

Dans ce deuxième travail, vous verrez comment utiliser la TI-83 Plus pour estimer une limite ou une dérivée.

Problème 1

Trouver $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2\sqrt{x} + 3x - 5}$

1. Appuyez sur la touche **Y=** pour définir la fonction dans l'éditeur.

$([X, T, \theta, n] - 1) \div (2 [2nd] [\sqrt{\quad}] [X, T, \theta, n] + 3 [X, T, \theta, n] - 5)$

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=(X-1)/(2√(X)
+3X-5)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

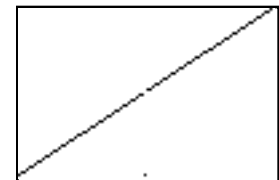
2. Appuyez sur **WINDOW** puis donnez à Xmin la valeur 1 - 0,001 et à Xmax la valeur 1 + 0,001.

```
WINDOW
Xmin=.999
Xmax=1.001
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
Xres=1
```

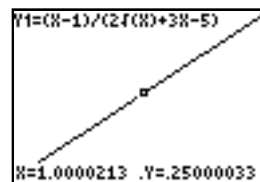
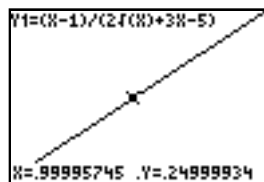
3. Choisissez **ZOOM** **0** pour fixer l'étendue de la variable Y entre le minimum et le maximum de la fonction sur [0,999 ; 1,001].

```
ZOOM MEMORY
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
8:ZInteger
9:ZoomStat
0:ZoomFit
```

4. Après quelques secondes, le graphique s'affiche sur l'intervalle choisi.



5. Appuyez ensuite sur **TRACE**. Le graphique de la fonction apparaît avec au bas, les valeurs des coordonnées X et Y correspondant à la position du curseur graphique. En déplaçant le curseur, on constate que lorsque X est très près de 1, la valeur de Y s'approche de 0,25.



On conclut que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2\sqrt{x} + 3x - 5} = \frac{1}{4}$

Problème 2

Trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2}$

1. Appuyez sur la touche **Y=** pour définir la fonction dans l'éditeur.

((X,T,θ,n x² + 1) ^ (1 ÷ 3) - 1)
 ÷ X,T,θ,n x²

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=((X^2+1)^(1/3)-1)/X^2
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

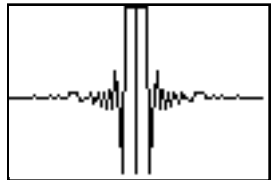
2. Appuyez sur **WINDOW** puis donnez à Xmin la valeur - 0,001 et à Xmax la valeur 0,001.

```
WINDOW
Xmin=-.001
Xmax=.001
Xscl=1
Ymin=.24998436...
Ymax=.25001561...
Yscl=1
Xres=1
```

3. Choisissez **ZOOM** **0** pour fixer l'étendue de la variable Y entre le minimum et le maximum de la fonction sur [- 0,001 ; 0,001].

```
ZOOM MEMORY
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
8:ZInteger
9:ZoomStat
0:ZoomFit
```

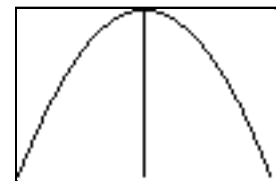
4. Après quelques secondes, le graphique s'affiche sur l'intervalle [-0,001 ; 0,001]. Cette fois-ci le graphique est tout à fait incohérent.



Le problème se présente à l'occasion. Il est causé par le fait que la TI-83 Plus arrondit les nombres en ne gardant que quelques chiffres significatifs dans ses calculs. Le numérateur et le dénominateur de notre exemple s'approchent tellement rapidement de 0 sur l'intervalle [-0,001 ; 0,001] que la valeur arrondie correspond à toute fin pratique à 0 pour le calculateur. Pour corriger la situation, il suffit d'agrandir l'intervalle.

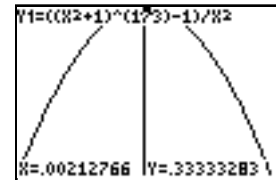
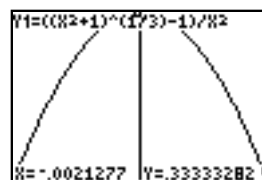
5. Utilisez l'intervalle [-0,1 ; 0,1] puis appuyez sur **ZOOM** **0** pour obtenir le graphique sur l'intervalle choisi.

```
WINDOW
Xmin=-.1
Xmax=.1
Xscl=1
Ymin=.33332926...
Ymax=.33333810...
Yscl=1
Xres=1
```



6. Appuyez ensuite sur **TRACE** et déplacez le curseur pour constater que lorsque X est très près de 0, la valeur de Y s'approche de 0,33...

On conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \frac{1}{3}$



Problème 3

Trouver a) $\lim_x (\sqrt{x^2 - 4x} - x - 1)$

b) $\lim_x (2x^2 - \sqrt{5x^4 + 3})$

a) $\lim_x (\sqrt{x^2 - 4x} - x - 1)$

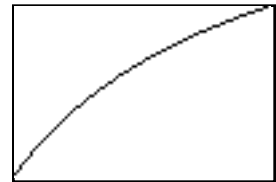
1. Appuyez d'abord sur **Y=** pour définir la fonction dans l'éditeur puis sur **WINDOW**.

Donnez à Xmin la valeur 100, à Xmax la valeur 200 et à Xscl la valeur 0.

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=√(X²-4X)-X-1
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

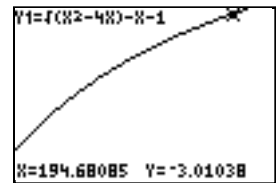
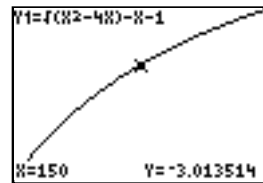
```
WINDOW
Xmin=100
Xmax=200
Xscl=0
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
Xres=1
```

2. Choisissez **ZOOM** **0** et après quelques secondes, le graphique s'affiche sur l'intervalle [100 ; 200].



3. Appuyez ensuite sur **TRACE** et déplacez le curseur pour constater que lorsque X augmente la valeur de Y s'approche de -3.

Par conséquent $\lim_x (\sqrt{x^2 - 4x} - x - 1) = -3$



b) $\lim_x (2x^2 - \sqrt{5x^4 + 3})$

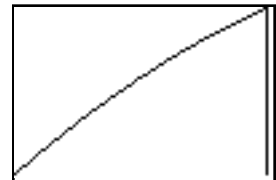
1. Appuyez d'abord sur **Y=** pour définir la fonction dans l'éditeur puis sur **WINDOW**.

Donnez à Xmin la valeur -200, à Xmax la valeur -100 et à Xscl la valeur 0.

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=2X²-√(5X⁴+3)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

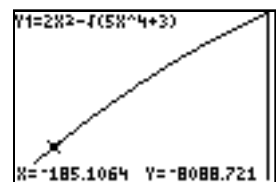
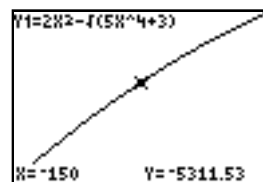
```
WINDOW
Xmin=-200
Xmax=-100
Xscl=0
Ymin=-3.020410...
Ymax=-3.010101...
Yscl=1
Xres=1
```

2. Choisissez **ZOOM** **0** et après quelques secondes, le graphique s'affiche sur l'intervalle [-200 ; -100].



3. Appuyez ensuite sur **TRACE** et déplacez le curseur pour constater que lorsque X diminue la valeur de Y diminue indéfiniment. Par

conséquent $\lim_x (2x^2 - \sqrt{5x^4 + 3}) = -$



Il peut arriver que le résultat obtenu ne soit pas satisfaisant. Comme pour le problème 2, il suffit de changer l'intervalle et d'utiliser un intervalle contenant des valeurs plus grandes lorsque la fonction varie lentement ou d'utiliser un intervalle contenant des valeurs plus petites lorsque la fonction varie rapidement.

Problème 4

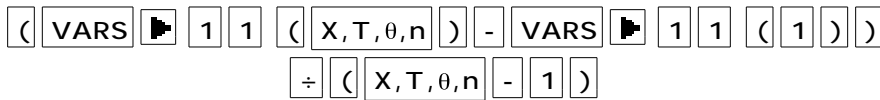
Soit $f(x) = x^3 - 5x + 1$.

Trouver $f'(1)$ à l'aide de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ (définition de la dérivée première forme)

- Appuyez sur la touche **Y=** pour définir à la ligne Y_1 la fonction dans l'éditeur. Entrez ensuite à la ligne Y_2 l'expression

$$\frac{Y_1(x) - Y_1(1)}{x - 1}$$

en appuyant sur les touches



```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=X^3-5X+1
Y2=(Y1(X)-Y1(1))/(X-1)
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

Désactivez l'équation Y_1 en plaçant le curseur sur le signe = et en appuyant sur **ENTER**.

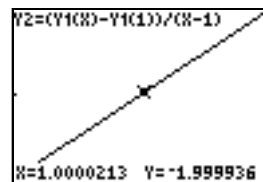
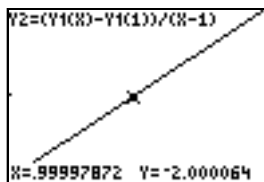
- Appuyez sur **WINDOW** puis donnez à Xmin la valeur $1 - 0,001$ et à Xmax la valeur $1 + 0,001$.

