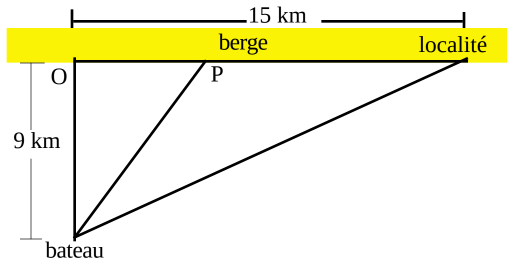
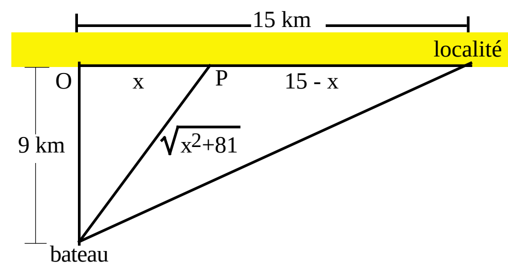
Problème 1

Un bateau est ancré à 9 km du point le plus proche d'une côte rectiligne. Un message doit parvenir au plus vite à une localité située sur la côte à 15 km du point O de la berge le plus proche du bateau. Le messager parcourt 4 km à l'heure à pied et 3 km à l'heure en canot.



a) **En quel point P de la berge doit-il accoster pour arriver le plus rapidement à la localité?**

b) **Si notre homme quitte le bateau à midi et que le message doit être livré avant 17h45, croyez-vous que cela est possible ?**



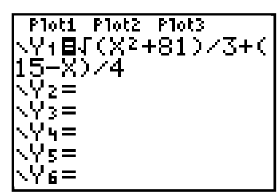
Soit x la distance entre les points O et P.

La distance entre le bateau et le point P est par conséquent de $\sqrt{x^2+81}$ km (Pythagore) et la distance entre le point P et la localité de (15 - x) km.

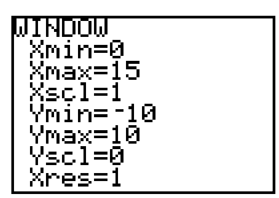
Soit maintenant T le temps que prendra le messager pour atteindre la localité. Puisqu'il se déplace en canot à la vitesse de 3 km/h et qu'il marche à la vitesse de 4 km/h, on a

$$T = \frac{\sqrt{x^2+81}}{3} + \frac{(15 - x)}{4}$$

Le domaine de T correspond à l'intervalle [0, 15].

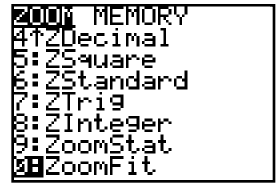


1. **Appuyez sur la touche** $\boxed{\text{Y=}}$ **pour définir la fonction dans l'éditeur.**

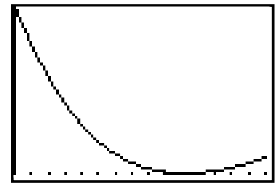


2. **Appuyez sur** $\boxed{\text{WINDOW}}$ **puis donnez à Xmin la valeur 0 et à Xmax la valeur 15.**

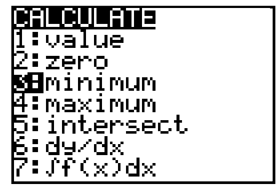
3. **Choisissez ZOOM 0 pour fixer l'étendue de la variable Y entre le minimum et le maximum de la fonction sur [0, 15].**



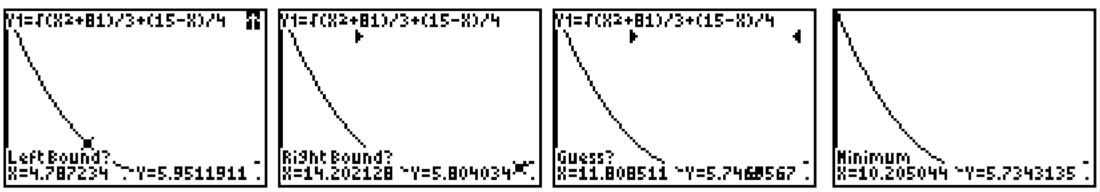
4. **Après quelques secondes, le graphique s'affiche sur l'intervalle choisi.**



5. **Pour obtenir le minimum, appuyez sur 2nd [CALC] afin d'afficher le menu CALCULATE puis sélectionnez 3:minimum dans ce menu.**



6. **Répondez aux différents messages que la TI-83 Plus renvoie.**



Si le messager veut atteindre la localité en un temps minimal, il devra accoster à 10,2 km du point O et le temps qu'il prendra pour atteindre la localité sera de 5,73 h ou environ 5h44min. Il atteindra donc la localité avant 17h45.

Exercices

1. Soit $f'(x) = 4x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 10x$

   a) Tracer le graphique de $f'(x)$.
   b) Trouver les nombres critiques de $f(x)$.
   c) Sur quel intervalle $f(x)$ est-elle croissante ?
   d) Sur quel intervalle $f(x)$ est-elle décroissante ?
   e) Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $f(x)$ passe-t-elle par un minimum relatif ?
   f) Pour quelle(s) valeur(s) de x, la fonction $f(x)$ passe-t-elle par un maximum relatif ?

