5]);
```



Ce qui revient au même, pour MAPLE, si nous formulons de nouveau cette requête comme suit:

```
> plot([x,2*x+7,x=-5..5]);
```



Pour réaliser le tracé d'un lieu géométrique dans l'espace, nous utiliserons la macro-commande `plot3d`. Nous allons également privilégier la syntaxe paramétrique de cette macro-commande:

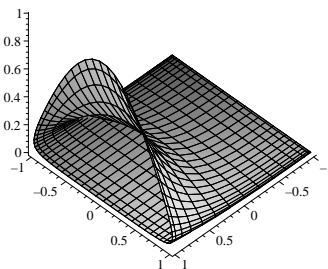
```
plot3d([x(r,s),y(r,s),z(r,s)],r=a..b,s=c..d)
```

L'abscisse $x(r, s)$, l'ordonnée $y(r, s)$ et la cote $z(r, s)$ de chaque point du lieu géométrique de l'espace sont obtenues en donnant différentes valeurs aux paramètres r et s .

Par exemple, considérons le lieu géométrique défini par

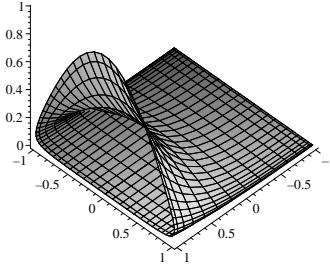
$$\begin{cases} x(r, s) = \cos(r) \\ y(r, s) = \sin(s) \\ z(r, s) = e^{-r^2-s^2}, \quad r, s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

```
> plot3d([cos(r),sin(s),exp(-r^2-s^2)],r=-Pi..Pi,s=-Pi..Pi,
grid=[30,60],axes=framed);
```



Ce qui revient au même, pour Maple, en formulant à nouveau cette requête comme suit:

```
> plot3d([cos(x),sin(y),exp(-x^2-y^2)],x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,
        grid=[30,60],axes=framed);
```



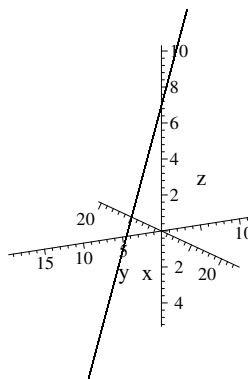
Par défaut, tout comme l’affichage 2D, l’affichage 3D est fait avec des axes de coordonnées qui ne sont pas dans le rapport 1:1. C’est l’option `scaling=unconstrained` qui est validée par défaut. De plus, par défaut, l’affichage 3D est sans axes de coordonnées. Pour faire afficher un type d’axes de coordonnées, il faudra préciser explicitement, en options, `axes=type`, où `type` peut être `BOXED`, `NORMAL`, `FRAME` ou `NONE` (par défaut).

Pour réaliser des tracés de droites dans l’espace, il suffit d’utiliser telles quelles leurs équations paramétriques.

$$\text{Soit la droite d'équations paramétriques } \begin{cases} x = 9 - 2t \\ y = 10 - 3t \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Bien que ce lieu géométrique (la droite) ne soit défini qu’à l’aide d’un seul paramètre, on doit quand même préciser, dans la macro-commande `plot3d`, un intervalle pour le paramètre absent. Dans un tel cas, la macro-commande `plot3d` considère les coefficients du paramètre manquant dans les équations paramétriques comme étant tous nuls.