```
WINDOW
Xmin=.999
Xmax=1.001
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=1
Xres=1
```

- Choisissez **ZOOM** **0** pour fixer l'étendue de la variable Y entre le minimum et le maximum de la fonction sur $[0,999 ; 1,001]$.

```
ZOOM MEMORY
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
8:ZInteger
9:ZoomStat
0:ZoomFit
```

- Après quelques secondes, le graphique s'affiche sur l'intervalle choisi. Appuyez ensuite sur **TRACE**. Le graphique de la fonction apparaît. En déplaçant le curseur, on constate que lorsque X est très près de 1, la valeur de Y correspondant à la dérivée cherchée s'approche de -2.



Ainsi $f'(1) = -2$.

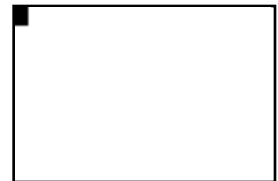
Problème 5

Soit la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 3$.

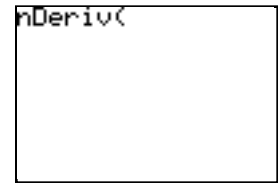
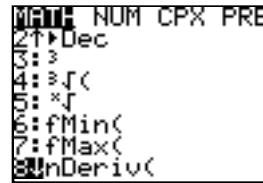
- a) Trouver $f'(2)$.
- b) Représenter graphiquement la courbe de la fonction et sa droite tangente en $x = 2$.
- c) Trouver les coordonnées des points d'intersection des deux courbes en excluant le point de tangence.

Il existe plusieurs façons d'obtenir une estimation de la dérivée d'une fonction sur la TI-83 Plus. On peut se servir de la définition de la dérivée comme au problème 4 ou utiliser la commande **nDeriv**.

- 1. Allez vers l'écran principal.



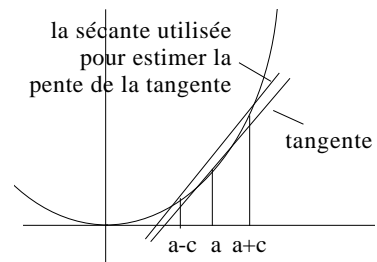
- 2. Appuyez sur **MATH** **8** pour appeler la commande **nDeriv**.



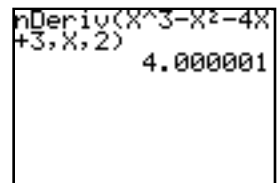
nDeriv(expression,variable,valeur,c) donne une valeur approximative de la dérivée de l'expression par rapport à la variable, pour la valeur indiquée ; la précision est liée à la quantité c (si c n'est pas déterminé, la valeur par défaut est 0,001).

Cette commande fait appel à une méthode de dérivée symétrique qui donne une approximation d'une dérivée par la pente d'une droite sécante. À mesure que la quantité c diminue, l'approximation devient plus précise.

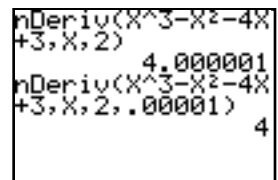
$$\text{Pente de la tangente} \sim \frac{f(a + c) - f(a - c)}{2c}$$



- 3. Définissez la fonction, indiquez X comme variable utilisée et 2 comme valeur de la variable. Ne précisez pas la valeur de c. Le calculateur utilise par défaut $c = 0,001$. Appuyez ensuite sur **ENTER**.



- 4. Pour améliorer la précision, il suffit d'ajouter comme quatrième paramètre une valeur de c inférieure à 0,001. Rappelez la dernière expression calculée en appuyant sur **2nd** **ENTRY** et ajoutez la valeur 0,00001 comme quatrième paramètre en utilisant les touches **▲**, **▼**, **▶** et **◀**. Appuyez ensuite sur **ENTER**. On obtient $f'(2) = 4$.



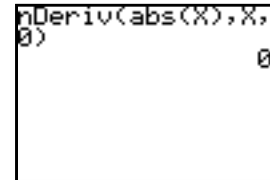
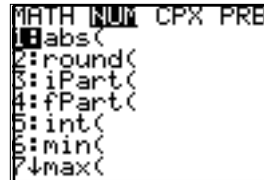