2. Soit $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

   a) Tracer le graphique de $f''(x)$.
   b) Trouver les nombres de transition de $f(x)$.
   c) Sur quel intervalle, le graphique de $f(x)$ est-il concave vers le haut ?
   d) Sur quel intervalle, le graphique de $f(x)$ est-il concave vers le bas ?
   e) Pour quelle(s) valeur(s) de x, le graphique de $f(x)$ passe-t-il par un point d'inflexion ?

3. Soit $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{x}}$

   a) Tracer le graphique de $f''(x)$ en prenant comme étendue l'intervalle [-2, 2] sur les deux axes.
   b) À l'aide du graphique précédent, estimer la valeur des nombres de transition de $f(x)$.

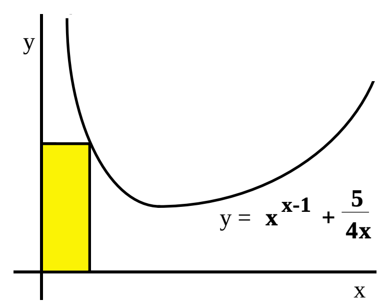
4. Estimer la valeur (si elle existe) des limites suivantes.

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x + 1)}{x^2 + 4x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} x(1 - e^{2/x})$

5. Deux des côtés d'un rectangle reposent sur l'axe des x et l'axe des y. Un des sommets du rectangle touche le graphique de

$$y = x^{x-1} + \frac{5}{4x}$$

   comme sur la figure de droite.



   a) Quelle est l'aire du rectangle lorsque sa base tend vers 0 ?
   b) Tracer le graphique de A' où A correspond à l'aire du rectangle.
   c) À l'aide du graphique de A', trouver pour quelle valeur de x l'aire A du rectangle sera minimale ?

6. D'après un modèle sur la croissance de la population mondiale, on estime que dans t années après 1975, le nombre d'habitants sur le globe sera d'environ

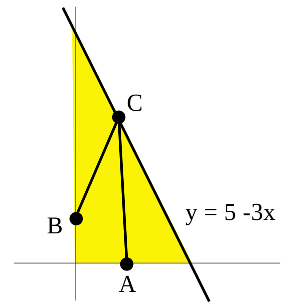
$$N = \frac{12}{1 + 2e^{-0,0278t}} \text{ milliards d'habitants}$$

   Selon ce modèle,

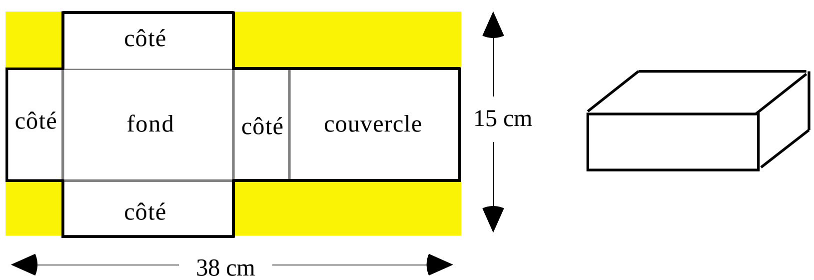
   a) en quelle année la population mondiale ateindra-t-elle 10 milliards d'habitants ?
   b) quel est le taux de croissance de la population mondiale présentement en 2001 ?
   c) en quelle année le taux de croissance de la population mondiale sera-t-il maximal ?

7. **Quelles sont les coordonnées du point (x, y) sur la courbe d'équation $y = x^2 - x - 1$ le plus près du point (1, 1) ?**

8. **Une particule se déplace du point A(1, 0) vers le point B(0, 1) en passant par le point C(x,y) situé dans le premier quadrant sur la courbe d'équation y = 5 - 3x. Quelle est l'abscisse du point C pour laquelle la distance sera minimale ?**



9. **Plier une feuille de format 38 cm x 15 cm de façon à former une boîte avec un couvercle comme sur la figure du bas. Quel est le volume maximal de la boîte pouvant être ainsi obtenu ?**



Réponses

1. **a)**
b) { -2, -5/4, 0, 1 }
c)] -∞, -2 [   ] -5/4, 0 [   ] 1, ∞ [
d)] -2, -5/4 [   ] 0, 1 [
e) { -5/4, 1 }
f) { -2, 0 }

2. **a)**
b) { -1, 1/2 }
c)] 1/2, ∞ [
d)] -∞, 1/2 [
e) { 1/2 }

3. **a)**
b) { -0,309 }

4. **a)** 0,25
b) -2

5. **a)** 2,25 ou 9/4
b)
c) x = 0,368

6. **a)** en 2057
b) 0,08338 milliards d'habitants / année
c) en 2000

7. (1,89 ; 0,68)

8. x = 1,467

9. volume maximal : 435,21 cm^3
- longueur: 15,69 cm
- profondeur: 8,38 cm
- hauteur est 3,31 cm