```
> plot3d([9-2*t,10-3*t,t],t=-5..10,s=-10..10,thickness=2,
        axes=normal,orientation=[60,75],labels=[x,y,z]);
```



Nous avons modifier l’orientation par défaut de l’affichage (`orientation=[45,45]`) en précisant l’option `orientation=[60,75]` et imposer l’affichage des axes de coordonnées habituels en précisant l’option `axes=normal`.

L'orientation $\theta = 60^\circ$ et $\phi = 75^\circ$ a été obtenue en modifiant manuellement, avec la souris, l'orientation spatiale du graphique. Ces valeurs d'angles ont été lues dans la partie gauche de la barre contextuelle qui s'installe lorsque l'on clique sur le graphique 3D pour modifier son orientation.

Remarque: L'orientation par défaut du graphique 3D est $\theta = 45^\circ$ et $\phi = 45^\circ$. Il est possible, par contre, de modifier cette orientation par défaut durant une session Maple en utilisant la macro-commande `setoptions3d` de l'extension `plots`. Mais, le plus souvent, il faudra trouver manuellement une orientation mettant en évidence certaines caractéristiques désirées qui n'auront pas été misent automatiquement en évidence avec une orientation par défaut. De façon pratique, il n'est donc pas utile de modifier l'orientation par défaut [45,45] avec la macro-commande `setoptions3d`.

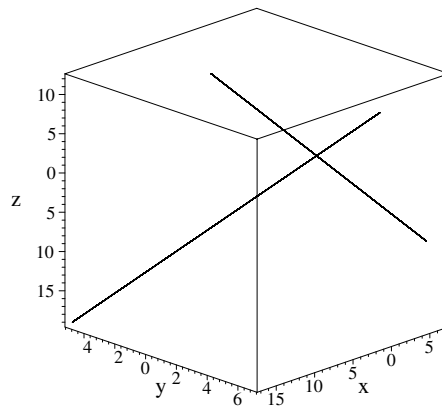
Il est, bien sûr, possible de superposer dans un même graphique les tracés de plusieurs droites dans l'espace.

Soit les droites
d'équations
paramétriques:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 - 6t \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Delta_2: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 - 2t \\ z = -3 + 5t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

```
> Delta_1:=plot3d([-1+6*t,1-2*t,-1-6*t],t=-1..3,s=-5..5,thickness=2):
Delta_2:=plot3d([-2+3*t,5-2*t,-3+5*t],t=-1..3,s=-5..5,thickness=2):
```

```
> display({Delta_1,Delta_2},axes=boxed,orientation=[45,70],labels=[x,y,z]);
```



Le graphique précédent montre clairement que les deux droites ne sont pas parallèles. Mais, sont-elles concourantes? Après avoir reproduit ces requêtes sur une feuille Maple, sélectionner le graphique avec un clic gauche maintenu enfoncé et modifier l'orientation spatiale de celui-ci. Que concluez-vous?

Listes, vecteurs et norme euclidienne d'un vecteur

Les opérations qu'on effectue sur des objets mathématiques dépendent de la nature de ces objets, c'est-à-dire de leur(s) type.

```
> u:=[1,2,3];
   v:=Vector[row]([1,2,-3]);

      u := [1, 2, 3]
      v := [1, 2, 3]
```

Quoique l’affichage des deux objets précédents « u » et « v » soit le même, seul « v » est reconnu par MAPLE comme un vecteur. En effet,

```
> type(u,Vector);
   type(v,Vector);

      false
      true
```

Pour créer un vecteur dont le type est compatible avec les macro-commandes de l’extension `LinearAlgebra`, on utilisera la macro-commande `Vector` de la bibliothèque de base. Notons, par défaut, que c’est un vecteur colonne qui est créé avec la macro-commande `Vector`. Pour créer un vecteur ligne, il faut spécifier l’option « `row` »: `Vector[row]`.

Il est bien sûr possible d’utiliser la syntaxe « `<>` » pour la création de vecteurs compatibles avec les macro-commandes de l’extension `LinearAlgebra`.

```
> u:=<1,2,3>;      # vecteur ligne
   v:=Vector([1,2,-3]); # vecteur colonne

      u := [1, 2, 3]
      u :=  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 
```

On obtient la norme d’un vecteur d’un espace euclidien orthonormé à l’aide de la macro-commande `Norm` de l’extension `LinearAlgebra`. Dans ce cas, la norme du vecteur correspond à sa longueur.

```
> `||v||`=norm(v,2);

      ||v|| =  $\sqrt{14}$ 
```

Avec la macro-commande `Norm`, il existe plusieurs manières de calculer la norme d’un vecteur. Ici, en précisant le nombre 2, on demande alors simplement à MAPLE de calculer la racine carrée de la somme des carrés des composantes du vecteur, soit la norme euclidienne.

Tracé dans l'espace d'un segment de droite reliant deux points

Pour tracer un segment de droite entre deux points A et B de l'espace, il faudra d'abord obtenir des équations paramétriques de la droite passant par ces deux points. Utilisons le vecteur \overrightarrow{AB} comme vecteur directeur et le vecteur \overrightarrow{OA} pour obtenir des équations paramétriques.

Ainsi, avec l'équation vectorielle $(x, y, z) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$, il suffira alors de faire varier le paramètre $t \in [0,1]$ pour tracer un segment de droite reliant les points A et B.

Par exemple, traçons le segment de droite reliant les points A(1,1,1) et B(-1,3,0).