En raison de la méthode utilisée pour calculer **nDeriv**, la TI-83 Plus peut donner une valeur fautive en un point où x n'est pas dérivable. Cela se produit lorsqu'une fonction présente un point anguleux ou saute autour d'un point. Il est important de toujours s'assurer que la dérivée cherchée existe avant d'utiliser **nDeriv**. Pour s'en convaincre examinez le problème suivant.

Trouvez $f'(0)$ si $f(x) = |x|$

Retournez à l'écran principal et rappelez la dernière expression calculée en appuyant sur **2nd** [ENTRY].

Définissez la fonction $|x|$ en appuyant sur **MATH** **▸** **1**, indiquez X comme variable utilisée et 0 comme valeur de la variable.

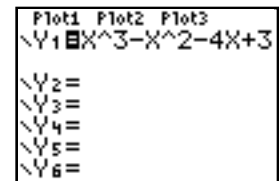
Appuyez ensuite sur **ENTER**.



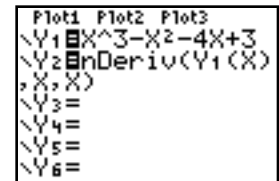
La TI-83 Plus renvoie comme réponse $f'(0) = 0$ bien que la réponse du problème n'existe pas.

La fonction **TRACE** de la TI-83 Plus est une autre façon d'estimer une dérivée. Elle permet entre autres de suivre graphiquement son évolution.

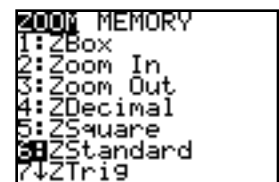
1. Appuyez d'abord sur **Y=** pour définir à la ligne Y_1 la fonction dans l'éditeur.



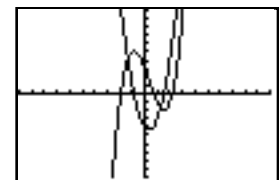
2. Entrez à la ligne Y_2 la commande **nDeriv** en prenant $Y_1(X)$ comme fonction, X comme variable utilisée et X comme valeur utilisée. On ne précise pas la valeur utilisée puisque c'est la fonction dérivée qui nous intéresse ici.



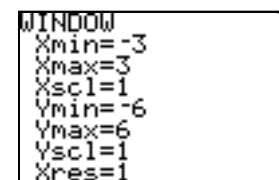
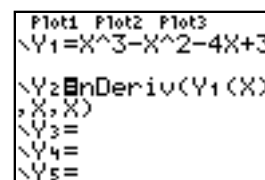
3. Choisissez l'étendue standard en appuyant sur **ZOOM** **6**.



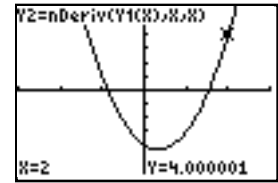
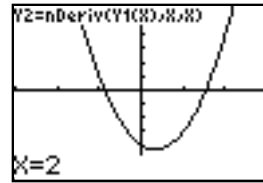
4. Appuyez ensuite sur **GRAPH**. Le graphique de la fonction et de sa dérivée apparaît.



5. Désactivez Y_1 en plaçant le curseur sur le signe = puis appuyez sur **ENTER**. Ajustez adéquatement l'étendue des variables en appuyant sur **WINDOW**.



6. Appuyez sur **TRACE** et entrez la valeur 2. Appuyez sur **ENTER**. La TI-83 retourne 4,000001 comme estimation de $f'(2)$.



On peut de la même façon obtenir rapidement d'autres estimations de la dérivée de $f(x)$.

Pour répondre à la deuxième question, il nous faudra la droite tangente en $x = 2$.

On se souvient que la pente m d'une fonction linéaire $f(x)$ passant par $x = a$ satisfait l'équation suivante.

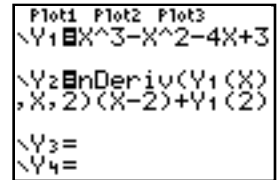
$$m = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{où } m = f'(a)$$

En isolant $f(x)$ on obtient $f(x) = m(x - a) + f(a)$.

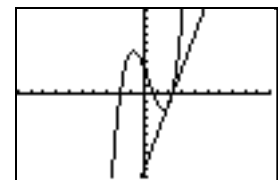
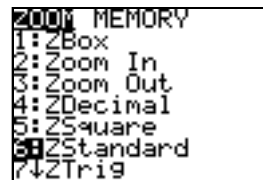
Utilisons cette dernière équation pour obtenir le graphique de la droite tangente en $x = 2$.

1. Appuyez sur **Y=** et placez le curseur sur Y_2 . Appuyez ensuite sur **CLEAR** pour effacer la fonction précédente. Entrez celle du haut (encadrée) en se rappelant que m correspond à

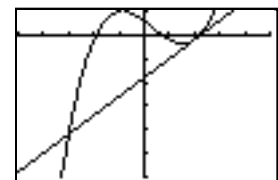
