

Math NYB

Travail IV

(Résoudre chacun des problèmes à l'aide de Maple)

1. Soit la suite $\left\{ \sqrt[n]{\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 4n + 1}\right)^n} \right\}$

- Donner les 20 premiers termes de la suite (sous forme décimale).
- Représenter graphiquement (à l'aide de points) les 20 premiers termes de la suite.
- La suite converge-t-elle ? Si elle converge indiquer vers quelle valeur.

2. Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2 - 6n - 1}{(4n + 1)^2(4n - 3)^2}$

- Trouver les 6 premiers termes de la suite s_n des sommes partielles de la série.
- À partir des termes obtenus en a), trouver s_n le n^{e} terme de la suite.
- En utilisant s_n , trouver la somme si elle existe de la série.

3. En utilisant la macro-commande **sum()**, trouver la somme si elle existe de la série suivante.

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} + \dots$$

4. En utilisant le critère de D'Alembert, trouver l'intervalle ouvert de convergence des séries.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (2n)! (x + 1)^n}{(3n)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{\sqrt{n^n}}$

5. Soit $f(x) = \text{arctg } x$.

- Trouver le polynôme de Taylor de degré 7 associé à la fonction $f(x)$ autour de $c = 0$.
- Tracer sur le même graphique $f(x)$ et le polynôme de Taylor obtenu en a).
- Le polynôme obtenu en a) donne-t-il une bonne approximation de $\text{arctg}(2.1)$?
- Trouver le polynôme de Taylor de degré 7 associé à la fonction $f(x)$ autour de $c = -1$.
- Tracer sur un même graphique $f(x)$ et le polynôme de Taylor obtenu en d).
- Le polynôme obtenu en d) donne-t-il une bonne approximation de $\text{arctg}(2.1)$?
- Trouver un polynôme de Taylor de degré 2 associé à la fonction $f(x)$ autour d'une valeur c (entière) qui donne une approximation exacte à deux décimales de $\text{arctg}(2.1)$.

6. Soit $f(x) = \ln x$.

Tracer sur un même graphique $f(x)$ et le polynôme de Taylor de degré 50 associé à $f(x)$ autour de $c = k$ puis, estimer à l'aide du graphique l'intervalle ouvert de convergence de la série

- a) si $k = 2$,
- b) si $k = 3$,
- c) si $k = 4$.

(Ajuster adéquatement l'étendue en x et en y des graphiques.)

d) À partir des résultats obtenus quel devrait être l'intervalle ouvert de convergence de la série de Taylor autour de $c = k$ (où k est une valeur entière supérieure à 0) ?

7. Soit $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.

Tracer sur un même graphique $g(x)$ et le polynôme de Taylor de degré 50 associé à $g(x)$ autour de $c = k$ puis, estimer à l'aide du graphique l'intervalle ouvert de convergence de la série

- a) si $k = 3$,
- b) si $k = 4$,
- c) si $k = 5$.

(Ajuster adéquatement l'étendue en x et en y des graphiques.)

d) À partir des résultats obtenus quel devrait être l'intervalle ouvert de convergence de la série de Taylor autour de $c = k$ (où k est une valeur entière supérieure à 2) ?

André Lévesque