```
> A:=[1,1,1]; # A est un point (liste)
    B:=[-1,3,0]; # B est un point (liste)
```

$$A := [1, 1, 1]$$

$$B := [-1, 3, 0]$$

Créons les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{OA} .

```
> AB:=Vector([B[1]-A[1],B[2]-A[2],B[3]-A[3]]);
    OA:=convert(A,Vector);
```

$$AB := \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

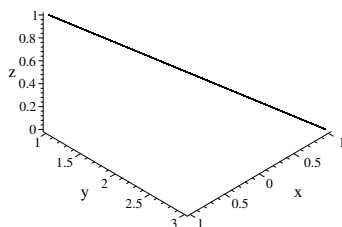
$$OA := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assignons le calcul $\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ à la variable «Droite» et traçons ce lieu.

```
> Droite:=OA+t*AB;
```

$$Lieu := \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ 1 + 2t \\ 1 - t \end{bmatrix}$$

```
> plot3d(Droite,t=0..1,s=-5..5,thickness=2,axes=framed,labels=[x,y,z]);
```



La macro-commande `line` de l'extension `plottools` est utile pour le tracé d'un segment de droite reliant deux points de l'espace. Mais, dans le cadre du cours, son utilisation est proscrite.

Comme second exemple, illustrons un segment de droite reliant deux points quelconques des deux droites Δ_1 et Δ_2 de la section précédente.

Par exemple, soit les points $A(-1,1,-1)$ et $B(-2,5,-3)$ appartenant respectivement aux droites Δ_1 et Δ_2 .

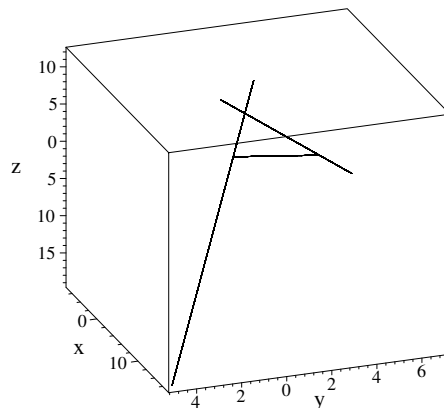
```
> A:=[-1, 1, -1];
   B:=[-2, 5, -3];
           A := [-1, 1, -1]
           B := [-2, 5, -3]
```

```
> AB:=Vector[row]([B[1]-A[1],B[2]-A[2],B[3]-A[3]]);
   OA:=convert(A,Vector[row]);
           AB := [-1, 4, -2]
           OA := [-1, 1, -1]
```