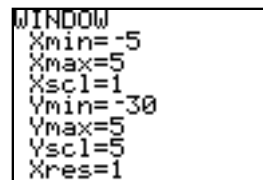
$$f'(2) = nDeriv(Y_1(x), x, 2)$$



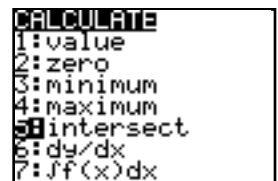
2. Choisissez l'étendue standard en appuyant sur **ZOOM** **6**. Appuyez ensuite sur **GRAPH**. Le graphique de la fonction et de la droite tangente en $x = 2$ apparaît.



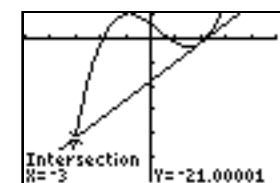
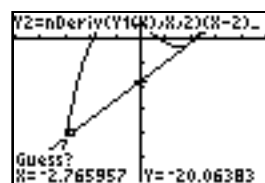
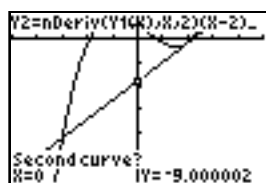
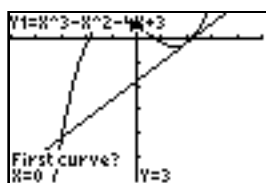
3. Ajustez l'étendue des variables en appuyant sur **WINDOW**. Appuyez ensuite sur **GRAPH**. On constate alors que la tangente coupe la courbe dans le troisième quadrant.



1. Pour obtenir le point d'intersection, appuyez sur **2nd** [CALC] afin d'afficher le menu **CALCULATE** puis sélectionnez **5:intersect** dans ce menu.



2. Répondez aux différents messages que la TI-83 Plus renvoie.



Les deux courbes se rencontrent au point $(-3, -21)$.

Exercices

1. Estimer la valeur (si elle existe) des limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^5 - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^3 - x^2 - 16x - 20}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^3} - x}{x - \frac{1}{x^4}}$

e) $\lim_x 3 - \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x^2 - 1}{x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow -} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 2} - \sqrt[3]{x^3 + 4} - 5}$

2. Estimer la valeur (si elle existe) des limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ si $f(x) = \frac{\sqrt{x}(x+1)}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ si $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

c) Que représente chacune des limites ?

3. Soit la fonction $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 4$

- a) Trouver $f'(-3)$ et $f'(4)$ en vous servant de l'écran principal de votre TI-83 Plus.
 b) Compléter le tableau ci-dessous à l'aide de la commande TABLE.

x	f'(x)
-2	
-1,4	
-0,8	
-0,2	
0,4	
1	
1,6	
2,2	
2,8	
3,4	

- c) Tracer le graphique de $f'(x)$
 d) Trouver les zéros de $f'(x)$ à l'aide de la commande CALCULATE
 e) Trouver l'intervalle sur lequel $f'(x) < 0$
 f) Tracer sur le même graphique la courbe de $f(x)$ et sa droite tangente en $x = 3/2$; trouver ensuite en quel point la droite tangente coupe l'axe des x.

Réponses

1. a) 1,2
 b) -0,8
 c) -0,5
 d) n'existe pas (à gauche : et à droite: -)
 e) 2,5
 f) -0,2

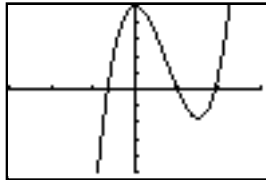
2. a) -4
 b) n'existe pas (à gauche : et à droite: -)
 c) $f'(1) = -4$ et $g'(0)$ n'existe pas.

3. a) $f'(-3) = -184$ et $f'(4) = 117$

b)

x	$f'(x)$
-2	-63
-1,4	-23,62
-0,8	-2,808
-0,2	4,608
0,4	3,816
1	0
1,6	-1,656
2,2	4,032
2,8	22,248
3,4	58,176

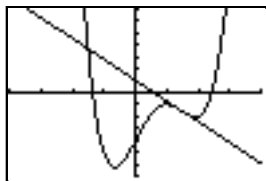
c)



- d) $x = -0,66$; $x = 1$; $x = 1,91$

- e) $]-$; $-0,66[$]1; 1,91[

f)



(0,61; 0)