```
> Droite:=OA+t*AB;
           Lieu := [-1 - t, 1 + 4t, -1 - 2t]
```

```
> Segment:=plot3d(Droite,t=0..1,s=-5..5,thickness=2):
```

```
> display({Delta_1,Delta_2,Segment},axes=boxed,labels=[x,y,z],
           orientation=[-20,65]);
```

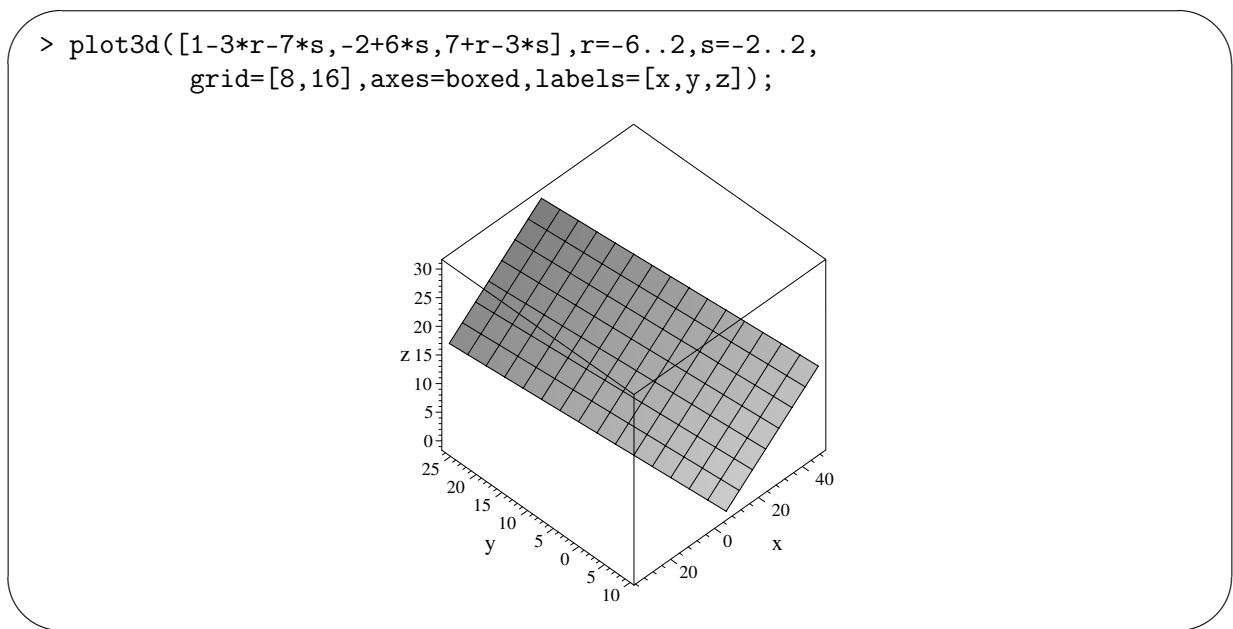


Tracé d'un plan de l'espace

Pour tracer un plan dans l'espace, on utilisera, bien sûr, la macro-commande `plot3d`. Si le plan à tracer est donné avec des équations paramétriques, on utilisera ces équations qui définissent directement l'abscisse $x(r, s)$, l'ordonnée $y(r, s)$ et la cote $z = z(r, s)$ de chaque point du plan.

Par exemple, soit le plan Π :
$$\begin{cases} x = 1 - 3r - 7s \\ y = -2 + 6s \\ z = 7 + r - 3s, \quad r, s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Chaque paire de valeurs assignées aux paramètres r et s déterminent un point (x, y, z) de l'espace. L'ensemble de ces points constitueront une surface de l'espace. Dans ce cas-ci, cette surface est un plan.



La macro-commande `plot3d` autorise plusieurs options qui permettent de contrôler l'affichage du tracé des surfaces de l'espace. Pour avoir une idée de ce que l'utilisateur peut contrôler, consulter l'aide Maple en tapant la requête «`?plot3d[options]`». Puisque le style par défaut `style=patch` inclut un quadrillage de la surface, remarquer, dans l'exemple précédent, l'utilisation de l'option `grid` qui a été utilisée pour mieux «contrôler» le quadrillage du tracé. Si, pour un tracé d'une surface, le quadrillage n'est pas désiré, on précisera l'option `style=patchnogrid`.

Lorsque le plan à tracer est donné avec une équation cartésienne, il suffira de considérer deux des variables libres et de lier la troisième à celles-ci afin de déduire des équations paramétriques du plan.

À titre d'exemple, superposons dans un même graphique, les tracés des deux plans Π_1 et Π_2 d'équations cartésiennes

$$\begin{aligned} \Pi_1 : \quad & 3x + 2y + 4z - 11 = 0 \\ \Pi_2 : \quad & 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Désignons deux des trois variables de l'équation comme variables libres et l'autre comme variable liée à celles-ci. Choisissons ici les variables x et y comme variables libres dans chaque équation. Ainsi, c'est donc z qui sera la variable liée.

Il s'agit ensuite, d'isoler la variable liée. Avec les équations données ici, il est facile d'isoler mentalement z . De cette manière, les équations suivantes sont des équations paramétriques des deux plans:

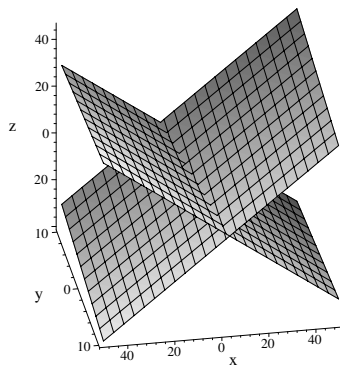
$$\Pi_1: \begin{cases} x = r \\ y = s \\ z = \frac{3r + 2s - 11}{-4} \end{cases} \quad r, s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Pi_2: \begin{cases} x = r \\ y = s \\ z = \frac{2r + s - 1}{3} \end{cases} \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

```
> PI_1:=plot3d([r,s,(3*r+2*s-11)/(-4)],r=-50..50,s=-10..10,grid=[24,12]):
PI_2:=plot3d([r,s,(2*r+s-1)/3],r=-50..50,s=-10..10,grid=[24,12]):
```

Sans trop manquer de rigueur mathématique, on pourrait très bien évoquer directement les variables x et y dans la macro-commande `plot3d` en lieu et place des paramètres r et s . Pour Maple, il n'y a aucun problème pourvu que les intervalles de traçage correspondent aux choix des noms x et y . Ainsi, formulons de nouveau les requêtes précédentes.

```
> PI_1:=plot3d([x,y,(3*x+2*y-11)/(-4)],x=-50..50,y=-10..10,grid=[24,12]):
PI_2:=plot3d([x,y,(2*x+y-1)/3],x=-50..50,y=-10..10,grid=[24,12]):
```

```
> display({PI_1,PI_2},axes=framed,orientation=[80,60],labels=[x,y,z]);
```



Puisque ces deux plans sont sécants, voyons comment obtenir l'équation de la droite d'intersection puis de superposer son tracé à ceux des deux plans.

```
> Éq_1:=3*x+2*y+4*z-11=0;
Éq_2:=2*x+y-3*z-1=0;
```

$$\acute{E}q_1 := 3x + 2y + 4z - 11 = 0$$

$$\acute{E}q_2 := 2x + y - 3z - 1 = 0$$

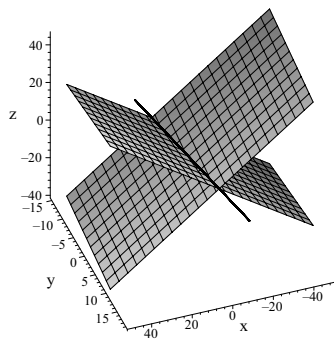
```
> Solution:=solve({Éq_1,Éq_2});
```

$$\text{Solution} := \{z = z, y = 19 - 17z, x = -9 + 10z\}$$

En accord avec le résultat précédent, désignons z comme variable libre.

```
> Droite_inter:=plot3d([-9+10*t,19-17*t,t],t=0..2,s=-2..2,thickness=3):
```

```
> display({PI_1,PI_2,Droite_inter},axes=framed,orientation=[70,50],
labels=[x,y,z]);
```



Tracé d'un faisceau de plans

Illustrons quelques plans du faisceau de plans engendrés par les plans d'équations

$$\Pi_{g1} : 3x - y + 2z - 5 = 0$$

$$\Pi_{g2} : 2x + y - z + 4 = 0$$

```
> PI_g1:=3*x-y+2*z-5=0;
PI_g2:=2*x+y-z+4=0;
```

$$\Pi_{g1} := 3x - y + 2z - 5 = 0$$

$$\Pi_{g2} := 2x + y - z + 4 = 0$$

Par commodité, créons une fonction de deux variables $k1$ et $k2$ qui servira à générer des équations cartésiennes de plans de ce faisceau.

```
> Faisceau:=(k1,k2)->k1*PI_g1+k2*PI_g2;
```

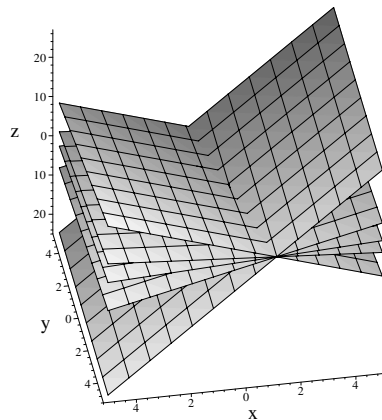
$$\text{Faisceau} := (k1, k2) \rightarrow k1 \Pi_{g1} + k2 \Pi_{g2}$$

Obtenons maintenant les tracés de cinq plans quelconques de ce faisceau. Désignons z comme variable liée. Ainsi, pour chaque plan du faisceau, nous devons isoler z par calcul et ce calcul sera poser directement dans la macro-commande `plot3d` pour lier la valeur de la cote aux valeurs de x et de y .

```
> PI_1:=plot3d([x,y,solve(Faisceau(1,0),z)],x=-5..5,y=-5..5,grid=[14,10]):
PI_2:=plot3d([x,y,solve(Faisceau(0,1),z)],x=-5..5,y=-5..5,grid=[14,10]):
PI_3:=plot3d([x,y,solve(Faisceau(1,1),z)],x=-5..5,y=-5..5,grid=[14,10]):
PI_4:=plot3d([x,y,solve(Faisceau(-1,1),z)],x=-5..5,y=-5..5,grid=[14,10]):
PI_5:=plot3d([x,y,solve(Faisceau(2,-5),z)],x=-5..5,y=-5..5,grid=[14,10]):
```

Superposons ces tracés dans un même graphique.

```
> display({seq(PI_|| (1..5)),axes=framed,orientation=[80,50],
labels=[x,y,z]);
```



Obtenons ensuite l'équation de l'arête de ce faisceau.

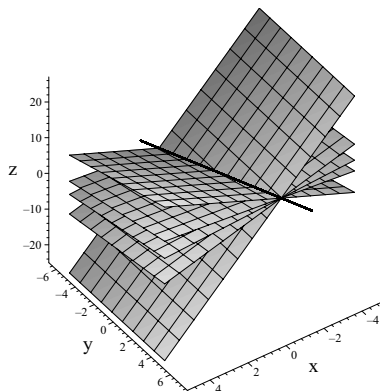
```
> Solution:=solve({PI_g1,PI_g2});
Solution := {z = -5x + 1, y = -7x - 3, x = x}
```

En accord avec la solution donnée, désignons la variable x comme étant la variable libre.

```
> Arête:=plot3d([t,-7*t-3,-5*t+1],t=-1.5..1,s=-5..10,thickness=3):
```

Finalement, dans un même graphique, superposons l'arête à ces cinq plans du faisceau.

```
> display({seq(PI_|(1..5),Arête),axes=framed,orientation=[55,50],
          labels=[x,y,z]);
```



Multiplication scalaire et vectorielle

Dans une démarche de résolution de problèmes, il peut être nécessaire, par exemples, de trouver un vecteur normal à un plan pour lequel on connaît un point et les vecteurs directeurs ou encore de trouver les composantes du vecteur projection orthogonale $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})$.

Un vecteur normal au plan sera obtenu avec la multiplication vectorielle de deux vecteurs directeurs de ce plan.

Pour effectuer la multiplication vectorielle, on utilisera la macro-commande **CrossProduct** et pour effectuer la multiplication scalaire, on utilisera la macro-commande **DotProduct**. Ces deux macro-commandes, appartenant à l'extension **LinearAlgebra**, ont déjà été initialisées au début de la session.

À titre d'exemple, obtenons le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u} = (2, -1, 3)$ et $\vec{v} = (6, 2, 7)$.

```
> u:=Vector[row]([2,-1,3]);
   v:=Vector[row]([6,2,7]);
```

$$u := [2, -1, 3]$$

$$v := [6, 2, 7]$$

```
> `u x v` = CrossProduct(u,v);
```

$$u \times v = [-13, 4, 10]$$

Vérifions si, effectivement, le vecteur \vec{w} est bien perpendiculaire aux deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

```
> `u . u x v` =DotProduct(u,CrossProduct(u,v));
   `v . u x v` =DotProduct(v,CrossProduct(u,v));
```

$$u \cdot u \times v = 0$$

$$v \cdot u \times v = 0$$

Autre exemple de calcul. Obtenons les composantes du vecteur projection orthogonale de \vec{u} sur \vec{v} , soit $\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$

```
> proj['v'](u)=DotProduct(u,v)/DotProduct(v,v) * v;
```

$$\text{proj}_v(u) = \left[\frac{186}{89}, \frac{62}{89}, \frac{217}{89} \right]$$

Comme dernier exemple, déterminons si les points A(6,3,3), B(-2,1,1), C(1,-1,0) et D(3,-2,-1) sont coplanaires. Appliquons le critère de coplanarité de trois vecteurs de l'espace. Calculons le produit mixte des vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} .

Posons directement les vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} .

```
> AB:=Vector[row]([-8,-2,-2]);
AC:=Vector[row]([-5,-4,-3]);
AD:=Vector[row]([-3,-5,-4]);
```

Appliquons le critère de coplanarité, calculons le produit mixte $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \times \vec{AD}$.

```
> `AB · AC × AD` = DotProduct(AB,CrossProduct(AC,AD));
```

$$AB \cdot AC \times AD = -12$$

Puisque le produit mixte n'est pas nul, cela montre que les vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} ne sont pas coplanaires, et donc que les points A, B, C et D ne le sont pas également.